2000, May – Dec.
2001, Jan. – Feb.

Date. 07. 05.

Квадрупольное взаимодействие в решетке (квадратной) инвент. дефектов сводится к компактной форме (все дефекты одинаковы):

$$W_m^{qq} = \frac{1}{16}\frac{1}{V_0}\sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}^2 \sum_n \frac{1}{R_n^5} + \frac{35}{48}\frac{1}{V_0}\left[2\sum_\alpha Q_{\alpha\alpha}^2 - \sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}^2\right]\sum_n \frac{\cos 4\varphi_{\vec{R}_n}}{R_n^5},$$

V_0 – объем ячейки, $Q_{\alpha\beta} = \int_{V_d} d^3\vec{r}\left[3M_\alpha x_\beta + 3M_\beta x_\alpha - 2(\vec{M}\cdot\vec{r})\right]$, $Sp(\hat{Q}_{\alpha\beta}) = 0$

$(\hat{Q}^2)_{\alpha\beta} = \hat{Q}\hat{Q} = \sum_\gamma Q_{\alpha\gamma} Q_{\gamma\beta}$ $\quad Sp(\hat{Q}^2) = \sum_\alpha (\hat{Q}^2)_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha\gamma} Q_{\alpha\gamma} Q_{\gamma\alpha} = \sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}^2$,

т.к. $Q_{\alpha\beta} = Q_{\beta\alpha}$. $\sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}^2 = Sp(\hat{Q}^2)$ – инвариант относ. вращений внутренних углов дефекта.

$$W_m^{qq} = \frac{1}{16}\frac{1}{V_0} Sp(\hat{Q}^2)\sum_n \frac{1}{R_n^5} + \frac{35}{48}\frac{1}{V_0}\left[2\sum_\alpha Q_{\alpha\alpha}^2 - Sp(\hat{Q}^2)\right]\sum_n \frac{\cos 4\varphi_{\vec{R}_n}}{R_n^5}$$

Рассм. •1) hom. dots или „flower" state dots $Q_{\alpha\beta} = 0$ (все Q_n – одинаковы)

дефекты:

•2) q_m – дефекты $\vec{\Delta}_m^{q_m}$ – конеч. длины, неясно как $Q_{\alpha\beta}$ считать, ведь $M(r)$ неизвестно. Но $\left[2\sum_\alpha Q_{\alpha\alpha}^2 - Sp\hat{Q}^2\right] \sim \cos 4\varphi$ дает анизотропию

•3) d.-d. dots $\to K_4^{qq} = -\frac{35}{24}\frac{Q^2}{V_0}\sum_n \frac{\cos 4\varphi_{\vec{R}_n}}{R_n^5}$, $W_m^{qq}(\varphi_0) = \frac{1}{8}\frac{Q^2}{V_0}\sum_n R_n^{-5} + K_4^{qq}\cos 4\varphi_0$
(с чьей-либо $\vec{M}_S$)

•4) „vortex" dots, $Q_{\alpha\beta} = 0 + O(S^2)$, $S \sim H$ – смещение центра „vortex" в поле

K_4 если и возникает, то $K_4 \sim Q^2 \sim S^4$ пренебрежимо мало в рамках модели идеального „vortex"

•5) „buckle" dots, $\langle\vec{M}\rangle_{V_d} \neq 0$, а $Q_{\alpha\beta}$ не считал.

•6) double „vortex" dots – не рассматривал (double „vortex" = double „buckle" если центр вихря вне дефекта)
(обнаруженные by T. Pottier)

$Q_{dd} = 2\int_{V_d} d^3\vec{r}\left[3M_d x_d - (\vec{M}\cdot\vec{r})\right]$ определ. анизотропию м. энергии,

ведь $K_4 \sim \left[2\sum_\alpha Q_{\alpha\alpha}^2 - Sp(\hat{Q}^2)\right]$.

Если $\alpha\beta \neq 2$, то $K_4 \sim \left[2\sum_\alpha Q_{\alpha\alpha}^2 - Sp(\hat{Q}^2)\right] = \left[Q_{xx}^2 + Q_{yy}^2 - 2Q_{xy}^2\right]$.

Здесь $V_0 = \frac{V}{N}$, V – объем patterned film, N – число дефектов в пленке. V_0 – объем пленки, приход. на один дефект. Для F-фазы (которая здесь и рассм.) в ячейке всего один дефект, поэтому V_0 = объему ячейки.

Date. . .

8/V Денежные Annual report. 9/V Выстат, APL'00, ее сопротивление и Fax report.
10/V Подготовка и подача application на конф. 6 KIAS. Звонила Лара - ч'то
11/V Чтение новых статей. Распечат Hn, Han - vortex для Новосиб.
12/V Переписка. Анализ ст. Wittborn - APL'00.

14/V Вернемся к общему описанию и дефов в 2D-решетке
ст 13/I и 6/II.

Энергия намагничения (плотность на ед. объема пл.) взаимодействие 2D-решетки дефов с $\vec{M}_n(\vec{\rho})$

$$W_m = -\frac{1}{2S}\sum_{nn'}\int_{S_n} d^2\vec{\rho}\int_{S_{n'}} d^2\vec{\rho}'\; g_{\alpha\beta}(\vec{R}_n+\vec{\rho};\vec{R}_{n'}+\vec{\rho}')\, M_n^{\alpha}(\vec{\rho})\, M_{n'}^{\beta}(\vec{\rho}')$$

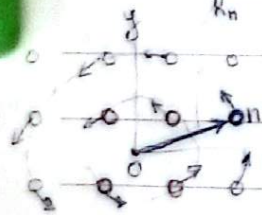
где комп. ФГ $g_{\alpha\beta}(\vec{r},\vec{r}') = -\frac{1}{\pi}\int d^2\vec{k}\; f(kL)\,\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}$ $\vec{k}=(k_x,k_y)$

$\vec{R}_n$ - узлы реш.

Если дефы имеют однород. намагниченность $\vec{M}_n(\vec{\rho}) = \vec{M}_n$, то по внутридефовым $\vec{\rho},\vec{\rho}'$ можно проинтегрировать, то зависимость от номера дефа (узла) "n" остается. Тогда согласно 6/II

$$\rightarrow W_m = 2\pi\frac{R^2}{S}\sum_{nn'} F_{\alpha\beta}(\vec{R}_n-\vec{R}_{n'})\, M_n^{\alpha} M_{n'}^{\beta},\quad F_{\alpha\beta}(\vec{R}) = \int d^2\vec{k}\; f(kL)\,\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\,\frac{J_1^2(kR)}{k^2}\, e^{i\vec{k}\vec{R}}$$

Интересно рассм.: 1) "vortex" конфигурацию по ∞-решетке,
2) модуляционное разложение W_m.



∞-Vortex с центрами между дефами — $\begin{cases} M_n^x = -M_s \sin\varphi_{\vec{R}_n} \\ M_n^y = M_s \cos\varphi_{\vec{R}_n} \end{cases}$

$$\sum_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta M_n^\alpha M_{n'}^\beta = (\vec{k}\cdot\vec{M}_n)(\vec{k}\cdot\vec{M}_{n'}),\quad \vec{k}$$ - здесь параметр интегрирования

$$(\vec{k}\cdot\vec{M}_n) = k(\cos\varphi_{\vec{k}}, \sin\varphi_{\vec{k}})\, M_s\,(-\sin\varphi_{\vec{R}_n}, \cos\varphi_{\vec{R}_n}) = kM_s\sin(\varphi_{\vec{k}}-\varphi_{\vec{R}_n})$$

$$\int d\varphi_{\vec{k}}\, e^{i\vec{k}\vec{R}}(\vec{k}\cdot\vec{M}_n)(\vec{k}\cdot\vec{M}_{n'}) = \int d\varphi_{\vec{k}}\, k^2 M_s^2 \sin(\varphi_{\vec{k}}-\varphi_{\vec{R}_n})\sin(\varphi_{\vec{k}}-\varphi_{\vec{R}_{n'}})\, e^{i\vec{k}(\vec{R}_n-\vec{R}_{n'})}$$

$\sin(\varphi_k-\varphi_{R_n})\sin(\varphi_k-\varphi_{R_{n'}}) = \frac{1}{2}\left[\cos(\varphi_{R_n}-\varphi_{R_{n'}}) - \cos(2\varphi_k-\varphi_{R_n}-\varphi_{R_{n'}})\right]$ и $\int d\varphi_k$

Или $\sum_n (\vec{k}\cdot\vec{M}_n^\alpha)\, e^{i\vec{k}\vec{R}_n} = kM_s\sum_n \sin(\varphi_k-\varphi_{\vec{R}_n})\, e^{i\vec{k}\vec{R}_n} = kM_s\sum_n \sin(\varphi_k-\varphi_{R_n})\, e^{ikR_n\cos\varphi\cdot}$

$= kM_s\sum_n \sin(\varphi_k-\varphi_{R_n})\sum_n i^n J_n(kR_n)\, e^{in(\varphi_k-\varphi_{\vec{R}_n})}$

Escaneado con CamScanner

Date.



М. энергия решётки взаим. диполей в "vortex" состоянии (магнито-vortex – two-dimensional analogue of magnetic skyrmion)

$$W_m = 2\pi\frac{R^2}{S}\sum_{nn'}\int d^2\vec{k}\, f(kL)\,\frac{J_1^2(kR)}{k^4}\,(\vec{k}\cdot\vec{M}_n)(\vec{k}\cdot\vec{M}_{n'})\,e^{i\vec{k}(\vec{R}_n-\vec{R}_{n'})} =$$

$$= 2\pi\frac{R^2}{S}\sum_{nn'}\int dk\,k\int d\varphi_{\vec{k}}\, f(kL)\,\frac{J_1^2(kR)}{k^4}\,k^2M_s^2\sin(\varphi_{\vec{k}}-\varphi_{\vec{R}_n})\sin(\varphi_{\vec{k}}-\varphi_{\vec{R}_{n'}})\,e^{i\vec{k}(\vec{R}_n-\vec{R}_{n'})} =$$

$$= 2\pi M_s^2\frac{R^2}{S}\sum_{nn'}\int_0^\infty\frac{dk}{k}f(kL)J_1^2(kR)\int_0^{2\pi}d\varphi_{\vec{k}}\,\sin(\varphi_{\vec{k}}-\varphi_{\vec{R}_n})\,e^{i\vec{k}\vec{R}_n}\sin(\varphi_{\vec{k}}-\varphi_{\vec{R}_{n'}})\,e^{-i\vec{k}\vec{R}_{n'}}$$

$$J_k^{nn'}$$

$$J_k^{nn'} = \int d\varphi_{\vec{k}}\,\sin(\varphi_k-\varphi_{R_n})\sin(\varphi_k-\varphi_{R_{n'}})\sum_\mu i^\mu J_\mu(kR_n)\,e^{i\mu(\varphi_{\vec{k}}-\varphi_{\vec{R}_n})}\sum_{\mu'}i^{\mu'}J_{\mu'}(kR_{n'})e^{-i\mu'(\varphi_{\vec{k}}-\varphi_{\vec{R}_{n'}})} =$$

$$= \sum_{\mu\mu'}(-1)^{\mu'}i^{\mu+\mu'}J_\mu(kR_n)J_{\mu'}(kR_{n'})\int d\varphi_{\vec{k}}\,\frac{1}{2}\left[\cos(\varphi_{R_n}-\varphi_{R_{n'}})-\cos(2\varphi_k-\varphi_{R_n}-\varphi_{R_{n'}})\right]\times$$

$$\times e^{i(\mu-\mu')\varphi_{\vec{k}}}e^{-i\mu\varphi_{R_n}}e^{i\mu'\varphi_{R_{n'}}} = \sum_{\mu\mu'}(-1)^{\mu'}i^{\mu+\mu'}J_\mu J_{\mu'}e^{-i\mu\varphi_n}e^{i\mu'\varphi_{n'}}\times$$

$$\times\frac{1}{2}\int_k\left[\cos(\varphi_n-\varphi_{n'})(2\pi\delta_{\mu\mu'})-\cos2\varphi_k\cos(\varphi_n+\varphi_{n'})-\sin2\varphi_k\sin(\varphi_n+\varphi_{n'})\right]e^{i(\mu-\mu')\varphi_{\vec{k}}}$$

$$\int d\varphi_k\cos2\varphi_{\vec{k}}\,e^{ip\varphi_k} = \frac{1}{2}\int d\varphi_k\left(e^{i2\varphi_k}+e^{-i2\varphi_k}\right)e^{ip\varphi_k} = \pi\left(\delta_{p,-2}+\delta_{p,2}\right)$$

$$\int d\varphi_k\sin2\varphi_k e^{ip\varphi_k} = \frac{1}{2i}\int d\varphi_k\left(e^{i2\varphi_k}-e^{-i2\varphi_k}\right)e^{ip\varphi_k} = \frac{\pi}{i}\left(\delta_{p,-2}-\delta_{p,2}\right) = i\pi\times$$

$$\times\left(\delta_{p,2}-\delta_{p,-2}\right)$$

$$J_k^{nn'} = \sum_{\mu\mu'}a_{\mu\mu'}\frac{1}{2}\left[\cos(\varphi_n-\varphi_{n'})\,2\pi\delta_{\mu\mu'}-\cos(\varphi_n+\varphi_{n'})\,\pi\left(\delta_{\mu-\mu',-2}+\delta_{\mu-\mu',2}\right)-\right.$$

$$\left.-\sin(\varphi_n+\varphi_{n'})\,i\pi\left(\delta_{\mu-\mu',2}-\delta_{\mu-\mu',-2}\right)\right] = \frac{\pi}{2}\sum_{\mu\mu'}a_{\mu\mu'}\left[2\delta_{\mu\mu'}\cos(\varphi_n-\varphi_{n'})-\right.$$

$$\left.-\delta_{\mu-\mu',2}\,e^{i(\varphi_n+\varphi_{n'})}-\delta_{\mu-\mu',-2}\,e^{-i(\varphi_n+\varphi_{n'})}\right],\quad a_{\mu\mu'} = (-1)^{\mu'}i^{\mu+\mu'}J_\mu J_{\mu'}^{(\cdot)}e^{-i\mu\varphi_n}e^{i\mu'\varphi_{n'}}$$

$$W_m = 2\pi M_s^2\frac{R^2}{S}\sum_{nn'}\int\frac{dk}{k}f(kL)J_1^2(kR)\,J_k^{nn'} = (\cdot)\sum_{nn'}\int\frac{dk}{k}f(kL)\,J_1^2(kR)\times$$

$$\times\frac{\pi}{2}\sum_\mu\left[2\cos(\varphi_n-\varphi_{n'})\,a_{\mu\mu}-e^{i(\varphi_n+\varphi_{n'})}a_{\mu,\mu-2}-e^{-i(\varphi_n+\varphi_{n'})}a_{\mu,\mu+2}\right]$$

$$e^{i\psi}a_{\mu,\mu-2}+e^{-i\psi}a_{\mu,\mu+2} = e^{i\psi}(-1)^\mu i^{2\mu-2}J_\mu J_{\mu-2}(\cdot)e^{-i\mu\varphi_n}e^{i(\mu-2)\varphi_{n'}}+$$

$$+e^{-i\psi}(-1)^\mu i^{2\mu+2}J_\mu J_{\mu+2}(\cdot)e^{-i\mu\varphi_n}e^{i(\mu+2)\varphi_{n'}} = -e^{i\psi}J_\mu J_{\mu-2}(\cdot)e^{-i\mu(\varphi_n-\varphi_{n'})}e^{-i2\varphi_{n'}}-$$

$$-e^{-i\psi}J_\mu J_{\mu+2}(\cdot)e^{-i\mu(\varphi_n-\varphi_{n'})}e^{i2\varphi_{n'}} = -J_\mu e^{-i\mu(\varphi_n-\varphi_{n'})}\left[e^{i(\varphi_n+\varphi_{n'})}J_{\mu-2}(\cdot)e^{-i2\varphi_{n'}}+\right.$$

$$\left.+e^{-i(\varphi_n+\varphi_{n'})}J_{\mu+2}(\cdot)e^{i2\varphi_{n'}}\right] = -J_\mu e^{-i\mu(\varphi_n-\varphi_{n'})}\left[J_{\mu-2}(\cdot)e^{i(\varphi_n-\varphi_{n'})}+J_{\mu+2}(\cdot)e^{-i(\varphi_n-\varphi_{n'})}\right]$$

$$W_m = 2\pi M_s^2\frac{R^2}{S}\frac{\pi}{2}\sum_{nn'}\int\frac{dk}{k}f(kL)J_1^2(kR)\sum_\mu\left[2\cos(\varphi_n-\varphi_{n'})J_\mu(kR_{n'})+J_{\mu-2}(kR_{n'})e^{i(\varphi_n-\varphi_{n'})}+J_{\mu+2}(\cdot)e^{-i(\varphi_n-\varphi_{n'})}\right]\times$$

$$\times J_\mu(kR_n)e^{-i\mu(\varphi_n-\varphi_{n'})}$$

Escaneado con CamScanner

Date.

$$\sum_{nn'} J_\mu J_{-\mu}(\theta)\cos(\varphi_n-\varphi_{n'})\,e^{-i\mu(\varphi_n-\varphi_{n'})}=\sum_{nn'}J_\mu J_{-\mu}(\theta)\cos\mu(\varphi_n-\varphi_{n'})$$

$$\sum_{nn'}\sum_{\mu}\left[J_{\mu-2}(kR_n)J_\mu(kR_{n'})e^{-i(\mu-1)(\varphi_n-\varphi_{n'})}+J_{\mu+2}(kR_n)J_\mu(kR_{n'})e^{-i(\mu+1)(\varphi_n-\varphi_{n'})}\right]$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{в первом } \Sigma(\cdot)\ n\to n'\\ \mu+2\to\mu\end{array}\right|=\sum_{nn'}\sum_{\mu}\left[J_\mu(kR_n)J_{\mu+2}(kR_{n'})e^{-i(\mu+1)(\varphi_{n'}-\varphi_n)}+\right.$$

$$\left.+J_{\mu+2}(kR_{n'})J_\mu(kR_n)e^{i(\mu+1)(\varphi_n-\varphi_{n'})}\right]=2\sum_{nn'}\sum_{\mu}J_\mu(kR_n)J_{\mu+2}(kR_{n'})\cos(\mu+1)(\varphi$$

$$W_m=2\pi^2M_s^2\frac{k^2}{S}\int\frac{dk}{k}f(kL)J_1^2(kR)\sum_{nn'}\sum_{\mu}\left[J_\mu(kR_n)J_\mu(kR_{n'})\cos(\varphi_n-\varphi_{n'})\cos\mu(\varphi_n-\varphi_{n'})+\right.$$

$$\left.+J_\mu(kR_n)J_{\mu+2}(kR_{n'})\cos(\mu+1)(\varphi_n-\varphi_{n'})\right],\quad \varphi_n=\varphi_{\vec R_n}$$

$$\cos(\varphi_n-\varphi_{n'})\cos\mu(\varphi_n-\varphi_{n'})=\frac12\left[\cos(\mu-1)(\varphi_n-\varphi_{n'})+\cos(\mu+1)(\varphi_n-\varphi_{n'})\right]=$$

$$=\frac12\left[\cos(\mu-1)\varphi_n\cos(\mu-1)\varphi_{n'}+\sin(\mu-1)\varphi_n\cdot\sin(\mu-1)\varphi_{n'}+\cos(\mu+1)\varphi_n\cos(\mu+1)\varphi_{n'}+\right.$$

$$\left.+\sin(\mu+1)\varphi_n\cdot\sin(\mu+1)\varphi_{n'}\right]$$

Дано: $\sum_n F(R_n)\cos(p\varphi_{R_n})\neq 0$ при $p=4l$, $l=0,1,2,\dots$. $\sum_n F(R_n)\sin(p\varphi_{R_n})=0$

$$\sum_{nn'}\sum_{\mu}[\dots]=\sum_{nn',\mu}J_\mu(kR_n)\left[J_\mu(kR_{n'})\frac12\left(\cos(\mu-1)\varphi_n\cos(\mu-1)\varphi_{n'}+\cos(\mu+1)\varphi_n\cos(\mu+1)\varphi_{n'}\right)\right.$$

$$\left.+J_{\mu+2}(kR_{n'})\left(\cos(\mu+1)\varphi_n\cos(\mu+1)\varphi_{n'}\right)\right]=\sum_{nn'}\sum_{\mu}\left[\frac12J_{\mu+2}(kR_n)J_{\mu+2}(kR_{n'})+\right.$$

$$\left.+\frac12J_\mu(kR_n)J_\mu(kR_{n'})+J_\mu(kR_n)J_{\mu+2}(kR_{n'})\right]\cos(\mu+1)\varphi_n\cdot\cos(\mu+1)\varphi_{n'}=$$

$$=\sum_{nn'\mu}\frac12\left[J_{\mu+1}(kR_n)J_{\mu+1}(kR_{n'})+J_{\mu-1}(kR_n)J_{\mu-1}(kR_{n'})+2J_{\mu-1}(kR_n)J_{\mu+1}(kR_{n'})\right]\cos\mu\varphi_n\cos$$

$$=\frac12\sum_{nn'\mu}\left[J_{\mu+1}(kR_n)+J_{\mu-1}(kR_n)\right]\left[J_{\mu+1}(kR_{n'})+J_{\mu-1}(kR_{n'})\right]\cos\mu\varphi_n\cos\mu\varphi_{n'}=$$

$$=\frac12\sum_{nn'\mu}\left(\frac{2\mu}{kR_n}\right)J_\mu(kR_n)\left(\frac{2\mu}{kR_{n'}}\right)J_\mu(kR_{n'})\cos\mu\varphi_n\cdot\cos\mu\varphi_{n'}=\frac{2}{k^2}\sum_{nn'\mu}\frac{J_\mu(kR_n)J_\mu(kR_{n'})}{R_nR_{n'}}\mu^2\cos(\mu$$

$$=\frac{4}{k^2}\sum_{\substack{nn'\\ \mu>0}}\frac{1}{R_nR_{n'}}\mu^2\cos\mu\varphi_n\cdot\cos\mu\varphi_{n'}J_\mu(kR_n)J_\mu(kR_{n'})=\frac{4}{k^2}\sum_{\mu>0}\mu^2\left(\sum_n\frac{J_\mu(kR_n)}{R_n}\cos\mu\varphi_n\right)^2$$

$$W_m=8\pi^2M_s^2\frac{k^2}{S}\int_0^\infty\frac{dk}{k^3}f(kL)J_1^2(kR)\sum_{\mu>0}\mu^2S_\mu^2(k),\quad S_\mu(k)=\sum_n\frac{J_\mu(kR_n)}{R_n}\cos\mu\varphi_n$$

φ_n - намоточная энергия со-vortex решетки конечных ими. голов - hom dots

$R_n>R$ и $R_n^{min}=\frac{\sqrt2}{2}T=\frac{\sqrt2}{2}(2R+d)$. $\int\frac{dk}{k^3}f(kL)J_1^2(kR)J_\mu(kR_n)J_\mu(kR_{n'})$ по k

~~Дано $S_\mu(k)$ $\mu=4,8,\dots$, но $S_\mu(k)=\sum_n\frac{J_\mu(kR_n)}{R_n}\cos\mu\varphi_{R_n}$ сходится медленно.~~

→ Видно, что W_m (vortex-решетки) >0 для конечных R,L (когда как 15-17/XII 93г. $W_m^{\mu=0}$

Escaneado con CamScanner

$\int_0^{2\pi} d\varphi_k e^{i k \Delta} = 2\pi J_0(k\Delta)$

Date. 15.05 . $\Delta = R_n - R_{n'} \geq 2R$

Окончательно: в пределе малых $1/kR \ll 1$: $F_{\alpha\beta}(\Delta) = \frac{\partial^2}{\partial x_n^\alpha \partial x_{n'}^\beta} \int d^2k \frac{f(kL)}{k^2}$,

$\frac{J_1^2(kR)}{k^2} e^{ik\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} \int \frac{dk}{k} f(kL) \frac{J_1^2(kR)}{k^2} \int d\varphi_k e^{ik\Delta} = 2\pi \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} \int \frac{dk}{k} f(kL) \frac{J_1^2(kR)}{k^2} J_0(k\Delta) =$

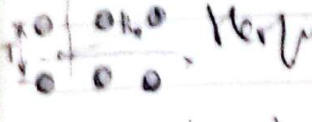
$= \left[\frac{1}{kR} \to 0\right] = 4\pi \frac{\partial^2}{\partial x_n^\alpha \partial x_{n'}^\beta} \int_0^\infty dk \frac{J_1^2(kR)}{k^2} J_0(k\Delta) = \pi L \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha} \int_0^\infty dk \frac{J_1^2(kR)}{k} (-1) J_1(k\Delta) \frac{\partial \Delta}{\partial x_{n'}^\beta} =$

$= -\pi L \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x_{n'}^\beta}\right) \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha} \int_0^\infty \frac{dk}{k} J_1^2(kR) J_1(k\Delta) = -\frac{\pi L}{2} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x_n^\alpha}\right)\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x_{n'}^\beta}\right) \int_0^\infty dk\, J_1^2(kR) \left[J_0(k\Delta) - J_2(k\Delta)\right]$

$\frac{\partial \Delta}{\partial x_n^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha} |\vec{R}_n - \vec{R}_{n'}| = \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha} \sqrt{(x_n^\alpha - x_{n'}^\alpha)^2 + \dots} = \frac{1}{2\sqrt{(\cdot)}} 2(x_n^\alpha - x_{n'}^\alpha) = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta}$

$F_{\alpha\beta}(\Delta) = -\frac{1}{2}\pi L \frac{\Delta_\alpha \Delta_\beta}{\Delta^2} \int dk\, J_1^2(kR) \left[J_0(k\Delta) - J_2(k\Delta)\right]$ при $\alpha \neq \beta$

(Вернемся снова к задаче о дифракции. Решение)



Нетрудно видеть, что $\frac{R_n}{R} = \sqrt{(n_1 - \frac{1}{2})^2 + (n_2 - \frac{1}{2})^2}\left(2 + \frac{d}{R}\right) \geq \sqrt{2}$, 15/V

где $n = (n_1, n_2)$, n_1, n_2 – целые числа. $t = kR$, $\beta = L/R$. $R_n/R \gg 1$ $\forall n \neq 0$.

$J_\mu\left(\frac{R_n}{R} t\right) \approx \sqrt{\frac{2R}{\pi t R_n}} \cos\left[\frac{R_n}{R} t - \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] = \sqrt{\frac{2R}{\pi t R_n}} \cos\left(\frac{R_n}{R} t - \frac{\pi}{4}\right)$ $\mu = 4, 8, \dots$

$S_\mu(k) = \sum_n \frac{J_\mu(kR_n)}{R_n} \cos\mu\varphi_{R_n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_n \frac{1}{R_n^{3/2}} \cos\left(kR_n - \frac{\pi}{4}\right) \cos\mu\varphi_{R_n}$ –

– даже расположение кривых к расход. интерферу не к при $k \to 0$.

Далее. $\mathcal{J}_k^{nn'} = \int_0^{2\pi} d\varphi_k \sin(\varphi_k - \varphi_n) e^{i\vec{k}\vec{R}_n} \sin(\varphi_k - \varphi_{n'}) e^{-i\vec{k}\vec{R}_{n'}} = \left|\vec{k}\vec{R}_n = kR_n \cos(\varphi_k - \varphi_n)\right| =$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi_k \sin(\varphi_k - \varphi_n) \sin(\varphi_k - \varphi_{n'}) e^{-i\vec{k}\vec{\Delta}} = \int d\varphi_k \frac{1}{2}\left[\cos(\varphi_n - \varphi_{n'}) - \cos(2\varphi_k - \varphi_n - \varphi_{n'})\right] \times$

$\times \sum_\mu i^\mu e^{i\mu(\varphi_k - \varphi_\Delta)} J_\mu(k\Delta) = \frac{1}{2} \int d\varphi_k \left[\cos(\varphi_n - \varphi_{n'}) - \cos 2\varphi_k \cos(\varphi_n + \varphi_{n'}) - \sin 2\varphi_k \sin(\varphi_n + \varphi_{n'})\right] \times$

$\times \sum_\mu i^\mu e^{i\mu(\varphi_k - \varphi_\Delta)} J_\mu(k\Delta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\varphi_n - \varphi_{n'}) 2\pi J_0(k\Delta) - \cos(\varphi_n + \varphi_{n'}) \sum_\mu i^\mu e^{i\mu(-\varphi_\Delta)} J_\mu \times\right.$

$\left. \times \pi\left\{\delta_{\mu,-2} + \delta_{\mu,2}\right\} - \sin(\varphi_n + \varphi_{n'}) \sum_\mu i^\mu e^{-i\mu\varphi_\Delta} (i\pi)\left\{\delta_{\mu,2} - \delta_{\mu,-2}\right\} J_\mu\right] =$

$= \frac{1}{2}\pi\left[2\cos(\varphi_n - \varphi_{n'}) J_0(k\Delta) - \cos(\varphi_n + \varphi_{n'})\left\{(-1) e^{i2\varphi_\Delta} J_2 + (-1) e^{-i2\varphi_\Delta} J_2\right\} - \sin(\varphi_n + \varphi_{n'}) i \times\right.$

$\left. \times J_2 (-1)\left\{e^{-i2\varphi_\Delta} - e^{i2\varphi_\Delta}\right\}\right] = \pi\left[\cos(\varphi_n - \varphi_{n'}) J_0(k\Delta) + J_2(k\Delta)\cos(\varphi_n + \varphi_{n'})\cos 2\varphi_\Delta +\right.$

$\left. + J_2(k\Delta)\sin(\varphi_n + \varphi_{n'})\sin 2\varphi_\Delta\right] = \pi\left[J_0(k\Delta)\cos(\varphi_n - \varphi_{n'}) + J_2(k\Delta)\cos(\varphi_n + \varphi_{n'} - 2\varphi_\Delta)\right]$

$W_m = 2\pi^2 M_s^2 \frac{R^2}{S} \sum_{nn'} \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(kL) \cdot J_1^2(kR)\left[J_0(k\Delta)\cos(\varphi_n - \varphi_{n'}) + J_2(k\Delta)\cos(\varphi_n + \varphi_{n'} - 2\varphi_\Delta)\right]$ →

Escaneado con CamScanner

Date. . .

интеграл по k пропал, но $\sum_{nn'}(\cdot)$ осталась ну-да $\Delta = \Delta_{nn'} = |\vec{R}_n - \vec{R}_{n'}|$, $\varphi_\Delta = \varphi_{\Delta_{nn'}}$ есть угол между векторами $\vec{R}_n, \vec{R}_{n'}$.

Устремим нижний предел интегрирования $l \to 0$, $R \to \infty$:

$$W_{nn} = 2\pi^2 M_S^2 \frac{R^2}{S} \sum_{nn'} \left[\int \frac{dk}{k} \left(\frac{1}{2} kl\right) \left(\frac{1}{2} kR\right)^2 \left[J_0(k\Delta)\cos(\cdot) + J_2(k\Delta)\cos(\cdot\cdot) \right] \right] =$$

$$= \left| \int_0^\infty dk\, J_\nu(k\Delta) = \frac{1}{\Delta}, \nu = -1 \right| = \frac{\pi^2}{4} M_S^2 \frac{R^2 l}{S} \int_0^\infty dk\, k^2 \left[J_0(k\Delta)\cos(\cdot) + J_2(k\Delta)\cos(\cdot\cdot) \right] - R^2 \text{ сход}$$

Расчет. $\sum_n \sin(\varphi_k - \varphi_n) e^{i\vec{k}\vec{R}_n}$, $\varphi_k \in [0, 2\pi]$. Вместо $\sum_n$, в конечном $\int d^2\vec{r}$.

$\varphi_k = 0 \Rightarrow \sum_n \sin\varphi_n e^{ikR_n \cos\varphi_{R_n}} \sim \sum_n y_n e^{ikx_n} = 0$ в силу сим. $\vec{R}_n \to -\vec{R}_n$.

$$\mathcal{Z}(\vec{k}) = \sum_n \sin(\varphi_k - \varphi_n) e^{i\vec{k}\vec{R}_n} = \sum_n \left[\sin\varphi_k \cos\varphi_n - \cos\varphi_k \sin\varphi_n \right] e^{ikR_n(\cos\varphi_k\cos\varphi_n + \sin\varphi_k\sin\varphi_n)} =$$

$$= \sum_n \frac{1}{R_n} \left[\sin\varphi_k x_n - \cos\varphi_k y_n \right] e^{ik\cos\varphi_k x_n} e^{ik\sin\varphi_k y_n} = \sum_n \frac{1}{R_n} \left[\sin\varphi_k \cos(k_y y_n) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot x_n i\sin(k_x x_n) - \cos\varphi_k \cos(k_x x_n) y_n i\sin(k_y y_n) \right] =$$

$$= i \sum_n \frac{k^{-1}}{R_n} \left[k_y \cos(k_y y_n) \sin(k_x x_n) x_n - k_x \cos(k_x x_n) \sin(k_y y_n) y_n \right]$$

$$\to W_{nn} = 2\pi M_S^2 \frac{R^2}{S} \int d^2\vec{k} f(kl) \frac{J_1^2(kR)}{k^2} |\mathcal{Z}(\vec{k})|^2, \quad \mathcal{Z}(\vec{k}) = \sum_n \sin(\varphi_k - \varphi_n) e^{i\vec{k}\vec{R}_n} -$$

– аналог "структурного фактора дискретной решетки"

$$|\mathcal{Z}(\vec{k})|^2 = \sum_{nn'} \frac{1}{k^2 R_n R_{n'}} \left[k_y x_n \cos(k_y y_n) \sin(k_x x_n) - k_x y_n \cos(k_x x_n) \sin(k_y y_n) \right] \cdot$$

$$\cdot \left[k_y x_{n'} \cos(k_y y_{n'}) \sin(k_x x_{n'}) - k_x y_{n'} \cos(k_x x_{n'}) \sin(k_y y_{n'}) \right] =$$

$$= \frac{1}{k^2} \sum_{nn'} \frac{1}{R_n R_{n'}} \left[k_y^2 x_n x_{n'} \cos(k_y y_n) \cos(k_y y_{n'}) \sin(k_x x_n) \sin(k_x x_{n'}) - \right.$$

$$- k_x k_y y_n x_{n'} \cos(k_x x_n) \cos(k_y y_{n'}) \sin(k_y y_n) \sin(k_x x_{n'}) + k_x^2 y_n y_{n'} \cos(k_x x_n) \cos(k_x x_{n'}) \sin(k_y y_n) \sin(k_y y_{n'})$$

$$\left. - k_x k_y x_n y_{n'} \cos(k_y y_n) \cos(k_x x_{n'}) \sin(k_x x_n) \sin(k_y y_{n'}) \right] = \left| \begin{array}{l} \text{можем } n \rightleftarrows n' \text{ под } \sum_{nn'}(\cdot) \\ \text{и } k_x \rightleftarrows k_y \text{ под } \int d^2\vec{k}(\cdot) \\ \text{и } x_n \rightleftarrows y_n \text{ для кв. реш.} \end{array} \right.$$

$$\mathcal{Z}(\vec{k}) = \sum_n \sin(\varphi_k - \varphi_n) \sum_\mu i^\mu e^{i\mu(\varphi_k - \varphi_n)} J_\mu(kR_n) =$$

$$= \sum_{\mu,n} i^\mu J_\mu(kR_n) \left[\sin\varphi_k \cos\varphi_n - \cos\varphi_k \sin\varphi_n \right] \left[\cos\mu\varphi_n - i\sin\mu\varphi_n \right] e^{i\mu\varphi_k} -$$

даст нравится сферы по μ в силу сим. квадрат решетки.

Видно $\int d\varphi_k |\mathcal{Z}(\vec{k})|^2 \sim \sum_{\mu>0} \mu^2 S_\mu^2(k)$ от 14/V

Сравнение $\chi_{initial}$ и H_n с эксп. Новосада

Date. 16 . 05 .

Сравнение с эксп. Новосада по χ, H_n, H_{an} FeNi цил. изолир. доменов.

→ $L_1 = 60$ nm, $2R = 0,2$; $0,4$; $0,6$ и $0,8$ μm. (May2 серия)

$d = 0,8$ μm

Согласие расчета с эксп. хорошее

χ_{init}	$2R$, μm	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,8	1 μm
	β	1,2	0,6	0,4	0,3	0,2	0,15	0,12
	$\chi_{эксп.}$	-	0,302	-	0,516	0,847	1,25	
$\chi_{isol} = \chi_{calc}$		(0,446) $^{0,399}_{0,404}$		(0,830) $^{0,602}_{0,613}$		(1,22) $^{0,780}_{0,812}$	(1,62) $^{0,967}_{1,006}$	

0,967 — isolated dot

1,006 — после поправки на interdot coupl.

Для изолир. цил. доменов согласно 10-11/IV $\langle \vec{M} \rangle_V = \frac{1}{2a}\vec{H}$, или $\chi_{isol} = \frac{1}{2a}$,

где $2a = 4\pi F(\beta) - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2$ в модели „жесткого" вихря, $F(\beta) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} f(\beta t) J_1^2(t)$

Для FeNi $R_0 = 18$ nm. $\quad 2a(\beta, R) = 4\pi F(\beta) - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2$

Для $2R = 0,8$ μm и $2R = 0,6$ μm $\frac{d}{R} = 2$ и $2,67$, соответственно.

Т.е. можно сделать поправку на interdot coupling – см. 14/IV.

$\chi_{int} = \frac{\chi_{is}}{1 - \lambda \chi_{is}}$, $\lambda = \lambda(\beta, d/R)$ быстро падает с $\left(\frac{d}{R}\right)$, но расет с β.

(grain Rounda-vortex.mcd)

$\lambda(\beta = 0,15;\ d/R = 2) = 0,040$ или $\chi_{int}(\beta = 0,15;\ d/R = 2) = 1,006$ — $d = 0,8$ μm

$\lambda(\beta = 0,20;\ d/R = 2,67) = 0,035$ или $\chi_{int}(\beta = 0,20;\ d/R = 2,67) = 0,819$

($M_s = 800$ G, $L = 60$ nm) May3

$L = 60$ nm	R, nm	50	100	150	200	300	400	500	H_{nucl}
→	$\beta = L/R$	1,2	0,6	0,4	0,3	0,2	0,15	0,12	
	$H_{nucl}^{эксп.}$		1520		700	350	250 (250-June26)		
$H_n = H_{nucl}^{calc}$		580	480 (580)	360	285 (310)	200 (210)	150 (160)	125	

более менее согласие для малых β

или

Nucleation of vortex

Corr. 3/V: $\frac{1}{M_s} H_n = h_{sB}(\beta, R) = 4\left[F_B(\beta) - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2\right]$, $F_B(\beta) = \pi \int \frac{dt}{t} f(\beta t)\left[J_1^2(t) - J_2^2(t)\right]$

↑ малый член, т.к. $R_0(FeNi) \approx 18$ nm.

H_n в табл. дана без члена $(R_0/R)^2$ – в скобках (·). С этим членом – горизонт. для малых β разница мала.

→ Ошибку в расчете h_{sB} „buckle" dot от 31/III и 3/V не нашел.

И все же h_{sB} от 3/V слишком мало для описания эксп.

Может s.-d. состояние терять устойчивость по отношению не к „buckle" с $\varphi_0 \ll 1$, а к другому неоднород. состоянию, имеющему объемное H_{nucl}? Это многочл. inhom. состояние более локально, чем „buckle", захватывающее все dot?

(См. числ. расчет Новосада, присланный 19/VIII 00 г.)

Будет ближе к „buckle"

Escaneado con CamScanner

Date. 17 · 05 ·

А как найти поле Hannibal = H_{an} для "vortex" дома?

Согласно II/IV равновесное состояние цилиндра "песочного" вихря.

В поле $H \parallel M_s$: $\frac{S}{R} = \frac{1}{2a}\frac{dl}{M_s}$, $\left(\frac{dl}{M_s}\right)^3$ — поле разбивки энергий Single-domain и "полей" от ядер $h_- = 2a - \sqrt{4a^2 - \Delta \cdot 4a}$, $\Delta = W^{s.d.}(h=0) - W^{v.d}(h=0) > 0$

Грубую оценку H_{an} получим беря $S = R$ (это за пределами TB $S \ll 1$), тогда где $\frac{H_{an}}{M_s} = 2a = 4\pi F(\beta) - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2$, тогда как целое грубое

$$\frac{1}{M_s}\delta H_n = 4\left[F_\delta(\beta) - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2\right] = 4\pi F(\beta) - 4\pi\int\frac{dt}{t}f(\beta t)J_2^2(t) - 4\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 < H_{an}$$

По просьбе Новосада посчитаем δH_n для $L = 40$ nm, $M_s = 800$ G

Hannibal

2R, nm	200	250	300	350	400	500	600	800	1000 = 1 μm	100
β	0,4	0,32	0,267	0,229	0,20	0,160	0,133	0,10	0,08	0,8
$\delta H_n(\beta,R)/M_s$	260	230	200	180	150	130	100	80	≈ 320	

300 (May 13)

Hannibal — $M_s = 800$G, $L = 60$ nm (May 2) — $4\pi M_s = 4\pi \cdot 800 = 10050$; 10,05 kG

R, nm	50	100	150	200	300	400	500
R/L	1,67	3,33	5,0	6,67			
β = 4R/L	1,2	0,6	0,4	0,3	0,2	0,15	0,12
H_{an}^{exc}, Э	—	2170	—	1200	1000	750 (500 — June 26)	—
Грубо H_{an}^{calc}, Э	2850	2030	1590	1330	1020	830	700 — Немного согл. с эксп.
Точно H_{an}^{calc}, Э							См. 19/VIII 002.
$H_{an}^{exc}(Э)/(4\pi M_s)$	0,216		0,119		0,0995	0,075	

Попробуем для уточнения Hannibal, отказавшись от предела $\frac{S}{R} \ll 1$, но сохранив модель "песочного" доменного вихря.

Полная энергия single-domain "vortex"

$$W(S) = W_{ex}(S) + W_m(S) + W_H(S)$$

$$W_{ex}(S) = 2\pi CL + \frac{1}{2}CL\int_0^{2\pi}d\varphi\,\ln\left[\frac{S}{R}\cos\varphi + \frac{R}{R}\sqrt{1 - \frac{S^2}{R^2}\sin^2\varphi}\right], \quad R_0^2 = C/M_s^2, \ R - \text{радиус цилиндра}$$

$$\frac{1}{M_s^2 V_d}W_{ex}(S) = 2\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 + \left(\frac{R_0}{R}\right)^2\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\,\ln\left[\frac{S}{R}\cos\varphi + \frac{R}{R}\sqrt{1 - \frac{S^2}{R^2}\sin^2\varphi}\right]$$

W_m состоит из $W_m^{бок}$, $W_m^{торцы}$ и $W_m^{\delta r}$. $W_m^{\delta r} = 0$ (7/IV), $W_m^{торцы}$ не зависит от S, пока "облако" не касается края диска $S = R$

$$\frac{W_m^{\delta}(S)}{(7/IV)} = \frac{1}{2}M_s^2 S^2 R^2\int_0^L dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int dz'\int d\varphi'\,\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\,\frac{\sin\varphi}{\sqrt{R^2 + S^2 + 2SR\cos\varphi}}\,\frac{\sin\varphi'}{\sqrt{R^2 + S^2 + 2SR\cos\varphi'}}$$

$(\beta = R, \beta' = R)$

Date. . . Полная энергия shifted vortex" для любых s"/R, но в модели "плоского" вихря W(s)

$$= \frac{1}{2}(\cdot)\int_0^L dz dz' \int_0^{2\pi} d\varphi \int d\varphi' \frac{\sin\varphi}{\sqrt{(\cdot)}} \frac{\sin\varphi'}{\sqrt{(\cdot)}} \sum_\mu \int dk\, e^{-k|z-z'|} e^{i\mu(\varphi-\varphi')} J_\mu^2(kR) =$$

$$= \frac{1}{2} M_s^2 s^2 R^2 \cdot 2L \int d\varphi d\varphi' \frac{\sin\varphi}{\sqrt{R^2+s^2+2sR\cos\varphi}} \frac{\sin\varphi'}{\sqrt{R^2+s^2+2sR\cos\varphi'}} \sum_\mu \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(kL) e^{i\mu(\varphi-\varphi')} J_\mu^2(kR)$$

Опр. $I_\mu(s) = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\sin\varphi \cdot e^{i\mu\varphi}}{\sqrt{R^2+s^2+2sR\cos\varphi}}$ — похожи на $I_\mu(\varphi_0)$ из модели "buckle" Дома 31/III

Раньше (7/IV) а образ $I_\mu(s\ll 1) = \frac{1}{R}\int_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi e^{i\mu\varphi} = \frac{i\pi}{R}(\delta_{\mu 1} - \delta_{\mu,-1})$.

$$\frac{1}{M_s^2 V_d} W_m^\delta(s) = \frac{s^2}{\pi} \sum_\mu |I_\mu(s)|^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(kL) J_\mu^2(kR)$$

Два представления W_H, от 9/IV и 10/IV:

$$\frac{1}{M_s^2 V_d} W_H(s) = -\left(\frac{H}{M_s}\right) \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R d\rho\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{[s-\rho\cos\varphi]}{\sqrt{\rho^2+s^2-2s\rho\cos\varphi}} \quad \text{и}$$

$$W_H(s) = -V_d H\left[\langle M_x\rangle_{S_d}\cos\varphi_H + \langle M_y\rangle_{S_d}\sin\varphi_H\right] = -V_d H \frac{1}{S_d}\frac{1}{2} M_s \left[-\int_0^{2\pi} d\varphi \rho_+^2(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi_H + \right.$$

$$\left. + \sin\varphi_H \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi \rho_+^2(\varphi)\right] = -V_d H M_s \frac{1}{2\pi R^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \rho_+^2(\varphi)\sin(\varphi_H-\varphi),$$

где $\rho_+(\varphi) = -s\cos(\varphi-\varphi_s) + \sqrt{s^2\cos^2(\varphi-\varphi_s)+R^2-s^2} = \left|\varphi_s-\varphi_H=\frac{\pi}{2}\right| = -s\cdot\sin(\varphi-\varphi_H) + \sqrt{s^2\sin^2(\varphi-\varphi_H)+R^2-s^2}$

$\rho_+(\varphi) = F(\varphi-\varphi_H)$. $\int_0^{2\pi} d\varphi F_1(\varphi-\varphi_H) = \int_{-\varphi_H}^{2\pi-\varphi_H} d\varphi' F_1(\varphi') = \int_0^{2\pi} d\varphi' F_1(\varphi')$ и не зависит от φ_H как и должно быть физически для периодич.

$$\frac{1}{M_s^2 V_d} W_H(s) = -\left(\frac{H}{M_s}\right)\int_0^{2\pi} d\varphi \rho_+^2(\varphi)\sin(\varphi_H-\varphi)\frac{1}{2\pi R^2} = -\left(\frac{H}{M_s}\right)\frac{1}{2\pi R^2}\int d\varphi\cos\varphi\left[s\cdot\cos\varphi + \right.$$

положим $\varphi_H = 0$ или $\pi/2$

$$\left. + \sqrt{s^2\cos^2\varphi + R^2 - s^2}\right]^2 = -\frac{h}{2\pi R^2}\int_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi\left[s^2\cos^2\varphi + s^2\cos^2\varphi + R^2 - s^2 + \right.$$

$$\left. + 2s\cos\varphi\sqrt{R^2 - s^2\sin^2\varphi}\right] = \left|\begin{array}{l}\text{все члены}\\ \text{сначал. обн. } \cos\varphi = 0\end{array}\right| = -\frac{hs}{\pi R^2}\int_0^{2\pi} d\varphi\cos^2\varphi\sqrt{R^2 - s^2\sin^2\varphi}$$

Немного, при $s\ll 1$ получим $W_H = -h\left(\frac{s}{R}\right)$ как 11/IV, $h = H/M_s$.

$$\frac{1}{M_s^2 V_d} W_H = -hs\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\cos^2\varphi\sqrt{1-s^2\sin^2\varphi}, \quad \text{где } \left(\frac{s}{R}\right)\to s.$$

$$\frac{1}{M_s^2 V_d} W(s) = \left(\text{т. не зависим. от } s''\right) + \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \ln\left[\frac{s}{B}\cos\varphi + \frac{1}{B}\sqrt{1-s^2\sin^2\varphi}\right] +$$

$$+ \frac{s^2}{\pi}\sum_\mu |I_\mu(s)|^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(kL) J_\mu^2(kR) - hs\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\cos^2\varphi\sqrt{1-s^2\sin^2\varphi},$$

где $I_\mu(s) = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\sin\varphi e^{i\mu\varphi}}{\sqrt{1+s^2+2s\cos\varphi}}$, а член $\sim \ln(B)$ можно вкл. в (·) вначале.

Escaneado con CamScanner



S≤R-в, иначе расчет W_m неадекв.

Date. . .

$$I_\mu(s)=\int_0^{2\pi}d\varphi\,\frac{\sin\varphi\,e^{i\mu\varphi}}{\sqrt{1+s^2+2s\cos\varphi}}=\left|\varphi=\pi+\psi\right|=-\int_{-\pi}^{\pi}d\psi\,\frac{\sin\psi\,e^{i\mu\psi}}{\sqrt{1-2s\cos\psi+s^2}}e^{i\mu\pi}=$$

$$=(-1)^{\mu+1}\int_{-\pi}^{\pi}d\psi\,\frac{\sin\psi\,e^{i\mu\psi}}{\sqrt{1-2s\cos\psi+s^2}}=(-1)^{\mu+1}i\int_{-\pi}^{\pi}d\psi\,\frac{\sin\psi\cdot\sin\mu\psi}{\sqrt{1-2s\cos\psi+s^2}}=$$

$$=(-1)^{\mu+1}i\int_0^{\pi}d\varphi\,\frac{1}{\sqrt{1-2s\cos\varphi+s^2}}\left[\cos(\mu-1)\varphi-\cos(\mu+1)\varphi\right]=$$

$$=i(-1)^{\mu+1}\int_0^{\pi}d\varphi\sum_{n=0}^{\infty}s^nP_n(\cos\varphi)\left[\cos(\mu-1)\varphi-\cos(\mu+1)\varphi\right]=$$

$$=i(-1)^{\mu+1}\frac12\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi\left[s^0+s\cos\varphi+s^2\frac14(3\cos2\varphi+1)+\dots\right]\left[\cos(\mu-1)\varphi-\cos(\mu+1)\varphi\right]=$$

$$=i(-1)^{\mu+1}\frac12\Big[s^0\,2\pi(\delta_{\mu,1}-\delta_{\mu,-1})+s\pi(\delta_{|\mu-1|,1}-\delta_{|\mu+1|,1})+$$

$$+\frac{s^2}{4}\left\{3\pi(\delta_{|\mu-1|,2}-\delta_{|\mu+1|,2})+2\pi(\delta_{\mu,1}-\delta_{\mu,-1})\right\}+O(s^3)\Big]=$$

$$=i(-1)^{\mu+1}\frac{\pi}{2}\Big[2(\delta_{\mu,1}-\delta_{\mu,-1})+s(\delta_{\mu,0}+\delta_{\mu,2}-\delta_{\mu,0}-\delta_{\mu,-2})+$$

$$+\frac{s^2}{4}\left\{3(\delta_{\mu,-1}+\delta_{\mu,3}-\delta_{\mu,1}-\delta_{\mu,-3})+2(\delta_{\mu,1}-\delta_{\mu,-1})\right\}+O(s^3)\Big]=$$

$$=i(-1)^{\mu+1}\frac{\pi}{2}\Big[2(\delta_{\mu,1}-\delta_{\mu,-1})+s(\delta_{\mu,2}-\delta_{\mu,-2})+\frac{s^2}{4}\left\{3(\delta_{\mu,3}-\delta_{\mu,-3})+\delta_{\mu,-1}-\delta_{\mu,1}\right\}+$$

$$|I_\mu(s)|^2=\frac{\pi^2}{4}\Big[4(\delta_{\mu,1}+\delta_{\mu,-1})+s^2(\delta_{\mu,2}+\delta_{\mu,-2})-\frac12s^2(\delta_{\mu,1}+\delta_{\mu,-1})+O(s^4)\Big]$$

(видно, что поправка на s^2 невелика даже если $s\le1$.

Может быть полезно $\left(J_n(kz)=\frac{1}{2i^n}\int_{-1}^{1}e^{ikz\mu}P_n(\mu)\,d\mu\right)$

Рассм. $\int_0^{\pi}d\psi\,\frac{\sin\psi\sin\mu\psi}{\sqrt{1-2s\cos\psi+s^2}}=\left|\cos\psi=x,\ dx=-\sin\psi\,d\psi\right|=-\int_1^{-1}dx\,\frac{\sin\mu\psi}{\sqrt{1-2sx+s^2}}=\int_{-1}^{1}dx\,\frac{\sin\mu(\arccos x)}{\sqrt{1-2sx+s^2}}$

$$=\sum_{n=0}s^n\int_{-1}^{1}dx\,P_n(x)\sin\mu(\arccos x)=\sum_{n=0}s^n\int_0^{\pi}d\varphi\,P_n(\cos\varphi)\sin\mu\varphi\sin\varphi$$

18/V В принципе, равновесное $s=s_0$ надо определять из $\frac{\partial W(s)}{\partial s}=0$, т.е. даст $F(s_0,h)=0$ или $s_0(h)$. Видимо, разумно определить h_{an} как $s_0(h_{an})=1$ – (вихрь выходит на край диска) центр

$F(1,h_{an})=0$ – ур-е на h_{an}.

Т.к. $W(s)=F_1(s)-hF_2(s)$, $\frac{\partial W}{\partial s}=F_1'(s)-hF_2'(s)=0$, $h(s)=\frac{F_1'(s)}{F_2'(s)}$

Точнее h_{an} из $W''(h,s_0(h))=0$. См. 10/XI тогда $\left(h_{an}=F_1'(1)/F_2'(1)\right)$.

Escaneado con CamScanner

Date. 19.05.

$\to I_\mu(s=1) = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\sin\varphi e^{i\mu\varphi}}{\sqrt{1+s^2+2s\cos\varphi}} = i(-1)^{\mu+1}\int_{-\pi}^{\pi} d\psi \frac{\sin\psi\sin\mu\psi}{\sqrt{2(1-\cos\psi)}} = i(-1)^{\mu+1}\int_{-\pi}^{\pi} d\psi \frac{2\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}\sin\mu\psi}{2\left|\sin\frac{\psi}{2}\right|}$

$= 2i(-1)^{\mu+1}\int_0^{\pi} d\psi \frac{\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}}{\left|\sin\frac{\psi}{2}\right|}\sin\mu\psi = 2i(-1)^{\mu+1}\int_0^{\pi} d\psi \cos\frac{\psi}{2}\sin\mu\psi = 4i(-1)^{\mu+1}\int_0^{\pi/2} d\varphi\cos\varphi\sin 2\mu\varphi =$

$= 4i(-1)^{\mu+1}\left(\sum_{k=0}^{\mu}\right)\left[\frac{(1+2\mu-2)!!}{(1+2\mu)!!} + \frac{(2\mu-1-2)!!}{2\mu+1)!!}\right] = 4i(-1)^{\mu+1}\frac{1}{(2\mu+1)}\left[1+\frac{1}{2\mu-1}\right] =$

$(\mu>0)$

$= 8i(-1)^{\mu+1}\frac{\mu}{(4\mu^2-1)}$, аналогично вычисл. и $\frac{\partial I_\mu(s)}{\partial s}$ при $s=1$.

→ Написание статьи по FeNi vortex domain и семинар в KIAS.

→ Сравнение с эксп. Новосада χ, H_{an}, H_n FeNi имп. доков. 19/V

Серия May 13 — $L=20$ nm или 40 nm. H_n ($L=40$ nm) считал 17/V

χ_{init} $2R = 0{,}3;\ 0{,}35;\ 0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0.8;\ 1{,}0$ μm. Согласие с эксп. неважное.

R, nm	150	175	200	250	300	400	500
$\beta = L/R$	0,267	0,229	0,2	0,160	0,133	0,10	0,08
$\chi_{эксп}$	–	0,360	+	0,980	2,00	2,75	3,19
$\chi_{is} = \chi_{calc}$	0,653	0,723	0,793	0,926	1,057	1,304	1,544
$\chi_{int} = \chi_{calc}$	0,673	0,742	0,817	0,964	1,099	1,375	1,649
	$d/R = \frac{0,4}{0,15}$	$\frac{0,5}{0,175}$	$\frac{0,5}{0,2}$	$\frac{0,5}{0,25}$	$\frac{0,6}{0,3}$	$d/R = \frac{0,6}{0,4} = 1,5$;	$d/R = 0,6/0,5 = 1,2$

$L=40$ nm

← для цилиндр. дока

← для т. сферич. доков в F-фазе

$\chi_{isol} = \frac{1}{2a}$, $2a(\beta, R) = 4\pi F(\beta) - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2$. $\chi_{int} = \frac{1}{2a'} = \frac{\chi_{is}}{1-\lambda\chi_{is}}$

Видно, что χ_{is}, χ_{int} неважно согласуются с эксп., особенно при R-больших.

Грубый расчет $\frac{1}{M_s}H_{an} = 2a = 4\pi F(\beta) - (R_0/R)^2 = 1/\chi_{is}$ ($s/R = 1$ в разы по $s \ll R$):

$H_{n,an}$

R, nm	375	437	500	625	752	1000	1250
β	0,4 0,267	0,229	0,20	0,16	0,133	0,10	0,08
$H_{an,\beta}^{эксп}$	450	380	375	374	373	315	285
Грубо $H_{an,\beta}^{calc}$	1225	1110	1010	860	760	610	512
Точное $H^{эксп}$	164	153	153	107	92	62	43
$H_{an}^{эксп}/(4\pi M_s)$	0,045	0,038	0,0375	0,037	0,037	0,0315	0,0285

$L=40$ nm

$F_\mu(\beta) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} f(\beta t) J_\mu^2(t)$

Точное $H^{эксп}$ — расчет см. 17/V.

→ Видно, что H_{an} серии "May13" плохо согласуется с экспериментом, в отличие от "May2" серии 17/V. Более точное H_{an} определ. из $\min W(s)$:

$$\frac{1}{M_s^2 V_d} W(s) = \left(\frac{2\alpha \cdot k_\sigma}{3\alpha \cdot \sigma S}\right) + \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \ln\left[s\cos\varphi + \sqrt{1-s^2\sin^2\varphi}\right] + \frac{2s^2}{\pi}\sum_{\mu>0} F_\mu(\beta)|I_\mu(s)|^2 - \frac{k_\sigma}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2\varphi\sqrt{1-s^2\sin^2\varphi}$$

$0 \le s \le R-b$

Escaneado con CamScanner

Date. 20 · 05 ·

$I_\mu(s)$ – число имплов, $|I_\mu(s)|^2 = 4\left[\int_0^\pi \frac{\sin\varphi\cdot\sin\mu\varphi}{\sqrt{1-2s\cos\varphi+s^2}}\,d\varphi\right]^2$. При $s\ll 1$:

$|I_\mu(s)|^2 \underset{\mu>0}{=} \frac{\pi^2}{4}\left[4\delta_{\mu,1} + s^2\left(\delta_{\mu,2} - \frac{1}{2}\delta_{\mu,1}\right) + O(s^4)\right]$ – немерно.

Определим h_{an} из условия, что s_0 (минимизирующее $W(s)$) $= 1$.
$s_{max} = 1 - \frac{b}{R}$, но $b/R \ll 1$ пренебрежем, b – радиус „ядра" вихря.

Файл Lamda-Vortex-lat.mcd

→ $W(s)$ имеет плавный минимум, $W(s_0) < 0$ в поле $h \neq 0$.

1) Напримар, при $R = 150$ nm, $\beta = 0{,}267$ и $h = 1$ ($H = H_s$) $s_0 = 0{,}44$ (!) всего.
А $h = 2$ дает $s_0 = 0{,}59$ (!) всего, $s_0(h=3) = 0{,}65$ всего.
Или критерий $s_0(h_{an}) = 1$ надо изменить (меньше s_0) или признать, что для $s_0 \leq 1$ модель "rigid vortex" $W(s)$ нереальна.

2) Другой пред. случай FeNi долов Новосада $R = 500$ nm, $L = 0{,}08$ ($\beta \to 0$) дает значительно меньшие h при тех же s_0 – долго мечте.

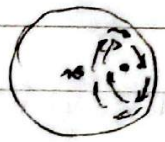
$W_{ex}(s)$ и $W_H(s)$ убывают с s, а вот $W_m(s)$ растет, т.к. все $|I_\mu(s)|^2$ имеют резкий max при $s \to 0$ (тем резче, чем μ больше).
Только $I_{\mu=1}(s) = 2\int_0^\pi \frac{d\varphi \sin^2\varphi}{\sqrt{1-2s\cos\varphi+s^2}} = \pi\ \forall s$, от s не зависит.



"rigid" vortex



доп. и. заряды на поверх. дота


– более реалистичный "Soft" vortex
"MIIS" вблизи краев за счет искажения формы вихря

$W_m(s)$ препятствует выталкиванию центра „vortex" из дота. Model "rigid" vortex завышает $W_m(s)$, т.е. приводит к более трудному выталкиванию центра вихря, завышая h_{an}.
$W_m(s)$ особенно сильно растет при $s \gtrsim 1$, когда плотность пов. зарядов максимальна

20/V Написание скрипта по докам Новосада - vortex FeNi:
Поле h_- равновесия энергий Shifted „vortex" и hom. dot точно:

$h_- = 2a\left[1 - \sqrt{1 - \frac{\Delta}{a}}\right]$, $W^{vor}(h=0) = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2\left[2 - \ln\frac{b}{R}\right] + \frac{4\pi b^3}{R^2 L}[g(0) - g$

эта при $s_0 \ll 1$

$W^{hom}(h=0) = 2\pi F(\beta)$, $\Delta = W^{hom}(0) - W^{vor}(0)$

$a - \Delta = 2\pi F(\beta) - \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 - \left[2\pi F(\beta) - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2\{2 - \ln(1)\} - \frac{4\pi b^3}{\beta}\{g(0) - g(\beta/b)\}\right] =$

Escaneado con CamScanner

Date. 24.05.

$= W^{vor}(0) - \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 > 0$. $\sqrt{1-\frac{\Delta}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{a-\Delta}$

Вблизи границы стабильности „vortex" state $h=0$, $\Delta \approx 0$ и $h_- \cong \Delta$.
Поле h_- определяет масштаб h_n, h_{an}, т.к. $h_n < h_- < h_{an}$.

Написание N1-версии совместно с Новосадом по M(II) vortex FeNi dots. 20-21/V

Семинар KIAS. Лит. обзор. Письма. 22/V

Поездка в City за билетом в Киев и на Itaewon. 23/V

Система ур. Брауна для „vortex" дота во внеш. поле

→ Все не так просто с полями h_{an}, h_0 и h_n, 24/V
которые я нашла из модели „rigid" shifted vortex и „bubble" dot.

а) Модель shifted „rigid" vortex может оказаться неверной в главном приближении $\sim S^2$. h_{an} и h_0 – под вопросом. $\frac{\partial \vec{m}}{\partial n} = 0$ и ур-я Брауна не противоречились.

в) Модель пузыря из „bubble" с центром вне дота — — допущение, которое надо обосновать. Ведь „bubble" – модель я взяла оттуда же из ур. Брауна с $\frac{\partial \vec{m}}{\partial n} = 0$. И будет ли nucleation – неоднородной, в смысле – будут ли отклонения от „идеал" dot малы?

а) Запишем ур. Брауна для vortex dot в слабом внеш. поле $H/M_s \ll 1$

Используем общую систему Л.Л. от 14/VIII 99 г. Но $\vec{M}_0(\vec{r})$ теперь будет vortex state при $H=0$, частота $\omega = 0$, $\vec{m}$ – теперь не SW, а малое отклонение от $\vec{M}_0(\vec{r})$ из-за малого внеш. $\vec{H}$.

$\vec{M}(\vec{r}) = \vec{M}_0(\vec{r}) + \vec{m}(\vec{r})$, $\vec{h}(\vec{r}) = \vec{h}_{ex}(\vec{r}) + \vec{h}_m(\vec{r}) + \vec{h}_a$; $\vec{H}_i(\vec{r}) = \vec{H}_{ex}(\vec{r}) + \vec{H}_m(\vec{r})$

$\vec{h}_a$ – спин. малое внеш. поле.

$\vec{M}_0(\vec{r})$, $\vec{H}_{ex}(\vec{r})$, $\vec{H}_m(\vec{r})$ – намагниченность, внеш. поле и магнитостат. поле невозмущенного „vortex" (т.е. при „vortex" при $h_a = 0$)

УД (2)
$$\begin{cases} M_0^y h_z - h_y M_0^z + m_y H_i^z - m_z H_i^y = 0 \quad (1) \\ M_0^z h_x - h_z M_0^x + m_z H_i^x - m_x H_i^z = 0 \quad (2) \\ M_0^x h_y - h_x M_0^y + m_x H_i^y - m_y H_i^x = 0 \quad (3) \end{cases} + \frac{\partial \vec{m}}{\partial n} = 0 \text{ на поверхности дота.}$$

$\vec{m}, \vec{h}_{ex}, \vec{h}_m \sim h_a$ – малы.



Core радиусом b, $b \ll R$ дает малый вклад в W_H.
вне vortex

Рассм. систему УД (*) вне core: $\rho > b$, тогда
$M_0^z(r) = 0$, $M_0^x = -M_s \sin\varphi$, $M_0^y = M_s \cos\varphi$ и исходное.

Значит $m_z = 0$ (?)

Escaneado con CamScanner

Date. . .

Тогда $\begin{cases} M_0^y h_z + m_y H_i^z = 0 \\ -h_z M_0^x - m_x H_i^z = 0 \\ M_0^x h_y - h_x M_0^y + m_x H_i^y - m_y H_i^x = 0 \end{cases}$ $\begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$ $\Rightarrow$ $\begin{matrix} (1) \Rightarrow M_s \cos\varphi\, h_z + m_y H_i^z = 0 \\ (2) \Rightarrow -M_s \sin\varphi\, h_z + m_x H_i^z = 0 \end{matrix}$

(1)·sinφ + (2)cosφ $= (m_y \sin\varphi + m_x \cos\varphi) H_i^z = 0$, $H_i^z = 0$

и далее $H_{ex}^z = \alpha \nabla^2 M_z^0 = 0$, но $H_m^z(i) = \int_{V_a (\text{кроме «core»})} d^3\vec{r}' \left[G_{zz} M_z^0 + G_{zx} M_x^0 + G_{zy} M_y^0 \right] \neq 0$

Точнее $m_z H_i^z = 0$. $H_{m\,(\vec{r} \in V_a)}^z = 0$ вне «core»

(3) $-M_s \sin\varphi\, h_y - h_x M_s \cos\varphi + m_x H_i^y - m_y H_i^x = 0$ и из (1)-(2): $h_z = 0$ т.е. $h_m^z = 0$ и $h_a^z = 0$

$\vec{h}_a \parallel$ высокая ось ($h_a^z = 0$ по определению).

$H_{ex}^x = \alpha \nabla^2 M_0^x = \alpha (\nabla^2) M_0^x$

$\vec{H}_{ex} = \alpha \nabla^2 \vec{M}_0$, $\vec{M}_0 \left(0, M_\varphi^0, 0 \right)$ вне «core», причем $M_0^\varphi = M_s$
$\rho \quad \varphi \quad z$

$\frac{1}{\alpha} (\vec{H}_{ex})^\rho = \nabla^2 (M_0^\rho) - \frac{1}{\rho^2} M_0^\rho - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial M_0^\varphi}{\partial \varphi} = 0$

$\frac{1}{\alpha} (\vec{H}_{ex})^\varphi = \nabla^2 (M_0^\varphi) - \frac{1}{\rho^2} M_0^\varphi + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial M_0^\rho}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho^2} M_s$, $(H_{ex}^z) = \alpha \nabla^2 M_z^0 = 0$

$(\vec{H}_m^{(i)})^\varphi = \int_{\substack{\vec{r}' \in V_a \\ \text{вне core}}} d^3\vec{r}'\, G_{\varphi\varphi}(\rho, \rho', z, z') M_s + \int_{\vec{r}' \text{ внутри «core»}} d^3\vec{r}'\, G_{\varphi\rho}(\vec{r}, \vec{r}') M_s \left(\frac{2B\rho}{b^2 + \rho^2} \right) + \int_{\text{внутри «core»}} d^3\vec{r}' G_{\varphi z}(\vec{r}, \vec{r}') M_0^z$

$G_{\varphi\varphi}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{(-1)}{(L)\rho\rho'} \sum_\mu \mu^2 e^{i\mu(\varphi - \varphi')} \int dk\, e^{-k|z-z'|} J_\mu(k\rho) J_\mu(k\rho') = -(\nabla_r)_\varphi (\nabla_{r'})_{\varphi'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

Если $M_{0(\vec{r}')}^\rho$ не зависит от φ', то $\int d\varphi' (\ldots) \sim \delta_{\mu 0}$, но $\mu = 0$ вклада не дает и $(\vec{H}_m)^\varphi = 0$. $(\vec{H}_m)^z = \int_{\substack{\vec{r}' \in V_a \\ \text{вне «core»}}} d^3\vec{r}'\, G_{z\varphi} M_0^\varphi = 0$ для $M_0^\varphi(\vec{r}')$ не зависящего от φ'.

$G_{\varphi z}(\vec{r}, \vec{r}') = -(\nabla_r)_\varphi (\nabla_{r'})_z \frac{1}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z'} \int dk\, e^{-k|z-z'|} \sum_\mu e^{i\mu(\varphi - \varphi')} J_\mu(k\rho) J_\mu(k\rho') =$

$= -\frac{i}{\rho} \int dk \frac{\partial e^{-k|z-z'|}}{\partial z'} \sum_\mu \mu e^{i\mu(\varphi - \varphi')} J_\mu(k\rho) J_\mu(k\rho') -$

– если $M_0^z(\vec{r}')$ от φ' не зависит (а чаще и есть), то вклад в «core» $(\vec{H}_m)^\varphi = 0$.

Точнее $(\vec{H}_m^{(i)})^z = \int_{\text{вне «core»}} d^3\vec{r}'\, G_{z\varphi}(\vec{r}, \vec{r}') M_0^\varphi(\vec{r}') + \int_{\text{внутри «core»}} d^3\vec{r}' \left[\underbrace{G_{z\varphi} M_0^\varphi}_{\text{вклад} = 0} + G_{zz} M_0^z \right] =$

$= \int_{\vec{r}' \in \text{core}} d^3\vec{r}'\, G_{zz}(\vec{r}, \vec{r}') M_0^z(\vec{r}') \neq 0$

$(\vec{H}_m(\vec{r}))^\rho = \int_{\text{вне «core»}} d^3\vec{r}'\, G_{\rho\varphi} \underbrace{M_0^\varphi(\vec{r}')}_{=0} + \int_{\vec{r}' \text{ внутри «core»}} d^3\vec{r}' \left[\underbrace{G_{\rho\varphi} M_0^\varphi}_{=0} + G_{\rho z} M_0^z \right] = \int_{\vec{r}' \in \text{core}} d^3\vec{r}' G_{\rho z}(\vec{r}, \vec{r}') M_0^z(\vec{r}')$

Т.е. намагниченность, кроме как вдоль оси z $\vec{H}_m = (H_m^\rho, 0, H_m^z)$ – причем обе компоненты $H_m^{\rho,z}$ создаются $\vec{M}_0$-core. Но если их отнять при $\vec{r} \in V_a$ (вне core)

Escaneado con CamScanner

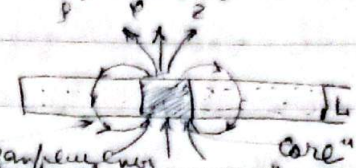
Date. . .

Внутри „core" $\vec{M}_0(\vec{r}) = (0, M_0^\rho(\rho), M_0^z(\rho))$, вне „core" $M_0(\vec{r}) = (0, M_s, 0)$

Вне „core" $(\vec{H}_m \cdot \vec{M}_0) = (H_m^\rho, 0, H_m^z)(0, M_s, 0) = 0$ и область вне „core" не даёт дне невозмущ. вихря вклада в W_m (это и раньше вычисл.)

① дне невозмущ. vortex: $\vec{H}_{ex} = (0, H_{ex}^\varphi, 0)$ и $\vec{H}_m = (H_m^\rho, 0, H_m^z)$.

$H_i^z(\vec{r}) = H_m^z(\vec{r}) \neq 0$. - Сравнение



Фдз

такие с. линии запрещены

т.к. они приводят к $dl_n \neq 0$, $\partial_n = (\vec{M}\cdot\vec{n}) \neq 0$, но вне „core" $M_z = 0$.

Или все же эти струны линии и могут пропасть?

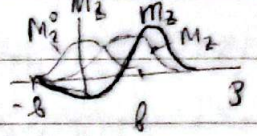
$(1)\cdot\cos\varphi - (2)\cdot\sin\varphi = M_s h_z + H_i^z(m_y\cos\varphi - m_x\sin\varphi) = M_s h_z + H_i^z m_\varphi = 0$

$\vec{m}(\vec{r})$ вне „core" ($\rho > b$)

$$\begin{cases} m_\rho H_i^z = 0 \\ M_s h_z + m_\varphi H_i^z = 0 \\ -M_s h_\rho + m_x H_i^y - m_y H_i^x = 0 \end{cases}$$

$$\vec{h}_{(\vec{r})} = \alpha\nabla^2\vec{m} + \int d^3r' \hat{G}(\vec{r},\vec{r}')\vec{m}(\vec{r}') + \vec{h}_a$$

и $\left(\frac{\partial\vec{m}}{\partial n}\right)_S = 0$.



Плохо и $m_\rho = 0$, и $H_i^z = 0$. Видимо нельзя полагать $m_z = 0\ \forall\vec{r}$.

→ Система интегро-дифф. уравнений для m_x, m_y, m_z вне „core" $\rho \le b$:

$$\begin{cases} M_0^y h_z + m_y H_i^z - m_z H_i^y = 0 \\ -h_z M_0^x + m_z H_i^x - m_x H_i^z = 0 \\ -M_s h_\rho + m_x H_i^y - m_y H_i^x = 0 \end{cases} \to \begin{cases} H_i^z m_\rho - m_z H_i^\rho = 0 \\ h_z M_s + m_\varphi H_i^z - m_z H_i^\varphi = 0 \\ -M_s h_\rho + m_\rho H_i^\varphi - m_\varphi H_i^\rho = 0 \end{cases} \quad (M_z^\rho = 0)$$

Но $\vec{M}_0 \times \vec{H}_i = \begin{vmatrix} \hat\rho & \hat\varphi & \hat z \\ 0 & M_s & 0 \\ H_i^\rho & H_i^\varphi & H_i^z \end{vmatrix} = M_s H_i^z \hat\rho - M_s H_\rho^i \hat z = 0$ даёт $\begin{cases} H_i^z = 0 \\ H_i^\rho = 0, \end{cases}$

ур-е равновесия для невозмущ. vortex

т.е. внутри дока (вне „core") $H_m^z = 0$, $H_m^\rho = 0$.

Выходим внутрь дока (вне core): $\vec{H}_m = 0$ и есть только $\vec{H}_{ex} = (0, H_{ex}^\varphi, 0)$.

$\vec{H}_i$ имеет только φ-компоненту $H_i^\varphi \neq 0$ (вне core, но $\in V_d$).

и $\begin{cases} h_z M_s - m_z H_i^\varphi = 0 \\ -M_s h_\rho + m_\rho H_i^\varphi = 0 \end{cases}$, $\vec{m} = (m_\rho, 0, m_z) \perp \vec{M}_0 = (0, M_0^\varphi, 0)$ – возмущение $\vec{m} \perp \vec{M}_0$ как и должно быть в мин. теории.

$H_i^\varphi = H_{ex}^\varphi = -d\frac{M_s}{\rho 2}$ – здесь.

$$h_z = d(\nabla^2\vec{m})_z + \int_{V_d} d^3\vec{r}'\left[G_{z\rho}m_\rho + G_{z\varphi}\underbrace{m_\varphi}_{=0} + G_{zz}m_z\right] = d\nabla^2 m_z + \int_{V_d} d^3r'\left[G_{z\rho}m_\rho + G_{zz}m_z\right]$$

$$h_\rho = d\left[\nabla^2 m_\rho - \frac{1}{\rho^2}m_\rho\right] + \int_{V_d} d^3\vec{r}'\left[G_{\rho\rho}m_\rho + G_{\rho z}m_z\right].$$

(*)
$$\begin{cases} dM_s\nabla^2 m_z - H_i^\varphi m_z = -\int d^3r'\left[G_{z\rho}m_\rho + G_{zz}m_z\right]M_s \\ dM_s\left[\nabla^2 m_\rho - \frac{1}{\rho^2}m_\rho\right] - H_i^\varphi m_\rho = -\int d^3r'\left[G_{\rho\rho}m_\rho + G_{\rho z}m_z\right]M_s - (M_s h_a^\rho) + \frac{\partial\vec{m}}{\partial n}\Big|_k = 0. \end{cases}$$

– нелин. система ур. Брауна +

Escaneado con CamScanner

$\vec{m} = (m_\rho, 0, m_z)$ Здесь отклонение от $\vec{m}_0(\vec{r})$ – vortex при $H=0$ в объеме "core"

Date. . . разложение по ξ для "rigid" vortex просто дельта функции по сравнению с этой сложной.

$$(*)\quad \begin{cases} \alpha \nabla^2 m_z + \frac{d}{\rho^2} m_z = -\int d^3r' \left[G_{z\rho}(rr') m_\rho(r') + G_{zz}(rr') m_z(r') \right] \\ \alpha \nabla^2 m_\rho = -\int d^3r' \left[G_{\rho\rho}(rr') m_\rho(r') + G_{\rho z}(r,r') m_z(r') \right] - h_a^\rho \end{cases}$$

– вне "core", ξ

Внеш. поле, создающее $\vec{m}$

Из-за магнитостатики не видно как решать. Это тоже не задача nucleation в эллипсоидах как у Ahatoni.

Можно решать как SW-задачу, разлагая по $J_m(\beta_{mn}\frac{\rho}{R})$, $J'_m(\beta_{mn}$

$G_{\rho\rho}$ – самая сложная из м. Гриновских функций.

Для описания эксп. Новосада нужны только $\langle m_\rho \rangle_{V_d}$, $\langle m_z \rangle_{V_d}$.

$$\begin{cases} h_\rho = h_x \cos\varphi + h_y \sin\varphi = h_a \cos\varphi_H \cos\varphi + h_a \sin\varphi_H \sin\varphi = h_a \cos(\varphi - \varphi_H) \\ h_\varphi = -h_x \sin\varphi + h_y \cos\varphi \end{cases}$$

Даже предположение $\vec{m} \neq f(z)$ дела не облегчит.



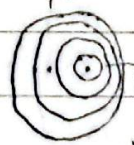
Согласно Т-ме Гаусса $\int_V dV \nabla^2 \Phi = \int_{S(S\,a\,vbar.\,V)} dS \frac{\partial \Phi}{\partial n}$

$$\int_{V_d} d^3\vec{r}\, \nabla^2 m_z(r) = \int_S dS \frac{\partial m_z}{\partial n} = 0 \quad \text{т.к. } \frac{\partial \vec{m}}{\partial n}\Big|_S = 0 \text{ требуем.}$$

$$\int_{V_d} d^3\vec{r} \int d^3r' \left[G_{\rho\rho}(r,r') m_\rho(r') + G_{\rho z}(r,r') m_z(r') \right] + \underbrace{\int_{V_d} d^3r' h_a^\rho}_{0} = 0$$

Надо следить $\vec{r} \in$ "core" или нет, может ли $\vec{r}' \in$ "core" (может)

→ Можно ли применять модель жёсткого vortex



Это (круги) по с разным центром, силовые линии – круги,

– чем больше $R_{круга}$ (чем дальше от "core"), тем ближе его центр к центру доп. $R_{min} = b$ и $b^2 = (x-s)^2 + y^2$. $R_{max} = R$ и центр его $x_0 = 0$. $R_{круга} \in [b, R]$, полож. центра x_0 измен. от s до 0.

Но s_0 не будет зависеть от магнитостатики (т.е. от $\beta = \frac{L}{R}$ Это модель самая выгодная для потери устойчивости вид H.

в такой модели будет (т.к. есть volume charges! → см. К. Metlov, со. от 13/X доп.) М. энергия вок. поверхности доп. $= 0$, т.к. $m \| S$, а м. энергия вихрей доп. ("core") от смещения s не зависит, т.е., конкурентция при росте H будет между $W_H(s)$ и $W_{ex}(s)$ (есть зависит) только и будет $s_0 = F(R/R_0)$ где-то обратно. Есть $W_m^{Торч}$ и W_m^{vor} в такой модели.

25-26/V Объяснение Эксп. Новосада.

27-30/V подготовка докладов на EMMA'2000 и сборы в Киев.

31/V – 18/VI поездка в Киев на EMMA и в отпуск

18/VI Распечатка и просмотр новых статей.

Escaneado con CamScanner

Date. 19.06.

План работы на ближ. время

19/VI

1) Подг. ст. в JAP на магнитостат. Взаимодействие inhom. dots и анализ режим режимов inhom. dots: vortex dots, Bubble and d. dots
2) Подгот. ст. с Усовым по т. Coupled S.d. и inhom. dots, расш. EMMA-ст.
3) продвинуться (Shin расчет) по ОЛН-ПЛН hom. dots и/или M(H) ⊥-доток (модели), предсказать сиг. расчет „vortex" доток
4) Подгот. ст. со Славиным, Дем., Hill. ст. в PRB
до 31.08 5) Оформить паспорт SwissAir, разобраться с письмом North West и как купить ЖД-билеты К. → С. в Сеуле для Лори и детей
до 20.06 ~~6) Подать аппликацию в Halle (до 30.06)~~ и Alabama-Mint (J.A.Barnard) отложил
3-4.07 ~~7) Подать аппликацию на Любчанского~~ (сент.) и Матлова (окт.?)
до 07.07 ~~8) Начать Abstracts в San Antonio (MMM-Intermag) со Славиным, Новиковым, Любе~~ Shin'ом
9) Посчитать частоты SW преимущ. дока при $\vec{q} \parallel$ длин. стороне (H-?)
10) Уточнить расчет H_n, H_{an} vortex-дока (с Матловым)
11) Начать расчет SW на основе „vortex" state
12) ~~Поскараться кайтнуть, оформить и послать приглаш. Л. и А. ,~~ ~~купить ЖД-билеты в Сеуле.~~
до 25.06 13) ~~Написать 1/2 стр. об EMMA для „KIAS News"~~
до 04.08 14) ~~Письмо Б. Иванову и отчет INTAS (скоординироваться с Усовым).~~

Escaneado con CamScanner

Date. . .

20/VI Подготовка экспериментов в Halle. Чтение новых статей.
21-23/VI Поездка в Славянку. Море, купание. Беседы с С. Новиковым. Чтение новых статей. Расчеты сигнала на ранних этапах.
24/VI Поиски квартиры. Аспирантура.

25/VI Обдумывание эксперимента Демокритова по m, coupled rectangular dots (ширина w, длина l, spacing d).



Цепочки из rectang. dots образуют кристаллы: решетку с периодами $T_1 = l + d$ и $T_2 = w + d$.

В структурной ячейке один dot (w). В F-фазе все спины намагничены $\vec{M}_n$ вдоль H и равны, т.е. как ячейка содержит только один dot. $d = 1$ нм я описывал как isolated dots.



$d > 0{,}5 \div 1$ нм соответствует изолир. dots.
$d \to 0$ соотв. сильной связи.
Частота SW стремится к одной $\omega^* = 10{,}8$ ГГц при $d \to 0$ у Демокритова.
Тогда как частота FMR сильной пленки $\omega_0 = \sqrt{\omega_H(\omega_H+1)}$ и $H = 600$ Э $\omega_0 = 7{,}52$ ГГц.

Почему эксп. частота SW ω^* ($d=0$) не совпадает с ω_0 – частотой FMR сильной FeNi пленки с H в плоск. и $H = 600$ Э?

Если попробовать предельную ($H \to 0$) частоту объяснить как DE:

$$\omega_{DE} = \left[\omega_H(\omega_H+1) + \frac{1}{4}\left(1 - e^{-2q_{||}L}\right)\right]^{1/2}$$

$q_{||} = 0{,}38 \cdot 10^5$ см$^{-1}$, видимо. $L = 35$ нм, $2q_{||}L \approx 10^5$ см$^{-1} \cdot 70 \cdot 10^{-7}$ см $\approx 0{,}7$,
то можно получить $\omega_{DE} \approx \omega^*$ эксп. при разумном $q_{||}$.
$\omega_{DE}^2 \approx \omega_H(\omega_H+1) + \frac{1}{2}q_{||}L$, для $q_{||}L \ll 1$

Escaneado con CamScanner

Date. 26. 04. SW - в решетке доков ($d/R > 1$ или $k_0 \cdot \frac{d}{w} > 1$)

(статические и динам. магнитостат. поле взаимодействия данного дока с решеткой доков.

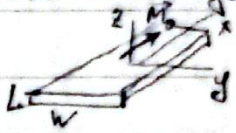
Согласно анализу от 9.03.00-12.03.00:

1) в главном приближении по обратному межокновому расстоянию статич. поле взаимодействия с решеткой доков есть просто сумма полей точечных диполей с моментом $\langle \vec{M} \rangle_{V_d}$, расположенных в узлах 2D решетки;

2) в главном приближении динам. дин. поле взаимодействия с решеткой доков есть сумма полей точечных диполей $\vec{j}_n = \langle \vec{m}_n(t) \rangle_{V_d}$.

Для цилиндр. доков тогда в динам. взаимодействии будут участвовать только $\langle \vec{m}(r) \rangle_{V_d} \neq 0$, т.е. $J_0(x_{mn}\rho)$ - радиально сим. моды.

Для прямоуг. доков $m_x(\vec{r}) \sim \cos(q_y^m y)$, $q_y^m = \frac{\pi m}{w}$



$\langle m_x(r) \rangle_{V_d} \sim \int_0^w dy \cos\left(\frac{\pi m}{w} y\right) \neq 0$ только при $m=0$, т.е.

Вклад в динам. m. coupling дадут только однородные моды в этом приближении

27/4

Граничн. усл. для "vortex"

Для "vortex" в цилиндр. доке $\vec{m} = \frac{\vec{M}_0(r)}{M_s} = (m_\rho, m_\varphi, m_z)$ (здесь)

$m_\rho = 0$, $m_\varphi = 1$ (вне „core"), $m_z = 0$ (вне „core").

Какое же граничн. условие выполн. на боковой поверхности цилиндра $\rho = R$? Вообще $m_\varphi = f(\rho)$.

$$\vec{\nabla} m_\varphi = \left(\hat{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) m_\varphi(\rho) = \hat{\rho}\,\frac{\partial m_\varphi(\rho)}{\partial \rho} = 0 \text{ вне „core"}.$$

$\frac{\partial}{\partial n} = (\vec{\nabla}\cdot\vec{n}) = (\vec{\nabla}\cdot\hat{\rho}) = \frac{\partial}{\partial \rho}$. $\frac{\partial \vec{m}}{\partial \rho} = \frac{\partial \vec{m}}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \rho}(0, m_\varphi, 0) = \frac{\partial m_\varphi}{\partial \rho} = 0$? $\forall \rho > b$

Т.е. выполняется $\frac{\partial \vec{m}}{\partial n} = \frac{\partial \vec{m}}{\partial \rho} = 0$ не только при $\rho = R$, а вообще ($\forall \rho > b$, вне „core").

$(\vec{m})_n = m_\rho = 0$ не только на границе $\rho = R$, но вообще $\forall \rho$.

Для „vortex" усл. $\frac{\partial \vec{m}}{\partial n} = 0$ и $(\vec{m})_n = 0$ выполняются одновременно.

Точнее $\frac{\partial \vec{m}}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\hat{\varphi} m_\varphi\right] = m_\varphi \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \rho} + \hat{\varphi}\frac{\partial m_\varphi}{\partial \rho} = m_\rho \cdot 0 + \hat{\varphi}\cdot 0 = 0$ вне „core".

$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\rho} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi \\ \hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi \end{array} \right.$ и $\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \rho} = 0$, но $\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \varphi} = \hat{\varphi}$, $\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} = -\hat{\rho}$.

В магнитостат. энергии можно выделить объемный и поверхн. вклады при варьировании — формально, когда и объем. и поверхностные (grad) ур. Л.-Л. изменяется.

Но правильно записывать W_m как только объемную $W_m = -\frac{1}{2}\int d^3r \vec{M}(r)\vec{H}_m(r)$, тогда $\vec{H}_m$ войдет только в объемные УР Л.-Л.

Date. 28 . 06 .

→ Везде исключение объемных УД для опер. записи W_m как суммы объем. и поверхн. вклада недопустимо, а ⇒ [illegible]

$$W_m = \frac{(-1)}{2}\int_V d^3r\, \vec{M}(r)\cdot\vec{H}_m(\vec{r}), \quad \vec{H}_m(r) = -\nabla\varphi_m(r), \quad \varphi_m(r) = -\nabla_r\cdot\int_{V'} d^3r' \frac{\vec{M}(r')}{|r-r'|}$$

Тогда $W_m = \frac{(-1)}{2}\int_V d^3r\, \vec{M}(r)\cdot\nabla_r\left[\operatorname{div}_{r'}\int_{V'} d^3r' \frac{\vec{M}(r')}{|r-r'|}\right] = \frac{(-1)}{2}\int_{V,V'} d^3r\, d^3r'\, \vec{M}(r)\cdot\operatorname{grad}_r\frac{\vec{M}(r')}{|r-r'|}$

и эквивалентно $W_m = \frac{1}{2}\int_{V,V'} d^3r'\, d^3r\, M_\alpha(r) M_\beta(r')\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\frac{1}{|r-r'|} =$

$= -\frac{1}{2}\int d^3r\, d^3r'\, G_{\alpha\beta}(r,r') M_\alpha(r) M_\beta(r')$, которое я неиспользовал.

Comment: Но формально можно записать $W_m = \int_V d^3r\, \rho_m(r)\varphi_m(r) + \int_S dS\, \sigma_m(r)\varphi_m(r)$

с $\rho_m(r) = -\operatorname{div}\vec{M}(r)$, $\sigma_m = M_n$, хотя $\int dS(\cdot)$ совпадает с вкладом из $\int_V d^3r(\ldots)$, если его считать подробнее. При этом записав $W_m = \int_V d^3r(\cdot) + \int_S dS(\cdot)$ и разделяя объемные и поверхностные (Hm) вклады по $\vec{M}(r)$ и объемные и поверхн. УД исключаются. Для объемных УД это недопустимо, т.к. затрагивает исключение и связанных с ними поверхн. УД (грани. условий). Остается только ф.ф. грам. условия.

28/VI Вернемся к SW в Wires (13-21/II и 1-7/III). **Wires**

21/II было получено, что $m_z(x) \sim P_1^1(2x) = \sqrt{1-4x^2}$ авт. хорошо $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, $x = d/w$.

СФ ур-я $\lambda m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx'\, g(x,x')m(x')$, где ядро $g(x,x') = \frac{2}{\pi}\ln\left[\frac{(x-x')^2}{(1-x')^2+\rho^2}\right]$

Тогда эту СФ а затрудняет, т.к. $\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_{|x|\to 1/2} \to \infty$ приводит к ∞ объем. энергии на краях доса (wire).

$m_0(x) = c\sqrt{1-4x^2}$ удовл. магнитостат. грам. условию $m_0(\pm\frac{1}{2}) = 0$, т.е. упирается на границе $y = \pm\frac{w}{2}$ of wire.

$m_0(x)$ дает Ритцеву оц. моды $\omega_0 = 0{,}240$ близкую к экс. $f_0 = [illegible]$

Похожие профили $m(x)$ были экс. получены Sandler et al. JAP85 Sa[illegible] распределение $m(x) \sim \sqrt{a^2-x^2}$ (для wires) также получено в ср. Bryant-Suhl, APL54 [illegible] в безобменной задаче, обобщающей конструкцию van den Berg на случай обмен. поля.

Но для оптических f_{BS} обмен. вклад в жесткость SW настолько очень мал, хотя не стоит держаться за объемное гр.усл. $\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)$ и описывать низкие моды SW Пуассо[illegible] магнитостатики?

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$g(x-x') = g(\xi)$ и опред. $I_s = \int_{-1/2}^{1/2} d\xi\, g(\xi)\xi^{2s}$, тогда $\lambda_m = \frac{1}{u_m(0)} \sum_{s=0} \frac{u_m^{[2s]}(0)}{(2s)!} I_s$, если $u_m(x)$ – точное СФ.

→ Предполагаем $u_0(x) = \left(\frac{1}{4} - x^2\right)^{1/2}$, $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ – точная СФ.

$u_0'(x) = \frac{1}{2}(\cdot)^{-1/2}(\cdot)'$. $u_0(x) = (1-4x^2)^{1/2} = \sum_{s=0} u_0^{[2s]}(0) x^{2s}$ и $u_0^{[2s]}(0)$ можно найти, определив разложение λ_0.

$$\lambda_0 = I_0 + \sum_{s=1} \frac{u_0^{[2s]}}{(2s)!} I_s \frac{1}{u_0(0)}, \quad I_0 = -\frac{2}{p}\ln(1+4p^2) - 8\operatorname{arctg}\frac{1}{2p} \quad (17/II)$$

Для $s \gg 0$ зав. имен по p дает $I_s \approx -8p \frac{1}{2^{2s}(2s-1)}$ (17/II). $I_0 \underset{p\to 0}{\approx} -4\pi + 8p$

$u_0''(0) = -4$, $\lambda_0 \cong -4\pi + 8p + \sum_{s=1} \frac{u_0^{[2s]}(0)}{u_0(0)} \frac{I_s}{(2s)!} = -4\pi + 8p + \frac{u_0''(0)}{u_0(0)} \frac{I_1}{2!} + \dots =$

$= -4\pi + 8p - \frac{4}{1}\frac{1}{2}(-8p)\frac{1}{2^2 \cdot 1} + \dots_{(s\geq 2)} = -4\pi + 8p + 4p + \dots$

Добавим $u_0^{(IV)}(0) = -3\cdot 2^4$ и (член $s=2$) $= -\frac{3\cdot 2^4}{1}\frac{1}{4!}(-8p)\frac{1}{2^4 \cdot 3} = \frac{8}{4!}p = \frac{1}{3}p$

→ $\lambda_0(p) = -4\pi + 8p + 4p + \frac{1}{3}p + \dots$ – ряд не производит быстрого сходящегося ряда (здесь $8+4+\frac{1}{3}+\dots = 4\pi$).

см. 29/VI — это часть хорошо опис. экс. фо-лу.

Надо проверить и само $\lambda_0 m_0(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx'\, g(x,x') m_0(x')$ – уравнение на СФ.

$$\int_{-1/2}^{1/2} dx' \ln\left[\frac{(x-x')^2}{(x-x')^2+p^2}\right]\sqrt{(1/2+x')(1/2-x')} = \int_{-1/2-x}^{+1/2-x} d\xi \ln\left(\frac{\xi^2}{\xi^2+p^2}\right)\sqrt{\frac{1}{4}-(x+\xi)^2}$$

При $x=0$ надо найти $J_0 = \int_{-1/2}^{1/2} d\xi \ln\left(\frac{\xi^2}{\xi^2+p^2}\right)\sqrt{1/4-\xi^2} = \left|\xi = \frac{1}{2}\sin t\right| =$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt \cos t \ln\left(\frac{1/4\sin^2 t}{1/4\sin^2 t + p^2}\right)\frac{1}{2}\cos t = \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt \cos^2 t \ln\left(\frac{\sin^2 t}{\sin^2 t + 4p^2}\right)$$

$$J_0 = \int_{-1/2}^{1/2} d\xi \ln\left(\frac{\xi^2}{\xi^2+p^2}\right)\sqrt{(1/2)^2-\xi^2} = 2\int_0^{1/2} d\xi(\cdot) = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{1/2} d\xi \ln(\cdot)\sqrt{1-(2\xi)^2} = \left|2\xi = x\right| =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{2} \ln\left[\frac{(x/2)^2}{(x/2)^2+p^2}\right]\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 dx\sqrt{1-x^2}\left[2\ln x - \ln(x^2+4p^2)\right] =$$

$$= \int_0^1 dx \ln x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\int_0^1 dx\sqrt{1-x^2}\ln(x^2+4p^2) = -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 dx\sqrt{1-x^2} \quad (*)$$

$$(*)\left[\ln\left(1+\frac{x^2}{4p^2}\right) - \ln\frac{1}{4p^2}\right] = -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\left[\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+1/(4p^2)}}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{1+1/(4p^2)}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{4p^2}}}\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\ln(4p^2)\int_0^1 dx\sqrt{1-x^2} = -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{\pi}{4}\left[\ln\left(\frac{2p+\sqrt{4p^2+1}}{4p}\right) + \frac{1}{2}\frac{2p-\sqrt{4p^2+1}}{2p+\sqrt{4p^2+1}}\right] -$$

$$-\frac{1}{2}2\ln(2p)\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{\pi}{4}\ln\left(p+\sqrt{p^2+1/4}\right) + \frac{\pi}{4}\ln 2p - \frac{\pi}{8}\frac{2p-\sqrt{\cdot}}{2p+\sqrt{\cdot}} = \frac{\pi}{4}\ln(2p)$$

$$= -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\ln\left(2p+\sqrt{4p^2+1}\right) - \frac{\pi}{8}\frac{2p-\sqrt{4p^2+1}}{2p+\sqrt{4p^2+1}}$$

Escaneado con CamScanner

Date. 29 · 04 · Wires

29/IV $\lambda_0 m_0(x) = \frac{2}{p}\int_{-1/2}^{1/2} dx' \ln\left[\frac{(x-x')^2}{(x-x')^2+p^2}\right] m_0(x')$, пробуем $m_0(x)=\sqrt{\frac14 - x^2}$

$$\lambda_0 m_0(0) = \frac{2}{p}\int_{-1/2}^{1/2} dx' \ln\left[\frac{x'^2}{x'^2+p^2}\right]\sqrt{\tfrac14 - x'^2} = \frac{2}{p} J_0 = \frac{2}{p}\left[-\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\ln\left(2p+\sqrt{4p^2+1}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{\pi}{8}\frac{2p-\sqrt{4p^2+1}}{2p+\sqrt{4p^2+1}}\right] = -\frac{\pi}{2}\frac{1}{p}\left[\ln\left(2p+\sqrt{4p^2+1}\right) + \frac12 + \frac12\frac{2p-\sqrt{(\cdot)}}{2p+\sqrt{(\cdot)}}\right] =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\frac{1}{p}\left[\ln\left(2p+\sqrt{4p^2+1}\right) + \frac{2p}{2p+\sqrt{4p^2+1}}\right],$$ но $m_0(0)=\frac12$. Откуда при малых p.

$$\lambda_0(p) = -\frac{\pi}{p}\left[\frac{2p}{2p+\sqrt{4p^2+1}} + \ln\left(2p+\sqrt{1+4p^2}\right)\right].$$ При $p \ll 1$ получим

$$\to \lambda_0(p\ll1) = -\pi\left[\frac{2}{2p+1+2p^2} + \frac1p\ln\left(2p+1+2p^2\right)\right] = -\pi\left[2(1-2p) + \right.$$

$$\left. + \frac1p\cdot 2p + O(p^2)\right] = -4\pi + 4\pi p,$$ $\left(-\frac{\lambda_0(p)}{4\pi} = 1-p\right)$, тогда как $-\frac{\lambda_0^{\text{сфер}}}{4\pi} = 1-\frac{2}{\pi}p$

$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \operatorname{Arsh} x$

$$\lambda_0(p) = -\pi\left[\frac{2}{2p+\sqrt{1+4p^2}} + \frac1p \operatorname{Arsh}(2p)\right],$$ $\operatorname{Arsh}(x) = x - \frac16 x^3 + \dots,\ x\to 0.$

СЗ в предположении $m_0(x)=\sqrt{\frac14 - x^2}$ чисто магнитостат. СФ.

Но вообще $\lambda_0\sqrt{\frac14 - x^2} = \frac{2}{p}\int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi \ln\left[\frac{\xi^2}{\xi^2+p^2}\right]\sqrt{\frac14 - (x+\xi)^2}$ должно выполн. если СФ действительно $m_0(x)=\sqrt{\frac14 - x^2}$.

→ Полезное представление ядра: $g(\xi) = \frac{2}{p}\ln\left(\frac{\xi^2}{\xi^2+p^2}\right) = -\frac{4}{p}\int_0^p dz \frac{z}{z^2+\xi^2}$

$$g(\xi) = \frac{2}{p}\ln\left(\frac{\xi^2}{\xi^2+p^2}\right) = 2\int_0^\infty dz \cos(\xi z)\frac{e^{-pz}-1}{z}$$ или $g(\xi) = -\frac{4}{p}\int_0^\infty dx\, e^{-|\xi|x}\frac{1-\cos px}{x}$

$$I_s = \int_{-1/2}^{1/2} d\xi\, g(\xi)\xi^{2s} = -\frac{4}{p}\int_0^\infty dx \frac{(1-\cos px)}{x}\int_{-1/2}^{1/2} d\xi\, e^{-|\xi|x}\xi^{2s}$$

$$\lambda_0 m_0'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\lambda_0\sqrt{\tfrac14 - x^2} = \frac{2}{p}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi \ln(\cdot)\sqrt{\tfrac14-(x+\xi)^2} = \frac{2}{p}\frac12\ln(\cdot)\sqrt{\tfrac14-(\tfrac12-x+x)^2} - \frac{2}{p}\frac12\ln(\cdot)\sqrt{\tfrac14-\tfrac14}$$

$$+ \frac{2}{p}\int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi \ln(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{\tfrac14-(x+\xi)^2} = \frac{2}{p}\int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi \ln(\cdot)\frac{1\cdot(-2)(x+\xi)}{2\sqrt{\tfrac14-(x+\xi)^2}} = -\frac{2}{p}\int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi \ln\left(\frac{\xi^2}{\xi^2+p^2}\right)\frac{(x+\xi)}{\sqrt{\tfrac14-(x+\xi)^2}}$$

$\forall\, m_0(x) = m_0(0) + \frac12 m_0''(0)x^2$ в силу четности $m_0(x)$, т.е. $m_0'(0)=0$ должна.

$$\lambda_0 m_0'(0) = -\frac{2}{p}\int_{-1/2}^{1/2} d\xi \ln\left(\frac{\xi^2}{\xi^2+p^2}\right)\frac{\xi}{\sqrt{\tfrac14-\xi^2}} = 0$$ – верно. С $m_0''(x)$ сложнее.

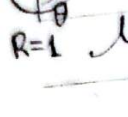
Следующие кандидаты на СФ есть $P_2^1(2x) \sim x\sqrt{1-4x^2}$ и $P_2^2(2x) \sim (1-4x^2)$.

→ Нужно проверить $m_0(x)=\sqrt{\frac14 - x^2}$ для больших p, когда $g(x,x')$ будет далека от $-4\delta(x-x')$. Тогда любая $m_0(x)$ не пройдет

Date. 30. 06. 2D-Model of Vortex by Bryant-Suhl

Лит. обзор по Physica B, C, E. 30/VI

→ Начинаем с работы P. Bryant, H. Suhl, JAP 66, 4329 (1989) „Micromagnetics Below saturation". Они дают аналитическое решение для soft 2D-магнит. доза в поле (m_z - нет, обмена - нет).



Всюм. функция для цилиндра: $g(\theta) = 1 - \sqrt{1+h^2+2h\cos\theta}$, $h = \frac{H_0}{2\pi M_s}$ ($h = \frac{H_0}{4\pi M_s}$?)

Линии $A(x,y) = const$ ($\vec{A} = (0,0,A)$, $\vec{m} = rot\vec{A}$) есть $\begin{cases} x = (A-g)\cos\theta + g'\sin\theta \\ y = (A-g)\sin\theta - g'\cos\theta \end{cases}$ (*)

$m_x = \frac{\partial A}{\partial y}$, $m_y = -\frac{\partial A}{\partial x}$. 1) При $h=0$, $g(\theta)=0$ $\begin{cases} x = A\cos\theta \\ y = A\sin\theta \end{cases} \to A^2 = x^2+y^2$

$A(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ и $m_x = \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{1\cdot 2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\rho} = \sin\varphi$, $m_y = -\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{x}{\rho} = -\cos\varphi$

и  - получим vortex Usova, но без „core".
vortex при $h=0$

2) $h \neq 0$, θ - параметр надо исключить. $\theta = \theta(x,y)$. $g'(\theta) = \frac{h\sin\theta}{\sqrt{1+h^2+2h\cos\theta}}$

$-x\sin\theta + y\cos\theta + \frac{h\sin\theta}{\sqrt{1+h^2+2h\cos\theta}} = 0$ задает $\theta(x,y)$ для цил. дома.

При $h \ll 1$ $(h-x)\sin\theta + y\cos\theta = 0$, $tg\theta(x,y) = \frac{y}{x-h}$

Вообще $\theta = \varphi + \pi/2$, где φ - полярный угол.

$x^2+y^2 = [A-g(\theta)]^2 + [g'(\theta)]^2 = x^2\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta + 2xy\cos\theta\sin\theta + [g'(\theta)]^2 \to$

→ Следовательно $-x\sin\theta + y\cos\theta = g'(\theta)$.

Продифф. (*) по $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$: $1 = \left(\frac{\partial A}{\partial x} - g'(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\cos\theta + \ldots$ не то.

$A(x,y)$ находится из сист. $\left\{\begin{array}{ll} A(x,y) = x\cos\theta + y\sin\theta + g(\theta) & (1) \\ -x\sin\theta + y\cos\theta + g'(\theta) = 0 & (2) \end{array}\right\}$

~~б) дано $x(\theta)$, $y(\theta)$ как от параметра.~~

$m_x = \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}$, $A(\theta) = ?$ $\theta(x,y)$ - задано неявно как (2).

$m_x = \frac{\partial A}{\partial y} = x(-\sin\theta)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \sin\theta + y\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial y} + g'(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial y} = \sin\theta + \left[-x\sin\theta + y\cos\theta + g'(\theta)\right] \times \frac{\partial\theta}{\partial y} = \sin\theta$ (!)

$-m_y = +\frac{\partial A}{\partial x} = \cos\theta + (-x)\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} + y\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} + g'(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x} = \cos\theta$

Итого $\left\{\begin{array}{l} m_x(x,y) = \sin\theta(x,y) \\ m_y(x,y) = -\cos\theta(x,y) \end{array}\right\}$, при $h \to 0$, $\theta(x,y) = \varphi$ - обыч. полярный угол y

и получаем vortex $m_x = \sin\varphi$, $m_y = -\cos\varphi$

А сама $\theta(x,y)$ находится из ур-я $-x\sin\theta + y\cos\theta + g'(\theta) = 0$,

Escaneado con CamScanner

Date. . .

косое при $h=0$ даст $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\theta$, т.е. $\theta=\varphi$ - полар. угол.

При $h \ll 1$ $\operatorname{tg}\theta(x,y) = \frac{y}{x-h}$, $m_x = \sin\theta = \sin\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x-h}\right) = \frac{y/(x-h)}{\sqrt{1+y^2/(x-h)^2}} =$

$= \frac{y}{\sqrt{(x-h)^2+y^2}}$, $m_y = -\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{1+y^2/(x-h)^2}} = -\frac{(x-h)}{\sqrt{(h-x)^2+y^2}}$ ...



похоже на модель "rigid" vortex от 6/IV ($S \to -h$, смен. $m_x \to -m_x$, $x \to -x$).

Модель (B.-S. при $h=1$ и "rigid vortex") совпадут, если $S = h = \frac{H}{4\pi N M_S}$. Согласно 11/IV равновесное смещение в модели "rigid" vortex $S_0 = \frac{H}{M_S \cdot 2a} = \frac{H}{M_S}\frac{1}{4\pi F(\beta) - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2} \approx$

$\approx$ (если объемом R_0 пренебречь) $\approx \frac{H}{4\pi F(\beta) M_S} = h$ модели B.S. (Bryanta-Suhla)

$N = F(\beta)$ - размаг. фактор цилиндра в плоскости. $S_0 = h$ выполняется, если объемом пренебречь и $2\pi M_S$ (модели B.S.) заменить на $4\pi F(\beta) M_S$.

Вывод: модель B.-S. в слабом поле ($h \ll 1$) по $\vec{m}(x)$ эквивалентна модели "rigid" vortex в большом доле $R \gg R_0$ и вне "core".

Но "core" вклада в $\langle \vec{M} \rangle_{V_d}$ не дает или дает малый вклад, если выкинуть границу ($\delta \ll R$) доля.

Только надо $h = \frac{H}{4\pi N M_S}$, как B.S. писали в более ранней статье APL, Jan 89.

В модели B.-S. нет "core", но это и неважно для $\langle \vec{M} \rangle_{V_d}$ в $\vec{H}$, т.к.

Зато B.S. - модель имеет смысл и при $h \sim 1$ (в отличие от rigid vortex модели верной при $h \ll 1$) $\Rightarrow$ это позволяет более точно найти $\langle \vec{M} \rangle_{V_d} = f(H)$, H_n, H_{an}.

В конечном h: $m_x = \frac{y}{\sqrt{(x-h^*)^2+y^2}} = \sin\theta$, $m_y = -\cos\theta = -\frac{(x-h^*)}{\sqrt{(h^*-x)^2+y^2}}$,

где $h^* = \frac{h}{\sqrt{1+h^2+2h\cos\theta}}$, и сохранение зависит от θ. $h^* = h$, при $h \ll 1$.

$\cos^2\theta\left[(h^*-x)^2+y^2\right] = (x-h^*)^2$ или $y^2 = \sin^2\theta\left[(x-h^*)^2+y^2\right]$

$y^2\cos^2\theta = \sin^2\theta\,(x-h^*)^2$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x-h^*}$

$\cos\theta = z$, $y^2z^2 = (1-z^2)\left(x^2 + \frac{h^2}{1+h^2+2hz} - 2x\frac{h}{\sqrt{1+h^2+2hz}}\right)$

$y^2z^2 - (1-z^2)\left[x^2 + \frac{h^2}{1+h^2+2hz}\right] = (1-z^2)(-2)xh\frac{1}{\sqrt{1+h^2+2hz}}$

$y^2z^2(1+h^2+2hz) - (1-z^2)\left[x^2(1+h^2+2hz)+h^2\right] = -2xh(1-z^2)\sqrt{1+h^2+2hz}$ -

ур-е 6-ой степени отн. "z". Но надо знать только $\langle m_y \rangle_{V_d} = -\langle \cos\theta \rangle_{x,y}$

т.е. $\langle \cos\theta(x,y) \rangle_{x,y}$ для $M(H)$ петли гистерезиса в $\vec{H} \parallel Oy$.

В APL'89 B.S. утверждают, что $h=1$ явл. крит. точкой annihilation of "vortex" это согласуется с оценкой $H_{an}(S/R=1) = 4\pi F(\beta) M_S - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 M_S$ модели "rigid" vortex от 17/V.

Escaneado con CamScanner

1.07. h=1 (191) дом. с-ника B.S. при $h=1$ касается края дна.

модели B.S. исключая поле, что соответствует ли он annihilation?

Annih. означает поле h при котором впервые $\langle m_x\rangle_{x,y} = \langle \sin\theta\rangle_{x,y} = 0$, а точнее $\langle m_y\rangle_{x,y} = -\langle\cos\theta\rangle_{x,y}$ исчезновение сигнала. $\langle m_x\rangle_{x,y} \approx 0$ в силу симметрии.

Разумно h_{an} определить как то-ке, где $\frac{\partial\langle m_y\rangle_{x,y}}{\partial h}$ – max.

Если принять, следуя духу B.S. $h_{an}=1$, то модель B.S. для $h\ll 1$ и h_{an} ничем не лучше модели "rigid" vortex (RV)

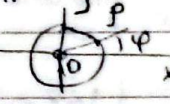
Разве что $\left(\frac{s}{R}=1\right) \to h_{an}$ для RV-модели было предположением, а в B.S.-модели $h_{an}=1$ более обосновано.

Цил. дом в поле H в модели Bryant-Sin

В рамках B.-S. модели "вортех" в поле $h = H/(4\pi M_s)$: $\begin{cases} m_x = \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{(x-h^*)^2+y^2}} \\ m_y = -\cos\theta = -\dfrac{(x-h^*)}{\sqrt{(x-h^*)^2+y^2}} \end{cases}$, $h^* = \dfrac{h}{\sqrt{1+h^2+2h\cos\theta}}$ 1/VII

$\theta(x,y,h)$ определ. из : $-x\sin\theta + y\cos\theta + \dfrac{h\sin\theta}{\sqrt{1+2h\cos\theta+h^2}} = 0$ или $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x-h^*(\theta)}$

В полер. координатах с центром в центре дна



$\theta(\rho,\varphi,h)$ опр. из $-\rho\sin(\theta-\varphi) + \dfrac{h\sin\theta}{\sqrt{1+2h\cos\theta+h^2}} = 0$

$$\left(1+2h\cos\theta+h^2\right)\rho^2\sin^2(\theta-\varphi) = h^2\sin^2\theta$$

$$(x-h^*)^2+y^2 = x^2 - 2h^*x + (h^*)^2 + y^2 = \rho^2 - 2\rho\cos\varphi\, h^* + \frac{h^2}{1+h^2+2h\cos\theta}$$

$$\langle m_x\rangle_S = \frac{1}{\pi}\int_0^1 d\rho\,\rho \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{\rho\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho\cos\varphi\, h^*(\rho,\varphi) + \left[h^*(\rho,\varphi)\right]^2}}, \quad \langle m_y\rangle_S = \frac{1}{\pi}\int_S d^2\vec{\rho}\,\frac{(h^*-\rho\cos\varphi)}{\sqrt{\rho^2-2\rho\cos\varphi\, h^*+h^{*2}}}$$

$(R=1)$

$$\left\{\begin{array}{l} X(\theta,A) = [A-g(\theta)]\cos\theta + g'(\theta)\sin\theta \\ y(\theta,A) = [A-g(\theta)]\sin\theta + (-1)\,g'(\theta)\cos\theta \end{array}\right\}$$ можно рассм. как

параметрич. задание кривой $X(\theta)$, $y(\theta)$, где $A = \text{Const}$ (силовых линий $\vec{m}$-поля)

$\iint dx\,dy = J\left(\frac{x,y}{\theta,A}\right) d\theta\, dA$ – это неверно!

якобиан перехода к новым координатам θ, A.

если рассм. как замену переменных $(x,y \to \theta,A)$

$$J\left(\frac{x,y}{\theta,A}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \\ \frac{\partial x}{\partial A} & \frac{\partial y}{\partial A} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial A}\right) - \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial A}\right)$$

$$\frac{\partial x}{\partial\theta} = -g'\cos\theta + [A-g](-\sin\theta) + g''\sin\theta + g'\cos\theta\,; \quad \frac{\partial x}{\partial A} = \cos\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial\theta} = -g'\sin\theta + [A-g]\cos\theta - g''\cos\theta + g'\sin\theta\,; \quad \frac{\partial y}{\partial A} = \sin\theta$$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$$J\left(\frac{x,y}{\theta,A}\right) = \Big[-g'\cos\theta - (A-g)\sin\theta + g''\sin\theta + g'\cos\theta\Big]\sin\theta -$$

$$-\Big[-g'\sin\theta + (A-g)\cos\theta - g''\cos\theta + g'\sin\theta\Big]\cos\theta = -(A-g) + g''$$

? Берем ли Jac

$$\langle m_y\rangle_{S_d} = \frac{1}{S_d}\int dx\,dy\, m_y(x,y) = \frac{1}{S_d}\int d\theta \int dA\, J\left(\frac{x,y}{\theta,A}\right) m_y(\theta,A) =$$

$$= -\frac{1}{S_d}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{A_m} dA\,\big[g''(\theta) + g(\theta) - A\big]\cos\theta = \Big|\int d\theta A\cos\theta = 0\Big| = -\frac{A_m}{S_d}\int_0^{2\pi} d\theta\big[g''(\theta)+g(\theta)\big]\cos\theta$$

$$g(\theta) = 1 - \sqrt{1+h^2+2h\cos\theta},\quad g'(\theta) = \frac{h\sin\theta}{\sqrt{1+h^2+2h\cos\theta}},\quad \frac{1}{h}g''(\theta) = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+h^2+2h\cos\theta}} +$$

$$+ h\sin^2\theta\,\frac{1}{(1+h^2+2h\cos\theta)^{3/2}} = \frac{1}{(1+h^2+2h\cos\theta)^{3/2}}\big[\cos\theta(1+h^2+2h\cos\theta) + h\sin^2\theta\big] =$$

$$= \frac{[(1+h^2)\cos\theta + h(1+\cos^2\theta)]}{(1+h^2+2h\cos\theta)^{3/2}},\quad \text{НСАД } \langle m_y\rangle(h) \text{ не спасает.}$$

$$\langle m_y\rangle_{S_d} = -\frac{A_m}{S_d}\int_0^{2\pi} d\theta\cos\theta\left\{h\cdot\frac{(1+h^2)\cos\theta + h(1+\cos^2\theta)}{(\cdot)^{3/2}} + 1 - (1+h^2+2h\cos\theta)^{1/2}\right\} =$$

(не дает внимания)

$$= -\frac{A_m}{S_d}\int d\theta\cos\theta\,\frac{1}{(1+h^2+2h\cos\theta)^{3/2}}\Big\{h(1+h^2)\cos\theta + h^2(1+\cos^2\theta) - (1+h^2+2h\cos\theta)^2\Big\} =$$

$$= -\frac{A_m}{S_d}\int d\theta\cos\theta\,\frac{1}{(\cdot)^{3/2}}\Big\{h(1+h^2)\cos\theta + h^2(1+\cos^2\theta) - 1 - h^4 - 4h^3\cos\theta - 4h\cos\theta - 4h^2\cos^2\theta - 2h^2$$

$$= -\frac{A_m}{S_d}\int d\theta\cos\theta\,\frac{1}{(1+h^2+2h\cos\theta)^{3/2}}\Big\{-1 - 3h\cos\theta - 3h^3\cos\theta - h^2 - 3h^2\cos^2\theta - h^4\Big\} =$$

$$= \frac{A_m}{S_d}\int_0^{2\pi} d\theta\cos\theta\,\frac{1}{(\cdot)^{3/2}}\Big[1 + h^2 + h^4 + 3h\cos\theta\,(1+h^2+h\cos\theta)\Big]$$

$$J_n = \int_0^{2\pi} d\theta\,\frac{\cos^n\theta}{(1+h^2+2h\cos\theta)^{3/2}} \quad - \text{ранее.}$$

$$J_1 = \int_0^{2\pi} d\theta\,\frac{\cos\theta}{(1+h^2+2h\cos\theta)^{3/2}} = 2\int_0^{\pi} d\theta\,\frac{\cos\theta}{(h^2+1+2h\cos\theta)^{3/2}}$$

$$J_2 = 2\int_0^{\pi} d\theta\,\frac{\cos^2\theta}{(1+h^2+2h\cos\theta)^{3/2}} = 2(2h)^{-3/2}\int d\theta\,\frac{\cos^2\theta}{(\beta+\cos\theta)^{3/2}} = \frac{2}{(2h)^{3/2}}\int_0^{\pi} d\theta\,\frac{1-\sin^2\theta}{(\beta+\cos\theta)^{3/2}} =$$

$$\left(\beta = \frac{1+h^2}{2h}\right)$$

$$= \left|\Gamma p.-P.\,3.666\right| = \frac{2}{(2h)^{3/2}}\left[\underset{\nu=0,\,\mu=-1}{(\text{не нужно так})} - \frac{2^{3/2}\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/2)}\underset{\nu=1,\,\mu=0}{Q^0_{1/2}(\beta)}\right]$$

Иначе:

$$\langle m_y\rangle_{S_d} = -\frac{A_m}{S_d}\int_0^{2\pi} d\theta\cos\theta\left[\frac{h\cos\theta}{\sqrt{1+h^2+2h\cos\theta}} + \frac{h^2\sin^2\theta}{(1+h^2+2h\cos\theta)^{3/2}} - (1+h^2+2h\cos\theta)^{1/2}\right]$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\theta\,\frac{\cos^2\theta}{\sqrt{1+h^2+2h\cos\theta}} = 2\int_0^{\pi} d\theta\,\frac{(1-\sin^2\theta)}{\sqrt{1+h^2+2h\cos\theta}} = 2\int_0^{\pi} d\theta\,\frac{1}{\sqrt{1+h^2+2h\cos\theta}}$$

Escaneado con CamScanner

Date.

$$-\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{\beta+\cos\theta}} = 2\cdot 2K(h) - \frac{2}{(2h)^{1/2}} \frac{2^{3/2} e^{-i\pi} (\beta^2-1)^{1/2}\Gamma(3/2)}{\Gamma(5/2)} Q^1_{1/2}(\beta) =$$

$(\nu=1, \mu=1)$

$$= 4K(h) - \frac{2}{2^{1/2}h^{1/2}} \frac{2^{3/2} e^{-i\pi}(\beta^2-1)^{1/2}\Gamma(3/2)}{\frac{3}{2}\Gamma(3/2)} Q^1_{1/2}(\beta) = 4K(h) + \frac{8}{3}\frac{(\beta^2-1)^{1/2}}{h^{1/2}} Q^1_{1/2}(\beta)$$

$$= \left| \beta = \frac{1+h^2}{2h},\ \beta^2-1 = \frac{1+h^4+2h^2}{4h^2} - 1 = \frac{(h^2-1)^2}{4h^2},\ \frac{(\beta^2-1)^{1/2}}{h^{1/2}} = \frac{|h^2-1|}{2h\cdot h^{1/2}} \right| =$$

$$= 4K(h) + \frac{4}{3}\frac{|h^2-1|}{h^{3/2}} Q^1_{1/2}\left(\frac{1+h^2}{2h}\right)$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\theta \cos\theta \frac{\sin^2\theta}{(1+h^2+2h\cos\theta)^{3/2}} = 2\int_0^{\pi} d\theta\cos\theta \frac{\sin^2\theta}{(\cdot)^{3/2}} \frac{[1+h^2+2h\cos\theta - 2h\cos\theta]}{(h^2+1)} =$$

$$= \frac{2}{(1+h^2)}\int_0^{\pi} d\theta \cos\theta \frac{\sin^2\theta}{(1+h^2+2h\cos\theta)^{1/2}} - \frac{4h}{(1+h^2)}\int_0^{\pi} d\theta \frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{(1+h^2+2h\cos\theta)^{3/2}} =$$

$$= (\cdot) - \frac{4h}{(1+h^2)}\int_0^{\pi} d\theta \frac{(\sin^2\theta - \sin^4\theta)}{(1+h^2+2h\cos\theta)^{3/2}} = (\cdot) - \frac{4h}{(1+h^2)}\frac{1}{(2h)^{3/2}}\int d\theta \frac{(\sin^2\theta - \sin^4\theta)}{(\beta+\cos\theta)^{3/2}} =$$

$$= (\cdot) - \frac{4h}{(1+h^2)(2h)^{3/2}}\left[\underset{\nu=1,\ \mu=0}{\frac{2^{3/2}\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/2)} Q^0_{1/2}(\beta)} - \underset{\nu=2,\ \mu=1}{\frac{2^{5/2}(-1)(\beta^2-1)^{1/2}\Gamma(5/2)}{\Gamma(-1/2)} Q^1_{3/2}(\beta)}\right] =$$

$$= (\cdot) - \frac{4h}{(1+h^2)(2h)^{3/2}}\left[2^{3/2} Q^0_{1/2}(\beta) + 2^{5/2}\frac{2}{5}(\beta^2-1)^{1/2} Q^1_{3/2}(\beta)\right] =$$

$$= (\cdot) - \frac{4h^{-1/2}}{(1+h^2)}\left[Q^0_{1/2}(\beta) + \frac{4}{5}(\beta^2-1)^{1/2} Q^1_{3/2}(\beta)\right]$$

$$(\cdot) = I_2' = \frac{2}{(1+h^2)}\int_0^{\pi} d\theta \frac{\cos\theta\sin^2\theta}{(1+h^2+2h\cos\theta)^{1/2}} - ?$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} d\theta\cos\theta\sqrt{1+h^2+2h\cos\theta} = 2\int_0^{\pi} d\theta \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+h^2+2h\cos\theta}}\left[1+h^2+2h\cos\theta\right] =$$

$$= 2(1+h^2)\int_0^{\pi} d\theta \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+h^2+2h\cos\theta}} + 4h\int_0^{\pi} d\theta \frac{(1-\sin^2\theta)}{\sqrt{1+h^2+2h\cos\theta}} =$$

$$= 2(1+h^2)\frac{2}{(-h)}\left[K(-h) - E(-h)\right] + 4h\cdot 2K(h) - 4h\int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1+h^2+2h\cos\theta}} =$$

$$= -\frac{4(1+h^2)}{h}\left[K(-h) - E(-h)\right] + 8hK(h) - 4h\frac{1}{(2h)^{1/2}}\underset{(\nu=1,\ \mu=1)}{2^{3/2}(-1)(\beta^2-1)^{1/2}\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(5/2)}} Q^1_{1/2}(\beta) =$$

$$= -\frac{4}{h}(1+h^2)\left[K(h) - E(h)\right] + 8hK(h) + 8\frac{h}{h^{1/2}}(\beta^2-1)^{1/2}\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)} Q^1_{1/2}(\beta) =$$

$$= -\frac{4}{h}(1+h^2)\left[K(h) - E(h)\right] + 8hK(h) + \frac{16}{3}h^{1/2}(\beta^2-1)^{1/2} Q^1_{1/2}(\beta)$$

Ocurrencia lógica $I_2' \sim \int_0^{\pi} d\theta \frac{\cos\theta\sin^2\theta}{(1+h^2+2h\cos\theta)^{1/2}}$

Escaneado con CamScanner

Date. 02. 07.

2/VII → $\langle m_y \rangle_{S_d} = -\frac{A_m}{\pi}\left[h I_1 + h^2 I_2 - I_3\right] = -\frac{A_m}{\pi}\left[4h K(h) + \frac{4}{3}\frac{|h^2-1|}{h^{1/2}} Q^1_{1/2}(\beta) + \right.$

$+ h^2 \frac{2}{(1+h^2)} \int_0^\pi d\theta \cos\theta \frac{\sin^2\theta}{(1+h^2+h\cos\theta)^{1/2}} - 4\frac{h^{3/2}}{(1+h^2)}\left\{ Q^0_{1/2}(\beta) + \frac{4}{5}(\beta^2-1)^{1/2} Q^1_{3/2}(\beta)\right\} +$

$\left. + \frac{4}{h}(1+h^2)[K(h)-E(h)] - 8h K(h) - \frac{16}{3} h^{1/2}(\beta^2-1)^{1/2} Q^1_{1/2}(\beta)\right] =$

$= -\frac{A_m}{\pi}\left[-\frac{4}{3}\frac{|h^2-1|}{h^{1/2}} Q^1_{1/2} - \frac{4h^{3/2}}{(1+h^2)} Q^0_{1/2}(\beta) - \frac{4h^{3/2}}{(1+h^2)}\frac{4}{5}\frac{|h^2-1|}{2h} Q^1_{3/2}(\beta) + \right.$

$\left. + \frac{4}{h} K(h) - \frac{4}{h}(1+h^2)E(h) + \frac{2h^2}{(1+h^2)} \int_0^\pi d\theta \frac{\cos\theta \sin^2\theta}{(1+h^2+2h\cos\theta)^{1/2}}\right] =$

$= -\frac{A_m}{\pi}\left[-\frac{4}{3}\frac{|h^2-1|}{h^{1/2}} Q^1_{1/2}(\beta) - 4\frac{h^{3/2}}{(1+h^2)} Q^0_{1/2}(\beta) - \frac{8}{5}\frac{h^{1/2}|h^2-1|}{(1+h^2)} Q^1_{3/2}(\beta) + \right.$

$\left. + \frac{4}{h}[K(h)-E(h)] - 4hE(h) + \frac{2h^2}{(1+h^2)} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin^2\theta\cos\theta}{(1+h^2+2h\cos\theta)^{1/2}}\right]$, $\beta = \frac{1+h^2}{2h} =$

$= \frac{1}{2}\left(h + \frac{1}{h}\right) = ch$

$Q^m_{n-1/2}(ch y) = Q^m_{n-1/2}(\beta)$, $e^y = h$, $\boxed{h = e^{-y}}$ $h \to 0$ $\beta = ch y \to \infty$, $y \to \infty$

$h \to 1$ $\beta = ch y \to 1$, $y \to 0$

При $h \to 0$, $y \to \infty$:

асимптотика $Q^m_{n-1/2} \approx (-1)^m \frac{2^m \Gamma(n+m+1/2)\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+1)} \frac{1}{2^m} e^{+ym} e^{-(n+m+1/2)y} \times$

$\times F\left(m+1/2, n+m+1/2, n+1, e^{-2y}\right) = (-1)^m \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n+m+1/2)}{\Gamma(n+1)} e^{-(n+1/2)y}\left[1 + O(e^{-2y})\right]$

При $h \ll 1$ $\langle m_y \rangle_{S_d} = -\frac{A_m}{\pi}\left[-\frac{4}{3}\frac{1}{h^{1/2}}(-1)\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(2)} e^{-\frac{3}{2}y} - 4\frac{h^{3/2}}{1}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(2)} e^{-\frac{3}{2}y} - \right.$

$\left. - \frac{8}{5} h^{1/2}(-1)\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(3+1/2)}{\Gamma(3)} e^{-\frac{5}{2}y} + \frac{4}{h^2}\frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1}{4}h^2 - \left(1 - \frac{1}{4}h^2\right)\right] - 4h\frac{\pi}{2} + O(h^3)\right] =$

$= \left|e^{-y} = h\right| = -\frac{A_m}{\pi}\left[-\frac{4}{3}(-1)\sqrt{\pi}\, h \frac{3}{4}\sqrt{\pi} + 2\frac{\pi}{h}\frac{1}{2}h^2 - 2\pi h + O(h^3)\right] =$

$= -\frac{A_m}{\pi}\left[\pi h + \pi h - 2\pi h + O(h^3)\right] = 0 + O(h^3)$ – сходится (неверно должен быть член $\sim h$. Проверь)

→ Правильный предел для $h \to 0$ (согласно п/IV) $\langle m_y \rangle_S = \frac{\langle M_y \rangle_S}{M_s} = \frac{1}{2a} H = \frac{H}{4\pi F(\beta) M_s} = h$.

Видимо член $h^2 I_2$ посчитан неверно. Проверим:

$h^2 I_2 = h^2(\cdot) - \frac{4h^{3/2}}{(1+h^2)}\left[Q^0_{1/2}(\beta) + \frac{4}{5}\frac{|h^2-1|}{2h} Q^1_{3/2}(\beta)\right] =$

$= h^2(\cdot) - \frac{4h^{3/2}}{(1+h^2)}\left[\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(2)} h^{3/2} + \frac{2}{5}\frac{|h^2-1|}{h}(-1)\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(3+1/2)}{\Gamma(3)} h^{5/2}\right]$ → не дает вклада в $\sim h$

Escaneado con CamScanner

$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} z + O(z^2),\ z \to 0$

Date. . . $\frac{1+h^2}{2h} = \beta = \mathrm{ch}y$ $\quad z = e^{-2y} \to 0,\ y \to \infty,\ e^{-y} = h \to 0$

$$Q^m_{n-1/2}(\mathrm{ch}y) \underset{(y\to\infty)}{=} (-1)^m\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(n+m+1/2)}{\Gamma(n+1)} e^{-(n+1/2)y}\left[1 + \frac{(m+\frac12)(n+m+\frac12)}{(n+1)} e^{-2y} + \dots\right] =$$

$$= (-1)^m\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(n+m+1/2)}{\Gamma(n+1)} h^{n+1/2}\left[1 + \frac{(m+1/2)(n+m+1/2)}{(n+1)} h^2 + \dots\right]$$

Вычисление расш. только hI_1 и I_3.

$$\langle m_y\rangle_s \underset{h\to 0}{=} -\frac{Am}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\cos\theta\left[h\cos\theta - \sqrt{1+2h\cos\theta}\right] = -\frac{Am}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\cos\theta\left[h\cos\theta - (1+h\cos\theta)\right] = 0 + O(h^2).$$ Вот так да!

Отсюда в разложении $\langle m_y\rangle_s$ $\underset{h\to 0}{}$ члена $\sim h$ не останется. Видимо $\langle m_y\rangle_s$ неверно посчит. модели "rigid" vertex.

Попытаемся найти явно $\theta(x,y)$. 4/VII

$$A(\theta) = x\cos\theta + y\sin\theta + g = [A-g]\cos^2\theta + g'\cos\theta\sin\theta + \dots = A(\theta)$$ тождество.

Ур-е для $\theta(x,y)$: $\quad -x\sin\theta + y\cos\theta + \frac{h\sin\theta}{\sqrt{1+h^2+2h\cos\theta}} = 0.$

$$\sin\theta\left[\frac{h}{\sqrt{1+h^2+2h\cos\theta}} - x\right] + y\cos\theta = 0, \qquad \left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t\right)$$

$$-x\frac{2t}{1+t^2} + y\frac{1-t^2}{1+t^2} = -h\frac{2t}{1+t^2}\frac{1}{\sqrt{1+h^2+2h\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}}$$

$$y(1-t^2) - 2tx = -2ht\frac{1}{\sqrt{(\cdot)}},\quad y^2(1-t^2)^2 + 4t^2x^2 - 4t(1-t^2)xy = \frac{4h^2t^2}{1+h^2+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)2h}$$

$$\left[(1+h^2)(1+t^2) + 2h(1-t^2)\right]\left[y^2(1-t^2)^2 + 4t^2x^2 - 4t(1-t^2)xy\right] = 4h^2t^2(1+t^2)$$

$$\left[(1+h)^2 + (1-h)^2t^2\right]\left[y^2(1-t^2)^2 + 4t^2x^2 - 4t(1-t^2)xy\right] = 4h^2t^2(1+t^2).$$

— опять получим ур-е 6-ой степени отн. $t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = F(x,y,h)$.

→ Надо найти $\int_{S_A} dx\,dy\cos\theta$, где $\theta(x,y)$ определ. неявно $F(x,y,\theta) = 0$.

Вблизи насыщения $\theta(x,y) = \frac{\pi}{2} + \alpha(x,y)$, $\alpha(x,y) \ll 1$

$$-x\sin(\pi/2+\alpha) + y\cos(\pi/2+\alpha) + h\frac{\sin(\pi/2+\alpha)}{\sqrt{1+h^2+2h\cos(\pi/2+\alpha)}} = 0$$

$$-x\cos\alpha + y(-\sin\alpha) + \frac{h\cos\alpha}{\sqrt{1+h^2-2h\sin\alpha}} = 0,$$ в лин. по α приближении

$$-x - y\alpha + h\frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2h}{1+h^2}\alpha}} = -x - y\alpha + \frac{h}{\sqrt{1+h^2}}\left(1 + \frac{h}{(h^2+1)}\alpha\right) = 0$$

$$-x + \frac{h}{\sqrt{1+h^2}} + \alpha\left[-y + \frac{h^2}{(1+h^2)^{3/2}}\right] = 0,\quad \alpha(x,y) = \frac{\left(h/\sqrt{1+h^2} - x\right)}{y - \frac{h^2}{(1+h^2)^{3/2}}} - ?$$

Откуда видно, что $\alpha(x,y) \ll 1$? И разве $\theta_0 = \pi/2$ есть решение ур. на $\theta(x,y)$ хотя бы для $h \gg 1$? Нет, не является.

В $M_y = H$ данное было $-\cos\theta = 1$, $\sin\theta = 0$, что $h \gg 1$. Вот $-\cos\theta = -\sin$

Date. . .

① Видимо $\theta_0 = \pi$ будет решением. При $\theta_0 = \pi$ $y\cos\theta_0 = 0$, $y = 0$? Ищем.

→ Видимо Bryant-Kahl перестарались и однородного решения типа $\theta_0 = \pi$ не будет ни при каких h.

Пусть $\theta = \pi + \alpha$: $-x(-\alpha) + y(-\cos\alpha) + \dfrac{h(-\alpha)}{\sqrt{1+h^2+2h(-\cos\alpha)}} = 0$, мин. по α $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$

$x\alpha - y - \dfrac{h\alpha}{|1-h|} = 0$, $\alpha(x,y) = \dfrac{y}{x - \frac{h}{|1-h|}} = \dfrac{y|1-h|}{x|1-h| - h}$,

видно, что $\alpha \ll 1$ имеет смысл при $|h-1| \ll 1$.

Тогда критич. точка будет $h_c = 1$.

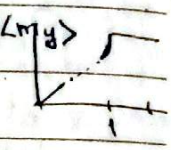
$\langle m_y \rangle_S = -\frac{1}{S}\int_{S_\alpha} dx\,dy\cos\theta = \left|\cos\theta = \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha = -1 + \frac{\alpha^2}{2}\right| = -\frac{1}{S}\int_S dx\,dy \times$

$\times\left[-1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right] = 1 - \frac{1}{2S}\int_S dx\,dy\,\alpha^2(x,y) = 1 - \frac{1}{2S}\int_S dx\,dy\,\frac{y^2(1-h)^2}{[x|1-h| - h]^2} = \left|\text{при } \frac{h}{R=1} \approx 1\right|$

$= 1 - \frac{1}{2S}(1-h)^2\int dx\,dy\,y^2 = 1 - \frac{(1-h)^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho\,\rho\,\rho^2\sin^2\varphi = 1 - \frac{(1-h)^2}{2\pi}\cdot\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1 \cdot \pi =$

$= 1 - \frac{1}{8}(1-h)^2$, $\boxed{\langle m_y \rangle_S = 1 - \frac{1}{8}(1-h)^2}$, при $h \to 1$

и $\langle m_y \rangle_S = h$ при $h \to 0$



Всего сов. 11/IV $\langle M_y \rangle_S = \frac{1}{2a} H_y = \dfrac{H_y}{4\pi F(\beta) - (R_0/R)^2} \approx \dfrac{H_y}{4\pi F(\beta)} = M_s \dfrac{H}{4\pi F(\beta)} = M_s h$.

Но $h_c = 1$ – это поле насыщения, а не annihilation. $h_{an} \le h_c$.

Wires

5/VII Для СФ,СЗ wires $\lambda m(x) = \int_0^1 dx'\,g(x,x')m(x')$, $g(x,x') = \frac{2}{\rho}\ln\left[\frac{(x-x')^2}{(x-x')^2+\rho^2}\right]$

С новыми предложили две идеи:

① расширить интервал до ∞ и посмотреть СФ СЗ, отобрав те СФ которые $\to 0$ при $x \to \infty$

② в пределе $\rho \to 0$ тщательнее проанализировать поведение на краях инт. $[0,1]$. Может там $g(x-x') = -4\pi\delta(x-x')$ иначе срабатывает не как обычная $\delta(\frac{x}{\xi})$-функция.

1) $\lambda m(0) = \frac{2}{\rho}\int_0^1 dx'\ln\left(\frac{x'^2}{x'^2+\rho^2}\right)m(x')$, $\delta\left(\frac{x}{\xi}\right) = \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\rho}{\rho^2+\frac{x^2}{\xi^2}}$

2) $\lambda\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_{x=0} = -4\rho\int_0^1 \frac{dx'}{x'}\frac{m(x')}{(x'^2+\rho^2)}$, $g\left(\frac{x}{\xi}\right) = -\frac{4}{\rho}\int_0^\rho dz\,\frac{z}{z^2+\frac{x^2}{\xi^2}}$

$m'(0)$ конечно → требует $m(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^\alpha$, $m(0) = 0$.

В 2) $\rho \to 0$ дает $\lambda m'(0) = -4\int_0^1 dx'\,\pi\delta(x')\frac{m(x')}{x'} = -4\pi\lim_{x\to 0}\frac{m(x)}{x}$, откуда для конечной $m'(0)$ надо $m(x) \sim x^\alpha$, $\alpha \ge 1$.

$\lambda[m] = \left[\int m^2(x)dx\right]^{-1}\int_0^1 dx\,dx'\,g(x,x')m(x)m(x') \to \min(\max)$

Escaneado con CamScanner

Date. 09.07. SW wizes

Уточнения, faxs Лора и Любанскому. Переписка. 6-8/VII
Написание Abstracts в Техас на MMM'01 (с Новиковым и Славновым).

$$\lambda m(x) = \int dx' g(x,x') m(x') \overset{\text{max при } x=x'}{\approx} \int dx' g(x,x') \left[m(x) + m'(x)(x'-x) \right] = \quad 9/VII$$

CP Wizes

$$= m(x) \int dx' g(x,x') + m'(x) \cdot \int dx' g(x,x')(x'-x) = \varphi(x) m(x) + \varphi_1(x) m'(x)$$ — было раньше.

I А какому ДР-ю удовлетворяет $\frac{\partial m(x)}{\partial x}$?

$$\lambda m'(x) = \lambda' \frac{\partial m(x)}{\partial x} = \int dx' \frac{\partial g(xx')}{\partial x} m(x') = \left| \begin{matrix} g(xx') = g(x-x') \\ \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial x'} \end{matrix} \right| = -\int dx' \frac{\partial g(xx')}{\partial x'} m(x') =$$

$$= \left| \begin{matrix} \int u\,dv = uv - \int v\,du \\ u = m, \quad v = g \frac{\partial g}{\partial x} dx' \end{matrix} \right| = \underbrace{-g(x,x') m(x') \Big|_0^1}_{=0,\ т.к.\ m(0,1)=0} + \int_0^1 g(xx')\, dm(x') = \int dx' g(x,x') \frac{\partial m(x')}{\partial x'}$$

т.е. $\lambda' \frac{\partial m(x)}{\partial x} = \int dx' g(x,x') \frac{\partial m(x')}{\partial x'}$ — $m(x)$ и $m'(x)$ удовлетв. одному и тому же инт. уравнению для $m(0)=0$

II Тогда $m(x') = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 d\xi\, g(x',\xi) m(\xi)$ и $\lambda m(x) = \int dx' g(x,x') \frac{1}{\lambda} \int d\xi\, g(x'\xi) m(\xi) =$

$$= \frac{1}{\lambda} \int d\xi \left[\int dx' g(xx') g(x'\xi) \right] m(\xi) \to \boxed{g(x,\xi) = \frac{1}{\lambda} \int dx' g(xx') g(x'\xi)}$$ — должно выполн. (*)

$\int dx' g(xx') g(x'\xi) = \int dx' g(x'x) g(x'\xi)$, $\lambda g(x,\xi) = \int dx' g(xx') g(x'\xi) \to$ то тогда при $\xi = 0$

$\lambda g(x,0) = \int dx' g(xx') g(x',0)$ и $m(x) = g(x,0)$ явл. СФ.

$m(x) = \frac{2}{\rho} \ln \left(\frac{x^2}{x^2+\rho^2} \right)$ — Ну-ну, ведь: $m(0) \to -\infty$

Меняя новый ξ как параметр, тогда $m(x,\xi) = \frac{2}{\rho} \ln \left[\frac{(x-\xi)^2}{(x-\xi)^2+\rho^2} \right]$, $\xi \neq 0$

Условие (*) не зависит от того, что $m(x)$ и $m'(x)$ удовлетв. одному инт. ур. То, что ФГ $g(x,\xi)$, удовлетв. инт. уравнению на СФ, ничего удивит. нет.

$$\lambda \left(\frac{\partial m}{\partial x} \right)_{x \to 0} = \int_0^1 dx' g(0,x') \frac{\partial m(x')}{\partial x'} = \frac{2}{\rho} \int_0^1 dx' \ln \left[\frac{x'^2}{x'^2+\rho^2} \right] m'(x')$$, конечность $m'(0)$ означает $\ln x' \cdot m'(x') \underset{x' \to 0}{\to} 0$, что выпол. при $m(x) \sim x^\alpha$ $(\alpha > 1)$, $m'(x) \sim x^{\alpha-1}$ и $\left[\lim_{x \to 0} x^{\alpha-1} \cdot \ln x \right] = 0$ для $\alpha > 1$, это уже нужно из 5/VII. $\alpha = 1$ тоже допустимо.

Если $m(x)$ и $m'(x)$ – СФ и $\int_0^1 dx' g(0,x') m(x') = 0$, то $m(x)$ – уникальная функция. $m(0) = m(1) = 0$. Понятно, что $g(xx') \sim \delta(x-x')$ с любой $m(x)$, $m(0)=0$ удовлетв. всем. условиям. Тогда $\lambda = -4\pi$.

Ведь $g(xx') = -4\pi \delta(xx')$ удовл. $\lambda g(xx') = (4\pi)^2 \delta(x-x') = (4\pi)^2 \int_0^1 d\xi\, \delta(x-\xi)\delta(x'-\xi)$

Date. 10.07. Разложение вблизи $\max g(x,x')$, $x' \approx x$

10/VII $\lambda m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g(xx') m(x') \approx$ расш. вблизи сим. $x'=x$ $\int_{-1/2}^{1/2} dx' g(xx')\left[m(x)+m'(x)(x'-x)\right] = I_0(x)m(x) + I_1(x)m'$

– можно рассм. как дифф-ур-ия на $m(x)$. Явный вид $I_{0,1}(x)$ – см. 2с/II. Слишком громоздкий.

Но при $\rho \to 0$: $\to I_1(x) \cong -\frac{2}{\rho^2}\left[(1/2-x)^2 \ln\left[1+\frac{\rho^2}{(1/2-x)^2}\right] - (1/2+x)^2 \ln\left[1+\frac{\rho^2}{(1/2+x)^2}\right] + \right.$

$\left. + \rho^2 \ln\left[\frac{(1/2-x)^2+\rho^2}{(1/2+x)^2+\rho^2}\right]\right] = -\frac{2}{\rho}\left[\underbrace{\rho^2-\rho^2}_{\text{здесь наглухо}} + \rho^2 2\ln\frac{(1/2-x)}{(1/2+x)}\right] = -4\rho \cdot \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1/2-x}{1/2+x}\right)$

$\to I_0(x) = \frac{2}{\rho}\left[-\frac{1}{2}\ln\left[1+\frac{\rho^2}{(1/2-x)^2}\right] - 1/2\ln\left[1+\frac{\rho^2}{(1/2+x)^2}\right] - x\ln\left[1+\frac{\rho^2}{(1/2+x)^2}\right] + \right.$

$\left. + x\ln\left[1+\frac{\rho^2}{(1/2-x)^2}\right] - 2\rho\left[\operatorname{arctg}\frac{(1/2-x)}{\rho} + \operatorname{arctg}\frac{(1/2+x)}{\rho}\right]\right] = \left|x\in[-1/2, 1/2]\right| =$

$= \frac{2}{\rho}\left[(x-\frac{1}{2})\frac{\rho^2}{(1/2-x)^2} - (x+1/2)\frac{\rho^2}{(1/2+x)^2} - 2\rho\left[\operatorname{arctg}\frac{(1/2-x)}{\rho} + \operatorname{arctg}\frac{(1/2+x)}{\rho}\right]\right] =$

$= \frac{2}{\rho}\left[\frac{\rho^2}{x^2-1/4} - 2\rho \operatorname{arctg}\left(\frac{\rho}{\rho^2+(x^2-1/4)}\right)\right] = \frac{2\rho}{x^2-1/4} - 4\operatorname{arctg}\frac{\rho}{\rho^2+(x^2-1/4)}$ –

– такое разложение по $\rho \to 0$ плохо при $|x| \to 1/2$, на краях дома.

Если $|x|$ не $\to 1/2$, то $\lambda m(x) = 2\rho\left[\frac{1}{x^2-1/4} - 2\right]m(x) + I_1(x)m'(x)$

$I_0(x)$ уточнили, ведь $\operatorname{arctg} x = x$, $x \to 0$ и $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}$, $x \to \infty$

$\operatorname{arctg}\frac{(1/2-x)}{\rho} + \operatorname{arctg}\frac{(1/2+x)}{\rho} = \left|\text{$|x|$ не} \to 1/2, \text{ поэтому } \frac{\rho}{|x\pm 1/2|} \ll 1\right| = \frac{\pi}{2} - \frac{\rho}{(1/2-x)} + \frac{\pi}{2} - \frac{\rho}{(1/2+x)} =$

$= \pi - \rho\left[\frac{1}{1/2-x} + \frac{1}{1/2+x}\right] = \pi - \rho\frac{1}{(1/4-x^2)}$

$I_0(x) \underset{\rho\to 0}{\approx} \frac{2}{\rho}\left[\frac{\rho^2}{(x^2-1/4)} - 2\rho\left[\pi - \frac{\rho}{(1/4-x^2)}\right]\right] = -4\pi - \frac{2\rho}{x^2-1/4}$

$$\lambda m(x) = \left[-4\pi - \frac{2\rho}{(x^2-1/4)}\right]m(x) - 4\rho\cdot\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1/2-x}{1/2+x}\right)\cdot m'(x), \quad x\in[-1/2, 1/2]$$

– это при $\rho \to 0$, но $|x|$ не $\to 1/2$

Если $x \to 0$ (центр дома) $\ln\left(\frac{1/2-x}{1/2+x}\right) = -\ln\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right) = -2\operatorname{Arth}(x) \cong -2\cdot 2x = -4x \to 0$

(!) $\lambda_0 m(0) = \left[-4\pi + 8\rho\right]m(0) \to \lambda_0 = -4\pi + 8\rho$, $-\frac{\lambda_0}{4\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}\rho$ – радиус собственных

~~Погранслои для разложения~~ $I_0(x)$, $I_1(x)$ не $\rho \ll 1$, а $\frac{\rho}{|x\pm 1/2|}$, т.е. разложение не работает на краях дома $|x| \to 1/2$.

Пусть $x \ll 1$ (вблизи центра дома): $\lambda m(x) = \left[-4\pi + 8\rho\right]m(x) - 4\rho(-4x)m'(x)$

$m(x) = m(0) + m'(0)x$, $m'(x) = m'(0) \to$ ~~$\left[\lambda + 4\pi - 8\rho\right]\left[m(0) + m'(0)x\right] = 16\rho x m'(0)$~~

$\left[\lambda + 4\pi - 8\rho\right]m(0) = 0$, $\lambda_0 = -4\pi + 8\rho$

а) СФ – четная, $m'(0) = 0$, с центр. до x

Escaneado con CamScanner

Date.

б) СФ - нетеровые $m'(0) \neq 0$, но $m(0) = 0$: $\left[\lambda + 4\pi - 8p\right] \times m'(0) = 16p \times m'(0)$

$\lambda_1 + 4\pi - 8p = 16p$, $\left(\lambda_1 = -4\pi + 24p\right)$, $-\frac{\lambda_1}{4\pi} = 1 - \frac{6}{\pi}p$.

$\left[\lambda + 4\pi - 8p\right] m(x) = 16p \times m'(x) \to \frac{dm}{m} = \frac{dx}{x}\frac{1}{16p}[\dots]$, $m(x) = x^{\frac{1}{16p}[\lambda+4\pi-8p]} = x$, $m(0) = 0$. $(\lambda = \lambda_1)$

СФ - $m(x) = x$, др. - с ней $m(x)$ однородное и $m(x)$ можно умнож. на произв. число.

Известно (18/II), что для нетеров СФ $u_m(x)$: $\lambda_m = \frac{1}{u_m(0)} \sum_{s=0} \frac{u_m^{[2s]}(0)}{(2s)!} I_s$, $I_s = \int_{-1/2}^{1/2} d\xi\, g(\xi)\xi^{2s}$,

где $I_s = I_{2s} = I_{2s}(x=0)$.

$$\lambda m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx'\, g(xx') \sum_{s=0} \frac{m^{[s]}(x)}{s!}(x'-x)^s = \sum_{s=0} \frac{m^{[s]}(x)}{s!} I_s(x), \quad I_s(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx'\, g(xx')(x'-x)^s,$$

пока только $I_0(x)$ и $I_1(x)$ вычислим явно.

Если $m(x)$ - нет., $m(0) \neq 0$, то $\lambda m(0) = \sum_{s\ \text{нет}} \frac{m^{[s]}(0)}{s!} I_s(0)$.

$$I_2(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx'\, g(xx')(x-x')^2 = \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, g(\xi)\xi^2 = \left|\begin{matrix} v = (1/2)\xi^2,\ dv = \xi d\xi \\ g(\xi)\xi = u,\ du = [g'(\xi)\xi + g(\xi)]d\xi \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\xi^2 g(\xi)\Big|_{-1/2-x}^{1/2-x} - \int \frac{1}{2}\xi^2\left[g'(\xi)\xi + g(\xi)\right]d\xi = \frac{1}{2}\xi^3 g(\xi)\Big|_{\cdot} - \frac{1}{2}\int d\xi\, \xi^3 g'(\xi) - \frac{1}{2}I_2(x)$$

Иначе $I_2(x) = \int d\xi\, g(\xi)\xi^2 = \left|\begin{matrix} dv = g\,d\xi,\ v = G = \int g(\xi)d\xi \\ u = \xi^2;\ du = 2\xi d\xi \end{matrix}\right| = G(\xi)\xi^2\Big|_{\cdot} - \int G(\xi)\, 2\xi d\xi$ ← ничего хорошего

$g(\xi) = \frac{2}{p}\ln\frac{\xi^2}{\xi^2+p^2}$, $g'(\xi) = 4p\frac{1}{\xi(\xi^2+p^2)}$. первый путь проще.

$$\to \left(\tfrac{3}{2}\right) I_2(x) = \frac{1}{2}\xi^3 g(\xi)\Big|_{-1/2-x}^{1/2-x} - \frac{1}{2}\int d\xi\, \xi^3 \frac{4p}{\xi(\xi^2+p^2)} = \frac{1}{2}\xi^3 g(\xi)\Big|_{\cdot} - \frac{p}{2}\cdot 4\int d\xi\, \frac{\xi^2}{\xi^2+p^2} =$$

$$= (1) - \frac{p}{2}\cdot 4\int d\xi\left[1 - \frac{p^2}{\xi^2+p^2}\right] = (1) - \frac{p}{2}\left[\xi - p^2\left[\frac{1}{p}\operatorname{arctg}\frac{\xi}{p}\right]_{\cdot}\right]\cdot 4 = \text{потерян}$$

$$= \frac{1}{2}(1/2-x)^3 g(1/2-x) + \frac{1}{2}(1/2+x)^3 g(1/2+x) - \frac{p}{2}\cdot 4 + \frac{p^2}{2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1/2-x}{p}\right) + \operatorname{arctg}\frac{(1/2+x)}{p}\right]\cdot 4$$

Известно (см. 7/III обл.) что $g(\xi) \underset{p\to 0}{=} -4\pi\left[\delta(\xi) + \frac{1}{\xi^2}\frac{p}{2} + \dots\right]$, поэтому

$$\tfrac{3}{2} I_2(x) \underset{p\to 0}{\cong} \frac{1}{2}(1/2-x)^3(-2\pi p)\frac{1}{(1/2-x)^2} + \frac{1}{2}(1/2+x)^3(-2\pi p)\frac{1}{(x+1/2)^2} - \frac{p}{2}4 + O(p^2) =$$

$$= (-\pi p)\left[(1/2-x) + (1/2+x)\right] - \frac{p}{2}\cdot 4 = -\pi p - \frac{p}{2}\cdot 4, \quad I_2(x) = \frac{2}{3}(-p)(\pi+2) \underset{p\to 0}{} \text{правая часть } I_2(x)$$

$$\lambda m(x) = \left[-4\pi - \frac{2p}{x^2-1/4}\right] m(x) + 8p\,\operatorname{Arth}(2x)m'(x) + \frac{1}{2}\frac{2}{3}(-p)(\pi+1/2)m''(x)$$

$$-\left[\lambda + 4\pi + \frac{2p}{x^2-1/4}\right] m(x) + 8p\,\operatorname{Arth}(2x)m'(x) - \frac{p}{3}(\pi+1/2)m''(x) = 0$$

? неверный коэф.

а) СФ - нетеровы, $m(x) = m(0) + \frac{1}{2}m''(0)x^2$, $m'(x) = m''(0)x$, $m''(x) = m''(0)$

x^0: $-\left[\lambda + 4\pi - 8p\right] m(0) - \frac{p}{3}(\pi+1/2)m''(0) = 0$

x^2: $-\left[2p(-4)(1+4x^2) + \lambda + 4\pi\right]\left[m(0) + \frac{1}{2}m''(0)x^2\right] + 8p\cdot 2x^2 m''(0) = 0$

Escaneado con CamScanner

Date. 11.07. ТВ выполнен. спектра по "p"

x^2: $-\left[\lambda+4\pi-8p\right]\frac{1}{2}m''(0) + m(0)(32p) + 16p\,m''(0) = 0$

$$\begin{cases} +\left[\lambda+4\pi-8p\right]m(0) + \frac{p}{3}(\pi+4/2)\,m''(0) = 0 \\ +32p\,m(0) + \left[\frac{1}{2}(\lambda+4\pi)+20p\right]m''(0) = 0 \end{cases}$$

$\det\hat{R} = 0$, усл. совместн. $(\lambda+4\pi = \Lambda)$

$\det\hat{R} = \left[\Lambda-8p\right]\left[\frac{1}{2}\Lambda+20p\right] + (4)\frac{32}{3}p^2/(\pi+4/2) = 0$, в лин. по p приближ. (тоже неверно)

Корни $\Lambda_n > 0$.

$\Lambda_0 = 8p$

$\Lambda_2 = +40p$ – грубо

б) СР исследов.: $m(x) = m'(0)x + \frac{1}{3!}m'''(0)x^3$, $m'(x) = m'(0) + \frac{1}{2}m'''(0)x^2$, $m''(x) = m'''(0)x$.

$$-\left[\Lambda-8p(1+4x^2)\right]\left[m'(0)x + \frac{1}{3!}m'''(0)x^3\right] + 8p\left[2x+\frac{1}{3}2^3x^3\right]\left[m'(0)+\frac{1}{2}m'''(0)x^2\right] - \frac{p}{3}(\pi+4/2)m'''(0)x = 0$$

x: $-\left[\Lambda-8p\right]m'(0) + 16p\,m'(0) - \frac{p}{3}(\pi+4/2)m'''(0) = 0$

x^3: $-m'(0)(-32p) + \frac{1}{6}m'''(0)\left[8p-\Lambda\right] + 8p\,\frac{8}{3}m'(0) + 8p\cdot 2\cdot\frac{1}{2}m'''(0) = 0$

$$\begin{cases} \left[24p-\Lambda\right]m'(0) - \frac{p}{3}(\pi+4/2)m'''(0) = 0, \\ \left(32+\frac{64}{3}\right)p\,m'(0) + \left[\frac{1}{6}(8p-\Lambda)+8p\right]m'''(0) = 0, \end{cases}$$

$\det\hat{R} = \left[24p-\Lambda\right]\left[-\frac{1}{6}\Lambda+\frac{26}{3}\right] + O(p^2) = 0$

спектр $\Lambda_1 = 24p$ и $\Lambda_3 = 56p$.

→ Получили спектр (of wire): $\lambda_0 = -4\pi+8p$, $\lambda_1 = -4\pi+24p$, $\lambda_3 = -4\pi+56p$, $\lambda_2 = -4\pi+40p$

Нетрудно видеть: $\lambda_n = -4\pi + (2n+1)8p$. λ_n – СЗ для g_{zz} – ФГ.

Частота SW wires (beg. ω_M): $\omega_n^2 = \left[\omega_H + 1 + \frac{1}{4\pi}\lambda_n\right]\left[\omega_H - \frac{1}{4\pi}\lambda_n\right]$

Берем $p = 0{,}011$ (1/w); $H = 500$ э → $\omega_H = 0{,}049$; $\omega_M \doteq 30{,}1$ ГГц.

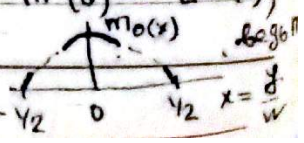
$\frac{\lambda_n}{4\pi} = -1 + (2n+1)\frac{2}{\pi}p$, $n = 0,1,2,3$.

11/VII

	Wires		SW wires, $p=0{,}011$.		
Расч. ω_n из инт. ур.	0,242	0,268	0,292	0,313	
Эксп. f_n	0,236	0,266	0,297 (0,292-4/I)	0,319	0,339

Согласие неплохое (скорее хорошее) для всех мод. Но высшие моды по ω. Расчет и сравнение в PRB'99 нелогично объяснены. Принцип. вопрос — Пасхина и $m_0(x)$ основной моды, тогда у Славина $m_0(x) = 1$ с разных. рассмотрим, почему. невер.

Из соотнош. для $m(0)$, $m''(0)$ при $\lambda = \lambda_0 = -4\pi+8p$ следует $m''(0) = -2m(0)$, т.е. основная СФ $m_0(x) \underset{x\to 0}{=} m(0)\left[1-x^2\right]$ неоднородна



→ Но спектр для Λ надо решать точнее (модель не выбрас.)

Escaneado con CamScanner

С3, СФ wires, разложение вблизи центра дота $x=0$

Date.

$$I_s(x)=\int_{-1/2}^{1/2} dx'\, g(x-x')(x')^s = \int_{-\frac12-x}^{\frac12-x} d\xi\, g(\xi)\xi^s, \qquad g(\xi)=\frac{2}{p}\ln\left[\frac{\xi^2}{\xi^2+p^2}\right]$$

$$\frac{\partial I_s(x)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(1/2-x)\cdot g(\xi)\xi^s\Big|_{\xi=1/2-x} - \frac{\partial(-1/2-x)}{\partial x} g(\xi)\xi^s\Big|_{\xi=-\frac12-x} =$$

$$= -g(1/2-x)(1/2-x)^s + g(1/2+x)(-1)^s(1/2+x)^s, \quad s=0,1,\dots$$

$$\frac{\partial^2 I_s(x)}{\partial x^2} = -g'_\xi(1/2-x)(-1)(1/2-x)^s - g(1/2-x)s(1/2-x)^{s-1}(-1) + g'_\xi(1/2+x)(-1)^s(1/2+x)^s +$$
$$+ g(1/2+x)(-1)^s s(1/2+x)^{s-1}$$

$$\left(\frac{\partial^2 I_s}{\partial x^2}\right)_{x=0} = \frac{1}{2^s}g'_\xi(1/2)+g(1/2)\frac{s}{2^{s-1}}+g'_\xi(1/2)(-1)^s\frac{1}{2^s}+g(1/2)(-1)^s\frac{s}{2^{s-1}} =$$
$$= \frac{1}{2^s}g'_\xi(1/2)\left[1+(-1)^s\right]+\frac{s}{2^{s-1}}g(1/2)\left[1+(-1)^s\right] = \frac{1+(-1)^s}{2^s}\left[g'_\xi(\tfrac12)+2sg(\tfrac12)\right]$$

$$\left(\frac{\partial I_s}{\partial x}\right)_{x=0} = -g(1/2)\frac{1}{2^s}+(-1)^s g(1/2)\frac{1}{2^s} = \frac{1}{2^s}g(1/2)\left[(-1)^s-1\right]$$

$$g'_\xi(\xi)=\frac{\partial g(\xi)}{\partial\xi}=4p\frac{1}{\xi(\xi^2+p^2)}, \quad g'_\xi(1/2)=4p\frac{1}{\frac12\left[\frac14+p^2\right]}=\frac{8p}{(1/4+p^2)}; \quad g(1/2)=\frac{2}{p}\ln\left[\frac{1}{1+4p^2}\right]$$

Разложим $x\to 0$: $I_s(x)=I_s(0)+I'_s(0)x+\frac12 I''_s(0)x^2+\dots = I_s(0)+\frac{\left[(-1)^s-1\right]}{2^s}g(1/2)x +$

$$+\frac12 x^2\frac{\left[1+(-1)^s\right]}{2^s}\left[g'_\xi(1/2)+2sg(1/2)\right]$$

$$I_0(x)=I_0(0)+x^2\left[\frac{8p}{1/4+p^2}\right]=I_0(0)+\frac{32p}{1+4p^2}x^2+\dots O(x^4), \quad p\text{-конечно и любое}, \ x\to 0$$

было (10/VII) при x любом ($|x|\neq 1/2$), что $p\to 0$: $I_0(x)=-4\pi-\frac{2p}{x^2-1/4}\underset{x\to0}{=}-4\pi+8p(1+4x^2)$

что согл. с настоящим расчетом при $I_0(0)\underset{p\to0}{=}-4\pi+8p$.

$$I_1(x)\underset{x\to0}{=}I'_1(0)x=\frac12\frac{2}{p}\ln\left[\frac{1}{4p^2+1}\right](-2)x=+\frac{2}{p}\ln(1+4p^2)\cdot x+O(x^3)$$

было при $p\to0$ $I_1(x)=-4p\ln\left(\frac{1/2-x}{1/2+x}\right)\underset{x\to0}{=}16px$ (?), отлич. от настоящ. расчета, где $I_1(x)=8px$.

Правильно $I_1(x)=\frac{2}{p}\ln(1+4p^2)\cdot x\approx 8px$. $\underset{x\to0,\,p\to0}{\text{так}}$ 1/2 - проходит

$$I_2(x)\underset{x\to0}{=}I_2(0)+\frac12 I''_2(0)x^2=I_2(0)+\frac{x^2}{2}\frac{2}{2^2}\left[\frac{32p}{1+4p^2}+2\cdot2\cdot\frac{2}{p}(-1)\ln(1+4p^2)\right]=$$
$$=I_2(0)+2\left[\frac{4p}{1+4p^2}-\frac{1}{p}\ln(1+4p^2)\right]\cdot x^2\underset{\text{если } p\to0}{=}I_2(0)-16p^3x^2 \quad (!)$$

не должна $\sim p$.

Расчет $I_2(0)$ – отдельная задача. Ясно, что было $I_2(0)=-\frac23 p(\pi+1/2)$ – неверно

Т.е. 10/VII я ~~ушудился~~ использовать неверные $I_1(x)$, $I_2(x)$ разложения.

Неверное $I_1(x)$ повлияло на спектр высших частот. $I_2(0)$ не учтено в диаг. приближении. но диаг. подход мало

Date. . .

$I_2(x=0,p) = \int_{-1/2}^{1/2} d\xi\, \xi^2 g(\xi)$; $\frac{\partial I_2}{\partial p} = \int d\xi\, \xi^2 \frac{\partial g(\xi,p)}{\partial p} = \int d\xi\, \xi^2 \left[-\frac{1}{p} g(\xi,p) - \frac{4}{\xi^2+p^2}\right]$

$= -\frac{1}{p} I_2 - 4\int d\xi \frac{\xi^2}{\xi^2+p^2} \simeq -\frac{1}{p} I_2(p) - 4\left[1 - 2p \operatorname{arctg}\frac{1}{2p}\right]$

$\operatorname{arctg} x \underset{x\to\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}$, $1 - 2p\operatorname{arctg}\frac{1}{2p} = 1 - 2p\left[\frac{\pi}{2} - 2p\right] \approx 1 - p\pi$

$\frac{\partial I_2}{\partial p} = -\frac{1}{p} I_2 - 4[1 - p\pi]$. Ищем $I_2(p) = Ap$, т.к. $I_2(0) = 0$,

$A = -A - 4 + 4p\pi$ линейное, $2A = -4$, $A = -2$ и $I_2(0,p) \approx -\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} p$ (?) с 17/II согл

Можно вообще найти (см. 17/II) $I_s(0) = \int_{-1/2}^{1/2} d\xi\, \xi^s g(\xi)$ как функцию "p".

$\frac{\partial I_s}{\partial p} = \int d\xi\, \xi^s \frac{\partial g(\xi,p)}{\partial p} = \int d\xi\, \xi^s 2 \frac{\partial}{\partial p} \frac{1}{p}\left[\ln(\xi^2) - \ln(\xi^2+p^2)\right] = -\frac{1}{p}\int d\xi\, \xi^s g(\xi,p) -$

$-4\int d\xi\, \xi^s \frac{1}{\xi^2+p^2}$, $\frac{\partial I_s(0,p)}{\partial p} = -\frac{1}{p} I_s(0,p) - 4\int_{-1/2}^{1/2} d\xi \frac{\xi^s}{\xi^2+p^2}$

При s-нечет. сразу $\frac{\partial I_s}{\partial p} = -\frac{1}{p} I_s$, $I_s(0, p=0) = 0$, что дает (верно) $I_s(0,p) = I_s(0) =$ при s нечет

При s-чет, нечет. Проверим $s=0$ $\int d\xi \frac{\xi^0}{\xi^2+p^2} = \frac{1}{p}\operatorname{arctg}\frac{\xi}{p}\Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{2}{p}\operatorname{arctg}\frac{1}{2p} \approx$

$\simeq \frac{2}{p}\left[\frac{\pi}{2} - 2p\right] = \frac{\pi}{p} - 4$

$\frac{\partial I_0}{\partial p} = -\frac{1}{p} I_0 - 4\left(\frac{\pi}{p} - 4\right) = -\frac{1}{p}(I_0 + 4\pi) + 16$, $I_0 + 4\pi = Ap$

$A = -A + 16$, $A = 8$ и $I_0(0,p) = -4\pi + 8p$ — верно. И $I_2(0,p) = -2p$ верно

$I_2(x=0,p) = -2p$. И вообще при $s>0$ (согласно 17/II) тоже $I_s(0,p) = -\frac{8}{2^s(s-1)} \cdot p$.

$\lambda m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx'\, g(xx')\left[\sum_{s=0} \frac{m^{[s]}(x)}{s!}(x'-x)^s\right] = \sum_{s=0} \frac{m^{[s]}(x)}{s!} I_s(x)$ → основное разложение

(решение этого интегр. ур. ищем при $|x| \to 0$ в виде $m(x) = \sum_{n=0} \frac{m^{(n)}(0)}{n!} x^n$

$m^{[s]}(x) = \frac{d^s}{dx^s} \sum_{n=0} \frac{m^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0} \frac{m^{(n)}(0)}{n!} C_n^s x^{n-s}$, $C_n^s = n(n-1)\cdots(n-s) \neq 0$ при $s \leq n$

$\lambda \sum_n \frac{m^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{s=0} \frac{I_s(x)}{s!} \sum_{n=0} \frac{m^{(n)}(0)}{n!} C_n^s x^{n-s}$, $I_s(x) = \sum_{m=0} \frac{I_s^{[m]}(0)}{m!} x^m$

$\lambda \sum_{n=0} \frac{m^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{s\,m\,n} \frac{1}{s!\,m!\,n!} C_n^s m^{[n]}(0)\, I_s^{[m]}(0)\, x^m x^{n-s} = \lambda \sum_{m=0} \frac{m^{[m]}(0)}{m!} x^m$

Сравнивая коэф. при x^m: $\lambda m^{[m]}(0) = \sum_{sn} \frac{1}{s!\,n!} C_n^s m^{[n]}(0)\, I_s^{[m]}(0)$ — ~~$B_{mn} = \frac{1}{n!}\sum_s \frac{1}{s!} C_n^s I_s^{[m]}(0)$~~ — ~~$\lambda m^{[m]}(0) = \sum \frac{1}{n!} m^{[n]}(0) B_{mn}$~~ — ~~$\lambda m^{[m]}(0) = \sum \frac{1}{n!} m^{[n]}(0) B_{mn}$~~

Escaneado con CamScanner

Date. . .

Система ур. для $m^{[n]}(0)$: $\sum_{n=0}\left[\frac{B_{mn}}{n!}-\lambda\delta_{mn}\right]m^{[n]}(0)=0$

$n!$ включили в определ. B_{mn} $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}\left[B_{mn}-\lambda\delta_{mn}\right]m^{[n]}(0)=0$

Секул. ур. на СЗ λ: $\det\left|B_{mn}-\lambda\delta_{mn}\right|=0$ — бесконечный детерминант на функц. x^n.

$B_{mn}(p)=\frac{1}{n!}\sum_{s=0}\frac{1}{s!}C_n^s I_s^{[m]}(0,p)$, $I_s(0,p)$ — уже известна. (нетрудно, см. ↓)

Но $\frac{d^s x^n}{dx^s}=n(n-1)\cdots(n-s+1)x^{n-s}$ и систему для λ, $m^{[n]}(0)$ надо переписать

$\lambda\sum_n\frac{m^{[n]}(0)}{n!}x^n=\sum_{smn}\frac{1}{s!m!n!}C_n^s m^{[n]}(0)I_s^{[m]}(0)x^{m+n-s}$ $\quad (s\le n)$

$\lambda\sum_{\ell=0}\frac{m^{[\ell]}(0)}{\ell!}x^\ell=\sum_{s,mn}\frac{C_n^s}{s!m!n!}m^{[n]}(0)I_s^{[m]}(0)x^{m+n-s}$, $\ell,m,n\ge 0$, $s\le n$, $(m+n-s=\ell)$

Сравниваем коэф. при x^ℓ: $\lambda\frac{m^{[\ell]}(0)}{\ell!}=\sum_{ns}\frac{C_n^s}{s!n!(\ell-n+s)!}m^{[n]}(0)I_s^{[\ell+s-n]}(0)$

$\sum_s\frac{C_n^s}{s!(\ell-n+s)!}I_s^{[\ell+s-n]}(0)=b_{\ell n}$

$\lambda m^{[\ell]}(0)=\ell!\sum_n\frac{b_{\ell n}}{n!}m^{[n]}(0)=\sum_n B_{\ell n}m^{[n]}(0)$, $B_{\ell n}=\frac{\ell!}{n!}b_{\ell n}$

Сист. лин. ур. $\sum_n\left[B_{\ell n}-\lambda\delta_{n\ell}\right]m^{[n]}(0)=0$, $\det\left|B_{\ell n}-\lambda\delta_{\ell n}\right|=0$

$B_{\ell n}=\frac{\ell!}{n!}\sum_{s\le n}\frac{C_n^s}{s!(\ell+s-n)!}I_s^{[\ell+s-n]}(0)$ и $\ell+s-n\ge 0$.

$C_n^s=n(n-1)\cdots(n-s+1)=\frac{n!}{(n-s)!}$, $B_{\ell n}=\ell!\sum_{s\le n}\frac{1}{s!(n-s)!(\ell+s-n)!}I_s^{[\ell+s-n]}(0)$

$B_{mn}(p)=m!\sum_{s\le n}\frac{1}{s!(n-s)!(m+s-n)!}I_s^{[m+s-n]}(0,p)$

Диаг. $B_{nn}(p)=n!\sum_{s\le n}\frac{1}{(s!)^2(n-s)!}I_s^{[s]}(0,p)$, $\sum_n\left[B_{mn}-\lambda\delta_{mn}\right]m^{[n]}(0)=0$

$B_{00}(p)=I_0(0,p)=-4\pi+8p$, $B_{22}(p)=2!\left[\frac{1}{2!}I_0(0p)+\frac{1}{2^2}I_2''(0p)\right]=$

$=I_0(0,p)+\frac{1}{2}I_2''(0,p)=-4\pi+8p+\frac{1}{2}\cdot 0=-4\pi+8p$ — ? Проверить явно.

Для целых СФ $m(x)$ n,m — целые, для нецелых СФ m,n — нецелые

s — нет, все обрыв

Где здесь I_1?

Секул. ур.: $\lambda m(x)=I_0(x,p)m(x)+\frac{1}{2}I_2(x,p)m''(x)$, $m(x)=m(0)+\frac{1}{2}m''(0)x^2$

$\left[-I_0+\lambda\right]\left[m(0)+\frac{1}{2}m''(0)x^2\right]=\frac{1}{2}I_2(x,p)m''(0)=\frac{1}{2}m''(0)I_2(0)=-pm''(0)$

$\left[\lambda+4\pi-8p(1+4x^2)\right]\left[m(0)+\frac{1}{2}m''(0)x^2\right]=\left[\lambda+4\pi-8p\right]m(0)+x^2\{-32pm(0)+$

Escaneado con CamScanner

Date. 12 . 07 .

$\Lambda = \lambda + 4\pi$

$+\frac{1}{2}m''(0)[\lambda+4\pi-8p]\Big\} = -pm''(0)$

x^0: $m(0)[\lambda+4\pi-8p] + pm''(0) = 0$

x^2: $-32pm(0) + \frac{1}{2}m''(0)[\lambda+4\pi-8p] = 0$

$\begin{cases} (\Lambda-8p)m(0) + pm''(0) = 0 \\ -32pm(0) + \frac{1}{2}[\Lambda-8p]m''(0) \end{cases}$

Ищем решение (функции $I_1(x)$) . Надо $\lambda m(x) = I_0(x)m(x) + I_1(x)m'(x) + \frac{1}{2}I_2(x)m''(x)$

Зак. СФ: $[-4\pi + 8p(1+4x^2) - \lambda]\left[m(0) + \frac{1}{2}m''(0)x^2\right] + 8px\,m''(0)x - 2p\cdot\frac{1}{2}m''(0) = 0$

x^0: $[8p - 4\pi - \lambda]m(0) - pm''(0) = 0$

x^2: $\left[-4\pi - \lambda + 8p\right]\frac{1}{2}m''(0) + m(0)\cdot 32p + 8pm''(0) = 0$

$\begin{cases} [8p-\Lambda]m(0) - pm''(0) \\ 2\cdot 32pm(0) + [24p-\Lambda]m''(0) \end{cases}$

Отсюда дан. спектр $\Lambda_0 = 8p$, $\Lambda_2 = 24p$ (!) — но его недостаточно.

Ищем. равен $\det\begin{vmatrix} 8p-\Lambda & -p \\ 64p & 24p-\Lambda \end{vmatrix} = (8p-\Lambda)(24p-\Lambda) + 64p^2 = 0$

$\Lambda^2 - 32\Lambda p + 24\cdot 8p^2 + 64p^2 = 0$, $\Lambda^2 - 32\Lambda p + 32\cdot 8p^2 = 0$

$\Lambda_{0,2} = \frac{1}{2}\left[32p \pm \sqrt{(32)^2p^2 - 4\cdot 32\cdot 8p^2}\right] = 16p$ — вот так да!

Все проверить. Метод разложения СФ $m(x)$ и $I_s(x)$ вблизи $x=0$ не так уж и хорош, т.к. приводит к ∞-системе ин. уравнений для определения спектра и СФ. Диф. ур. лучше:

12/VII $\lambda m(x) = \sum_s \frac{m^{[s]}(x)}{s!} I_s(x)$, если достаточно членов $s=0,1$.

Все $I_{s>0} \sim p$, поэтому ТВ по p не проходит, но $I_s \sim \frac{1}{2^s(s-1)}$, $s>1$

Для четных СФ $u_m(x)$, $\lambda_m = \frac{1}{u_m(0)} \sum_{s=0,1,\dots} \frac{u_m^{[2s]}(0)}{(2s)!} I_{2s}(0)$

$u_m(x)$ и $u_m^{[2s]}(x)$ ав. решением ин. ур $\to$ если предположить $u_m(x) \sim u_m^{[2s]}(x)$, тогда $u_m^{[2s]}(0) = C_m u(0)$

$\lambda_m = C_m \sum_{s=0} \frac{1}{(2s)!} I_{2s}(0) = C_m(-8p) \sum_{s=0} \frac{1}{(2s)!}\frac{1}{2^{2s}(2s-1)}$, C_m — откуда взялось?

Способ: $g(\xi,p) = \frac{2}{p}\ln\left(\frac{\xi^2}{\xi^2+p^2}\right) = -\frac{4}{p}\int_0^p dz \frac{z}{z^2+\xi^2}$; $\frac{\partial g}{\partial p} = -\frac{g}{p} - 4\frac{1}{\xi^2+p^2}$

$\lambda m(x) = \int dx' g(xx')m(x') \to \left(\frac{\partial\lambda}{\partial p} + \frac{1}{p}\lambda\right)m(x') = -4\int_0^1 dx' \frac{m(x')}{(x-x')^2+p^2}$

Если def. $\Lambda(p) = \frac{\partial\lambda}{\partial p} + \frac{1}{p}\lambda$, то $\Lambda m(x) = (-4)\int_0^1 dx' \frac{m(x')}{(x-x')^2+p^2}$ — возможная форма инт. ур (*)

$\lim_{p\to 0}\frac{p}{p^2+\xi^2} = \pi\delta(\xi)$, $\Lambda m(x) = -\frac{4\pi}{p}\int dx'\delta(x-x')m(x') = -\frac{4\pi}{p}m(x) \to \frac{\partial\lambda}{\partial p} + \frac{1}{p}\lambda = -\frac{4\pi}{p}$

~~solution~~(?) $\lambda(p) = -4\pi + Ap$ — нет. $m(x) = m(0) = \text{const}$ дает (и $x=0$)

$\Lambda m(0) = m(0)(-4)\int_{x_2}^{x_1} dx' \frac{1}{x'^2+p^2} = m(0)\left[\frac{\pi}{p} - 4\right]$ $\frac{\partial\lambda}{\partial p} + \frac{\lambda}{p} = -\frac{4\pi}{p}$, $\lambda = -4\pi + 8p$

Escaneado con CamScanner

Date.

Но $m(x) = \text{const}$ не есть СФ, конечно.

Простейшая гладкая СФ, удовлетв. $m(\pm 1/2) = 0$ есть $m_0(x) = 1 - 4x^2$

а простейшая негладкая СФ $m_1(x) = x(1-4x^2)$.

Видно эти СФ хороши вблизи $x=0$, а при $|x| \to 1/2$ $m_n(x) \sim |x-\frac{1}{2}| \ln|x-\frac{1}{2}|$, $x \to 1/2$

Построение СФ, б/м и $m(\pm 1/2)=0$ удовлетворяет, и аналитична при $x \approx 0$, но неаналит. при $|x| = 1/2$.

Гладкая СФ $u_0(x) = (1/2 - x)\ln\left(\frac{1/2-x}{1/2+x}\right) + (1/2+x)\ln\left(\frac{1/2+x}{1/2-x}\right)$

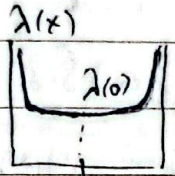
При $x \to 0$ $u_0(x) = (1/2-x)(-2)\operatorname{arcth}(2x) + (1/2+x)\,2\operatorname{arcth} 2x =$

$= (1/2-x)(-4x) + (1/2+x)4x = 8x^2$ – плохо и $\ln\left(\frac{1/2+x}{1/2-x}\right) \to \infty$ при $x \to 1/2$

надо $u_0(x) = (1/4 - x^2)\left[\ln\left(\frac{1/2-x}{1/2+x}\right) + \ln\left(\frac{1/2+x}{1/2-x}\right)\right] = 0$, плохо.

$\lambda_0(x) = (1/4 - x^2)\ln(1/4 - x^2) \to (1/4 - x^2)x^2$, $x \to 0$ – неосновная СФ, не потребуем ее.

$\lambda u_2(x) = \int dx' g(xx') u_1(x')$



– для типичной пробной функции вид $\lambda(x) = u_2(x)/u_1(x)$.

Свойства СФ:

→ Параметр малости Эр. $\frac{P}{|x \pm 1/2|}$ и для "x" далеко от краев $|x| = 1/2$ действительно мал, ядро велико при $x' \approx x$ (тоже далеко от краев) и близко к $\delta(x-x')$.

Поэтому любая нормальная пробная СФ дает $\lambda(x) \approx \text{const}$ далеко от краев.

При $|x| \to 1/2$ $P_{эф} = \frac{P}{|x \pm 1/2|}$ уже не мал, $g(xx')$ не похоже на $\delta(x-x')$ и любой вид проб. функции важен. Произв. пробные ф-ии плохи и дают $\lambda(x)$ сильно зависит от x при $|x| \to 1/2$, для настоящих СФ было бы $\lambda(x) = \text{const}$ $\forall x$. Т.е. поведение $\lambda(x)$ при $|x| \to 1/2$ определяет насколько проб. функция близка к истинной СФ.

Вероятно при $|x| \to 1/2$ СФ неаналитична, но $m(\pm 1/2) = 0$ все же.

Можно зависит ли СФ явно от параметра "P"?

Если нет, то инт. ур. принимает вид $(*)$ как пред. сер.

$\Lambda m(x) = (\lambda + 4\pi)m(x) = \int dx' \left[g(xx') + 4\pi\delta(x-x')\right]m(x')$ – здесь в такой форме показывает что разложение $m(x') = \sum_{n=0} \frac{m^{[n]}(x)}{n!}(x'-x)^n$ в окрестности $x' \approx x$ уже плохо (все члены $\sim P$),

т.к. $G(xx') = g(xx') + 4\pi\delta(x-x')$ уже не имеет экстремума (или $\to \infty$) при $x' = x$.

Это эквивалентно тому, что ограничиться членами $n(s) = 0, 1, 2$ и получить систему низкого порядка из $m^{[s]}(0)$ – нельзя. Получится ∞ – система лин. уравнений, где каждый член матрицы $\sim P$.

Date. 13.07. Диф. ур. для wires, выход через $\nabla^2 h_d = -4\pi \nabla \nabla \cdot \vec{m}$

Диф. ур. для дипольного поля (15/III): $\nabla^2 \vec{h}_d = -4\pi \nabla \nabla \cdot \vec{m}$

Для wires есть две компоненты дип. поля h_x и h_z. (нужны для расчёта)

$h_d^\alpha(\vec{r}) = \int d^3r' \Gamma_{\alpha\beta}(r,r') m_\beta(r')$, $\alpha,\beta = x,z$ – интересуют

$$\begin{cases} h_d^x(r) = \int d^3r' \left[\Gamma_{xx} m_x + \Gamma_{xz} m_z\right](\vec{r}') \\ h_d^z(z) = \int d^3r' \left[\Gamma_{zx} m_x + \Gamma_{zz} m_z\right](\vec{r}') \end{cases}$$

предполагаем (очевидно ли?) $m_\alpha(\vec{r})$ не зависит от z.

Тогда $h^x(\vec{\rho},z) = \int dz' d^2\vec{\rho}' \left[\Gamma_{xx}(\rho,\rho';zz') m_x(\rho') + \Gamma_{xz}(\rho,\rho';zz') m_z(\rho')\right]$

$\langle\ldots\rangle_z = \frac{1}{L}\int dz(\ldots)$ даст $\bar{h}_d^x(\vec{\rho}) = \int d^2\vec{\rho}'\, g_{xx}(\rho,\rho') m_x(\vec{\rho}')$

$g_{xx}(\rho\rho') = \frac{1}{L}\int dz\, dz' \Gamma_{xx}(\rho\rho',zz')$, $g_{xz}(\rho\rho') = \frac{1}{L}\int dz\, dz' \Gamma_{xz}(\rho\rho',zz') = 0$

Аналогично $\bar{h}_d^z(\vec{\rho}) = \int d^2\vec{\rho}'\, g_{zz}(\vec{\rho},\vec{\rho}') m_z(\vec{\rho}')$, но $g_{xx}(x,x') + g_{zz}(x,x') = -4\pi\delta(x-x')$

т.к. размер $\|Oy \to \infty$ и вводим усреднение по y (или $k_y = 0$).

wires: $\bar{h}_d^\alpha(x) = \int dx' g_{\alpha\alpha}(x,x') m_\alpha(x')$, $\alpha = x,z$.

$\bar{h}_d^z(x) = \int dx' g_{zz}(x,x') m_z(x')$, $\bar{h}_d^x(x) = \int dx' g_{xx}(xx') m_x(x') = -4\pi m_x(x) - \int dx' g_{zz} m$

(это уравнение находим на СФ, полагая $\bar{h}_d^z(x) = \lambda_z m_z(x)$.

Но $\nabla^2 \vec{h}_d = -4\pi \nabla \nabla \cdot \vec{m}$ вычисляется до всех усреднений. И усред-няется диф. ур. системы

$$\begin{cases} \nabla^2 h_d^z(\vec{r}) = -4\pi \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div}\vec{m} = -4\pi \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_z}{\partial z}\right)(\vec{r}) & (1) \\ \nabla^2 h_d^x(\vec{r}) = -4\pi \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div}\vec{m} = -4\pi \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_z}{\partial z}\right)(\vec{r}) & (2) \end{cases}$$

Система ур. намагниченности для wires

$\frac{1}{L}\int dz\,(1)$. $\nabla^2 \bar{h}_d^z(r) = \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\bar{h}_d^z(r)$, для wire от y" не зависит.

а) сразу $\bar{h}_d^z(\vec{r}) = \lambda_z m_z(\vec{r})$, до $\langle\ldots\rangle_z$ и $\bar{h}_d^x(x) = \lambda_x m_x(x)$ – но так только если $\Gamma_{xz} = 0$.

$$\begin{cases} \lambda_z\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) m_z(x,z) = -4\pi \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_z}{\partial z}\right) \\ \lambda_x\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) m_x(x,z) = -4\pi \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_z}{\partial z}\right) \end{cases}$$

$\int dz(\ldots)$, $\int_0^L dz \frac{\partial^2 m_z}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial m_z}{\partial z}\right)\Big|_0^L = 0$, если $m_z \neq f(z)$ или $\frac{\partial \vec{m}}{\partial n} = 0$

$\int dz \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial m_x}{\partial x}\right) = \frac{\partial m_x(x,z)}{\partial x}\Big|_{z=0}^{L} = 0$, если $m_x \neq f(z) \to \lambda_z \frac{\partial^2 \bar{m}_z(x)}{\partial x^2} = 0$ как (15/III)

Также получается и $(\lambda_x + 4\pi)\frac{\partial^2 \bar{m}_x}{\partial x^2} = 0$ (15/III). Плохо.

б) Сначала $\langle\ldots\rangle_z$ сист. (1),(2): $\int dz \frac{\partial^2 h_d^z(x,z)}{\partial z^2} = \frac{\partial h_d^z(x,z)}{\partial z}\Big|_0^L$ –

– не видно почему $= 0$ должно.

Escaneado con CamScanner

Date. 14.07. Пробные СФ для wires

Попробовал ещё СФ вида: ① $(1/2-x)^\ell \ln\left[\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+p^2\right] \pm (x\to -x)$,

② $\ln\left[\frac{(1/2-x)^2+p^2}{p^2}\right] + \ln\left[x\to -x\right] - \ln\left(1+\frac{1}{p^2}\right)$,

③ $(1/2-x)^\ell \ln(1/2-x) \pm (1/2+x)^\ell \ln(1/2+x)$, удовлетв. $u(\pm\frac{1}{2})=0$.

(*) MATHCAD не хочет считать.

(a) $\ell=1$ выглядит неплохо для СФ осн. состояния, $Du=0{,}070$ (но все же $\lambda(x)$ на краях ⌊ ⌋ $-1/2$ $1/2$, как обычно), $\omega_0=0{,}235$ (!)

(b) $\ell=2$ выглядит хуже, чем $\ell=1$, $Du=0{,}122$ и $\omega_0=0{,}212$.

Для СФ-кандидата $\sin(2\pi x)$, $Du=0{,}080$ с $\omega_0=0{,}274$

результат $\sqrt{1-4x^2}$ с $Du=0{,}014$ и $\omega_0=0{,}240$ (!), но $m'(x)$ синусуд.

(c) $\ell=1$ даёт хороший результат с $Du=0{,}036$, но $\omega_0=0{,}259$.

$\ell=2$ заметно хуже, $Du=0{,}127$, но $\omega_0=0{,}236$.

Решение $u_0(x)=1$ Славина даёт $Du=0{,}031$, $\omega_0(\text{по }\lambda(0))=0{,}232$.

Отметим, что Du и ω почти при $x\in[-0{,}495, 0{,}495]$ достаточно далеко от краёв.

Можно просто аппроксимацию осн. СФ:

$u_0(x) = 1 + a_2x^2 - 16\left(1+\frac{1}{4}a_2\right)x^4$, $u_0(\pm 1/2)=0$

(по $\bar{\lambda}=\lambda_s$)

при	$a_2=1$	получим $Du=0{,}082$,	$\omega_0=0{,}234$
	$a_2=-1$	—11— $Du=0{,}066$,	$\omega_0=0{,}235$
	$a_2=-0.5$	—11— $Du=0{,}064$,	$\omega_0=0{,}237$
	$a_2=-1/4$	—11— $Du=0{,}086$,	$\omega_0=0{,}232$
(единственный тип?)	$a_2=-3/4$	—11— $Du=0{,}065$,	$\omega_0=0{,}236$
	$a_2=-0{,}65$	—11— $Du=0{,}065$,	$\omega_0=0{,}236$
	$a_2=-0{,}55$	—11— $Du=0{,}064$,	$\omega_0=0{,}237$
	$a_2=-0{,}45$	—11— $Du=0{,}064$,	$\omega_0=0{,}237$
	$a_2=-0{,}35$	—11— $Du=0{,}086$,	$\omega_0=0{,}231$
Пределы	$a_2=-4$	—11— $Du=0{,}092$,	$\omega_0=0{,}224$
	$a_2=-2$	—11— $Du=0{,}072$,	$\omega_0=0{,}233$
	$a_2=0$	—11— $Du=0{,}085$,	$\omega_0=0{,}233$
	$a_2=0{,}5$	—11— $Du=0{,}083$,	$\omega_0=0{,}233$
	$a_2=2$	—11— $Du=0{,}082$,	$\omega_0=0{,}235$
	$a_2=3$	—11— $Du=0{,}080$,	$\omega_0=0{,}234$
	$a_2=4$	—11— $Du=0{,}079$,	$\omega_0=0{,}236$
	$a_4=8$	—11— $Du=0{,}074$,	$\omega_0=0{,}239$

Есть единственный тип (при $a_2>0$, $a_2\gg 1$ MCAD не считает) при $a_2=-1/2$ с $Du=0{,}064$ — вполне малый, но $\gg Du(\sqrt{1-4x^2})=0{,}014$.

Escaneado con CamScanner

Date. 16. 01. СФ Wires

Из СФ-пробных ядра $u_0(x) = (1-4x^2)^{\alpha}$,
$\alpha = 1/4$ дает $D_u = 0{,}019$, $\alpha = 0{,}6$ дает $D_u = 0{,}019$ и D_u растет дальше с "α".
$\alpha = 0{,}4$ — $D_u = 0{,}017$. Так что $\alpha = 1/2$ дает min D_u и самую пологую (по ходу расчета D_u) пробную функцию.
→ Увеличим точность расчета D_u за счет краев интервала.

Теперь $x \in [-0{,}498,\ 0{,}498]$ $D_u(\alpha=1/2) = 0{,}022$; $D_u(0{,}4) = 0{,}015$;
$D_u(0{,}3) = 0{,}020$; $D_u(0{,}35) = 0{,}016$; $D_u(0{,}45) = 0{,}017$.
Минимум $D_u(\alpha)$ дает $\alpha = 0{,}4$ при такой точности D_u.

Проверим еще качество пробных функций: $u_0(x) = 1$ (см.) и $u_0(x) = \sin(\pi x)$

$u_0(x) = 1$ дает $D_u = 0{,}037$ (было 0,031) $\omega_0(\bar{\lambda}) = 0{,}269$; $\omega_0(\lambda(0)) = 0{,}232$

$u_0(x) = \sin(2\pi x)$ дает $D_u = 0{,}168$ (было 0,080) $\omega_0(\bar{\lambda}) = 0{,}250$; $\omega_0(\lambda(0)) = 0{,}227$

Видно, что рост точности расчета D_u, увеличил D_u для 1 и $\sin(2\pi x)$ заметно.
$u_0(x) = \cos(\pi x) \to D_u = 0{,}214$, $\omega(\bar{\lambda}) = 0{,}171$ — еще хуже.
$\cos(\pi x)$ считает очень плохо.

16/VII → Колумбово яйцо: Система СФ — присоед. полиномов Лежандра $P_n^m(2x)$ является хорошим приближением для истинных СФ нашего оператора $\int_{-w/2}^{w/2} dx' g(xx') m(x') = \lambda m(x)$ (Wires) и все.

$P_1^1(2x) = \sqrt{1-4x^2}$; $P_2^1(2x) = 6x\sqrt{1-4x^2}$; $P_2^2(2x) = 3(1-4x^2)$

$P_3^1(2x) = \frac{3}{2}(20x^2-1)\sqrt{1-4x^2}$; $P_3^2(2x) = 30x(1-4x^2)$; $P_3^3(2x) = 15(1-4x^2)^{3/2}$

Ортогон. по нижнему индексу: $\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, P_n^m(\cos\theta) P_{n'}^m(\cos\theta) = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{nn'}$

Все $P_n^m(2x)$ удовлетв. гр. усл. $(x = \pm 1/2)$ $P_n^m(\pm 1) = 0$.

СФ	$P_1^1(2x)$	$P_2^1(2x)$	$P_2^2(2x)$ ↓выбросить	$P_3^1(2x)$	$P_4^1(2x)$ Wires, P=0,011	$P_5^1(2x)$
D_u	0,022 / 0,033 точнее	0,058	0,190	не счит.	0,113	
→ $\omega(\bar{\lambda})$	0,256	0,311	0,188 (?)	не счит., 0,324 — после обхода нулей	0,339	не считает
$\omega(\lambda(0))$	0,240 / 0,236 точнее Е	(0,311)	0,246	0,288	(0,227)	0,317
$f_{эксп}$	0,236	0,266	0,297	0,319	0,339	
ω(Вариф)	0,242	неверно считает	—	0,311	0,374 (?)	

Видно, какую оговоренность на $P_n^1(2x)$, ведь ортогональность по нижнему индексу.
$P_4^1(2x) = 5x(7{\cdot}4x^2-3)\sqrt{1-4x^2}$. $\omega[\lambda(0)]$ для $P_{2,4}^1(2x)$ не имеет смысла, т.к. $\lambda(0) = 0$.

Escaneado con CamScanner

Date. 17.07.

λ_2^n и собств. частоты $\omega_n^2 = \left[\omega_n + 1 + \frac{\lambda_2^n}{4\pi}\right]\left[\omega_n - \frac{\lambda_2^n}{4\pi}\right]$, $\lambda_n^2 = 4\pi\zeta_{n\infty}^2$ можно искать и из расчета функционала как 15/I:

$$\lambda_2^n = \int_0^1 dx \int_0^1 dx' g(x,x') m_2^n(x) m_2^n(x') \cdot \frac{1}{N_n}, \quad N_n = \int_0^1 dx \left[m_2^n(x)\right]^2.$$

В программе SW. wires у меня задано: $-\frac{\lambda_2}{4\pi} = \lambda = -\zeta_{n\infty}^2$

Это способ поиска частот, т.к. иначе неясно какое λ брать для расчета ω_n: $\bar{\lambda} = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, \lambda(x)$, или $\lambda(x=0) = \lambda(0)$ когда пробная СФунк. не есть точная (ф. Для точных СФ $\lambda \neq f(x)$ и способ усредн. неважен.

$\lambda(\text{вариац.}) = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, \lambda(x) u^2(x) \Big/ \int_{-1/2}^{1/2} dx\, u^2(x)$. $\lambda(\text{вар.}) = \bar{\lambda} = \lambda(0)$ для точных СФ.

Сам метод расчета $\bar{\lambda}$ занижает ее (завышает ω), т.к. из $\int_{-1/2}^{1/2} dx\, \lambda(x)$ приходится исключать окрестности $|x| = 1/2$, где сама $\lambda(x)$ имеет max значения. $\lambda(\text{вар}) \sim \int_{-1/2}^{1/2} dx\, \lambda(x) u^2(x)$ и $x = \pm 1/2$ - идея была не далек. т.к. $u(\pm 1/2) = 0$.

$\bar{\lambda} < \lambda_{\text{вар}} \leq \lambda(0) \rightarrow \omega(\bar{\lambda}) > \omega(\lambda_{\text{вар}}) \geq \omega[\lambda(0)]$.

СФ P_2^1, P_3^1, P_4^1 MathCad не считает или считает неверно.

Если $P_m^1(2x) \equiv |m\rangle$ (или $u_m(x)$), то $\langle m|g|n\rangle = \frac{1}{4\pi}\int dx\, dx'\, g(x,x')\, u_m(x) u_n(x')$ - недиаг. матрич. элементы ФГ. $\langle 1|g|1\rangle = -0{,}662$

$\langle 2|g|1\rangle = \langle 1|g|2\rangle = 0$ (!); $\langle 1|g|3\rangle = 1{,}9 \cdot 10^{-3}$; $\langle 1|g|4\rangle = 0$,

что говорит в пользу диагональности (почти) матрицы $\langle m|g|n\rangle$ и эквивалентно утверждению, что $u_m(x)$ - хорошие проб. функции и почти СФ.

$\langle 2|g|4\rangle = 9{,}9 \cdot 10^{-4}$; $\langle 2|g|3\rangle = 0$; $\langle 3|g|4\rangle = 0$,

Точнее, $\langle 1|g|3\rangle$ надо домнож. на 3/2, а $\langle 2|g|4\rangle$ на $5 \cdot 6 = 30$ и $\langle 2|g|4\rangle = 3 \cdot 10^{-3}$, но ума это не меняет, все равно недиаг. м. элементы $\ll$ диагональных. Хотя $\langle 4|g|4\rangle = -0{,}08$ всего.

СФ $P_3^1(2x)$ все же посчитал, но при большом $\varepsilon = 10^{-6}$. $P_4^1(2x)$ можно посчитать и при $\varepsilon \to 0$. Но с $P_2^1(2x)$ проблема.

За исключением $P_1^1(2x) = \sqrt{1-4x^2}$ нельзя сказать, что $P_n^1(2x)$ хорошо описывают эксперимент SW wires.

Ничего удивит. в том, что недиаг. $\langle m|g|n\rangle = 0$ точно нет (при m разной четности) т.к. $P_n^1(2x)$ - четные или нечетные, а $\int_{-1/2}^{1/2} dx(\cdot)$ от произведения двух СФ разной четности точно $= 0$ из-за нечетности подынт. фун-ии.

Этому соответ. $P_m^{m\pm 2} \neq 0$ при $\cos(\pi m x)$ - пробных функциях.

Escaneado con CamScanner

Date. 20.07. Лекция Соотношения

$$P_n'(x) = -\frac{nx}{\sqrt{1-x^2}} P_n(x) + \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} P_{n-1}(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \left[P_{n-1}(x) - x P_n(x) \right]$$

$$P_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[P_0(x) - x P_1(x) \right] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[1 - x \cdot x \right] = \sqrt{1-x^2}$$ – верно

$$P_5'(x) = \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} \left[P_4(x) - x P_5(x) \right] = \frac{5}{\sqrt{(\cdot)}} \left[\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) - \right.$$

$$\left. - x \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \right] = \frac{5}{8\sqrt{1-x^2}} \left[-63x^6 + 105x^4 - 45x^2 + 3 \right] - ?$$

$$P_2'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \left[P_1(x) - x P_2(x) \right] = \frac{2}{\sqrt{(\cdot)}} \left[x - x \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right] = 3x\sqrt{1-x^2}$$ – верно

$$P_5'(x) = \frac{5}{8} \cdot 3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[-21x^6 + 35x^4 - 15x^2 + 1 \right] = \frac{3 \cdot 5}{8} \frac{(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \left[21x^4 - 14x^2 + 1 \right] =$$

$$= \frac{15}{8}\sqrt{1-x^2} \cdot \left[21x^4 - 14x^2 + 1 \right]$$

$$\rightarrow P_5'(2x) = \frac{15}{8} \left[21 \cdot 16x^4 - 14 \cdot 4x^2 + 1 \right] \cdot \sqrt{1 - 4x^2}$$ – теперь осюс. центра для СФ.

$$\lambda m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g(x - x') m(x') = \left| \begin{matrix} x' - x = \xi \\ dx' = d\xi \end{matrix} \right| = \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, g(\xi) m(x + \xi)$$

$$\lambda \frac{\partial m(x)}{\partial x} = g(1/2 - x) m(1/2) - g(1/2 + x) m(-1/2) + \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, g(\xi) \frac{\partial m(x+\xi)}{\partial x}$$

Если $m(\pm 1/2) = 0$, то $g(\cdot) m(\pm 1/2) = 0$, т.к. $\ln|1/2 - x| \cdot m(1/2) = 0$, если при $x \to 1/2$, $m(x) \sim (1/2 - x)$.

$$\frac{\lambda \partial m(x)}{\partial x} = \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, g(\xi) \frac{\partial m(x+\xi)}{\partial x} = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g(x' - x) \frac{\partial m(x')}{\partial x'}$$ – снова получили,

что $m'(x)$ удовл. тому же инт. ур., что и $m(x)$.

$$\lambda \frac{\partial m(x)}{\partial x} = \int_{-1/2}^{1/2} dx' \frac{4p}{(x - x')\left[p^2 + (x - x')^2\right]} m(x') = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g(x x') \frac{\partial m(x')}{\partial x'}$$

0/VII

→ M. Goldberg: (*) $\int_0^\infty dt \left[\frac{1 - e^{-pt}}{pt} - \lambda \right] |\hat{m}(t)|^2 = 0$, $\hat{m}(t) = \int dx\, m(x) e^{itx}$,



что сразу дает $0 < \lambda < 1$ $\left(\lambda = \frac{\lambda_2}{(-4\pi)} \right)$.

Фактически (*) задает $\lambda = \lambda(p)$ для данной СФ $m_n(x)$.

$$g(\xi) = \frac{2}{p} \ln \left(\frac{\xi^2}{\xi^2 + p^2} \right) = \frac{2}{p} \int_0^\infty dt \cos(\xi t) \left[\frac{e^{-pt} - 1}{t} \right]$$ или $g(\xi) = \frac{2}{p} \ln(\cdot) = -\frac{4}{p} \int_0^p dt \frac{2}{z^2 + \xi^2}$

$$\lambda m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g(x - x') m(x') = \frac{4}{p} \int_{-1/2}^{1/2} dx' m(x') \int_0^\infty dt \left[\frac{e^{-pt} - 1}{t} \right] \cos t(x - x')$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} dx' m(x') \cos t(x - x') = \int_{-1/2}^{1/2} dx' m(x') \left[\cos tx \cos tx' + \sin tx \sin tx' \right] = \left| \begin{matrix} \text{если } m(x) - \\ \text{чет.} \end{matrix} \right| =$$

Date. . .

$$m(t) = \int_{-1/2}^{1/2} dx \cos xt \cdot m(x)$$

$= \cos tx \int_{-1/2}^{1/2} dx' m(x') \cos tx' = \cos tx \cdot \hat{m}(t)$,

$m(x) = A \int_0^\infty dt\, \hat{m}(t) \cos tx$ → (?) – можно ли так?

$\lambda A \int dt\, \hat{m}(t) \cos tx = \frac{4}{P} \int_0^\infty dt \left[\frac{e^{-pt}-1}{t}\right] \cos tx\, \hat{m}(t)$ – ?

Инт. ур.: $\lambda m(x) = \frac{4}{P} \int_0^\infty \frac{dt}{t} [e^{-pt}-1] \cos tx \cdot \hat{m}(t)$, умн. на $m(x)$ и $\int_{-1/2}^{1/2} dx (\cdot)$

$\lambda \int m^2(x)\, dx = \frac{4}{P} \int \frac{dt}{t}[\cdot]\hat{m}(t) \int_{-1/2}^{1/2} dx\, m(x) \cos tx = \frac{4}{P} \int_0^\infty \frac{dt}{t}[e^{-pt}-1]\hat{m}^2(t)$

Если СФ нормирована на 1, $\int m^2(x)\,dx = 1$, то получим

$\lambda(p) = \frac{4}{P} \int_0^\infty \frac{dt}{t}[e^{-pt}-1]\hat{m}^2(t)$ – спектр, выраж. через СФ. (аналог вариац. подхода)

1) Для $m(x) = \sqrt{1-4x^2}$, $\hat{m}(t) = \int_{-1/2}^{1/2} dx \sqrt{1-4x^2}\cos xt = 2\int_0^{1/2} dx \sqrt{1-4x^2}\cos xt =$

$= \left|\begin{matrix} 2x = z \\ 2dx = dz \end{matrix}\right| = 2\int_0^1 \frac{dz}{2}\sqrt{1-z^2}\cos\left(\frac{t}{2}z\right) = \int_0^1 dz \cos\left(\frac{t}{2}z\right)\sqrt{1-z^2} = \frac{\pi}{t} J_1\left(\frac{t}{2}\right)$ (3.752 пр. р.)

$\hat{m}(t) = \frac{\pi}{t} J_1\left(\frac{t}{2}\right)$, $\lambda(p) = \frac{4\pi^2}{P} \int_0^\infty dt \frac{[e^{-pt}-1]}{t} \frac{J_1^2(t/2)}{t^2}$

Можно ли? Если $e^{-pt}-1 = -pt + \frac{1}{2}p^2t^2$, то $\lambda(p) = \frac{4\pi^2}{P}\int_0^\infty dt \left[-p + \frac{1}{2}p^2 t\right]\frac{J_1^2(t/2)}{t^2} =$

Коэфф. сущ. расходится

$= -4\pi^2 \int_0^\infty dt \frac{J_1^2(t/2)}{t^2} + 2\pi^2 p \int_0^\infty dt \frac{J_1^2(t/2)}{t} = -4\pi + 2\pi^2 p \int_0^\infty \frac{dt}{t} J_1^2(t)$

можно вычислить численно

$\frac{\lambda(p)}{(-4\pi)} = 1 - \frac{\pi}{2} p \int_0^\infty \frac{dt}{t} J_1^2(t) = 1 - \frac{\pi}{4} p$ (!). Это дает $\frac{\lambda_0}{(-4\pi)} = 0{,}991$ и $\omega_0 = 0{,}245$

2) Для $m(x) = P_3^1(2x) = \frac{3}{2}(20x^2-1)\sqrt{1-4x^2}$ (можно, см. след. стр.)

$\hat{m}(t) = \int_{-1/2}^{1/2} dx (20x^2-1)\sqrt{1-4x^2}\cos xt = 2\int_0^{1/2} dx(\cdot) = \int_0^1 dz (5z^2-1)\sqrt{1-z^2}\cos\left(\frac{t}{2}z\right) =$

$= 5\int_0^1 dz z^2\sqrt{1-z^2}\cos\left(\frac{t}{2}z\right) - \int_0^1 dz\sqrt{(\cdot)}\cos\left(\frac{t}{2}z\right)$

не видно как брать, но можно численно

3) $m(x) = P_2^1(2x) = 6x\sqrt{1-4x^2}$, $\hat{m}(t) = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, m(x)\sin xt =$

нечет.

$= \int_{-1/2}^{1/2} dx\, 6x\sqrt{1-4x^2}\sin xt = 2\int_0^{1/2} dx(\cdot)$. Вернемся в 1) нормировку.

Итого $m(x) = A\sqrt{1-4x^2}$, $\int dx\, m^2(x) = A^2\int_{-1/2}^{1/2} dx(1-4x^2) = A^2\frac{2}{3} = 1$, $A = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Если $\hat{m}(t) = \frac{\pi}{t}J_1\left(\frac{t}{2}\right)$, то $\int_0^\infty dt\, \hat{m}^2(t) = \pi^2 \int_0^\infty dt \frac{J_1^2(t/2)}{t^2} = \left|t/2 = z\right| = \frac{\pi^2}{2}\int_0^\infty dz \frac{J_1^2(z)}{z^2} =$

$= \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{4}{3\pi}\right) = \frac{2}{3}\pi$. Поэтому

$$\lambda(p) = \frac{1}{\int m^2(x)dx}\left[\frac{4}{P}\int_0^\infty dt \left[-p + \frac{1}{2}p^2 t\right]\hat{m}^2(t)\right] = \frac{1}{\int m^2 dx}\left[-4\int_0^\infty dt \hat{m}^2(t) + 2p\int_0^\infty dt\, t\hat{m}^2(t)\right]$$

Escaneado con CamScanner

Date.

Нормировка: $\int_{-1/2}^{1/2} dx\, m^2(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dt\, \hat{m}^2(t)$, $\int_0^\infty \frac{dt}{t} J_1^2(t) = 1/2$

$$\lambda_0(p) = \frac{3}{2}\left[-4\cdot\frac{2}{3}\pi + 2p\int_0^\infty \frac{dt}{t}\pi^2 J_1^2(t/2)\right] = -4\pi + \frac{3}{2}\cdot 2p\pi^2\cdot\frac{1}{2} = -4\pi + \frac{3}{2}\pi^2 p$$

$$\frac{\lambda_0(p)}{(-4\pi)} = 1 - \frac{3\pi}{8}p, \quad \frac{\lambda_0}{(-4\pi)} = 0{,}987 \text{ и } \omega_0 = 0{,}253 \text{ — более точно}$$

→ Т.е. СФ $m_0(x) = \sqrt{1-4x^2}$ дает частоту $\omega_0 = 0{,}253$ — слишком большое значение, лучшее и $\omega_0(\bar{\lambda})$ табличное от 16/VII.

→ ① Не $m_0(x) = 1$ метод дает $\hat{m}(t) = \int_{-1/2}^{1/2} dx \cos xt = \frac{\sin xt}{t}\Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{2}{t}\sin\frac{t}{2}$

$\int m_0^2\, dx = 1$ и

$$\lambda_0(p) = -4\int_0^\infty dt\, \hat{m}^2(t) + 2p\int_0^\infty dt\, t\hat{m}^2(t) = -4\int dt\, \frac{\sin^2(t/2)}{(t/2)^2} + 2p\int_0^\infty \frac{dt}{t}\cdot 4\sin^2\frac{t}{2} =$$

$$= -4\cdot 2\int_0^\infty dz\, \frac{\sin^2 z}{z^2} + 2p\cdot 4\int_0^\infty dz\, \frac{\sin^2 z}{z} = -4\pi + 8p\int_0^\infty dx\, \frac{\sin^2 x}{x}$$ — знак ∞p расходится

$\int_0^\infty dx\, \frac{\sin^2 x}{x} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin ax\cdot\sin bx}{x}dx = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$, — тоже расходится при $a\to b$

$\int_0^\infty \frac{\sin^2 z}{z} dz = \frac{\pi}{2}$. Метод с $m_0(x)=1$ неприменим (и не удивительно, ведь для $m_0(x)$ не удобен. $m_0(\pm 1/2) = 0$).

Если инт. ур. умножить на $\cos xt$ и $\int_{-1/2}^{1/2} dx(\dots)$

$$\int_{-1/2}^{1/2} dx\, \cos^2 xt = \frac{1}{2}\int dx\,(1+\cos 2xt) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin 2xt}{2t}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{4t}\left(\sin t - \sin(-t)\right) = \frac{\sin t}{2t}$$

$$\lambda\int m(x)\cos xt\, dx = \frac{4}{p}\int_0^\infty \frac{dt'}{t'}\left[e^{-pt'} - 1\right]\hat{m}(t')\int_{-1/2}^{1/2} dx\cos xt'\cos xt =$$

$$= \frac{4}{p}\int_0^\infty \frac{dt'}{t'}\left[e^{-pt'} - 1\right]\hat{m}(t')\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(t'-t)}{(t'-t)} + \frac{\sin\frac{1}{2}(t'+t)}{(t'+t)}\right] = \lambda\hat{m}(t)$$ — ядро не разложено

Инт. ур. $\lambda\hat{m}(t) = \frac{4}{p}\int_0^\infty \frac{dt'}{t'}\left[e^{-pt'} - 1\right]\left[\int dx\cos xt'\cos xt\right]\hat{m}(t')$

Другие предсказ. инт. ур. Wires → $\lambda\hat{m}(t) = \int_0^\infty dt'\,\hat{g}(t,t')\hat{m}(t')$, где $\hat{g}(t,t') = \frac{4}{pt'}\left[e^{-pt'} - 1\right]\int_{-1/2}^{1/2} dx\cos xt'\cos xt$

При $p\to 0$ $(\omega\to\infty)$ $\hat{g}(t,t') \to -4\pi\delta(t-t')$, предельно упрощается, но ядро $\hat{g}(t,t')$ усложнилось, оно не разностное уже.

Это аналогично рассм. преобраз. Бесселя для СФ инв. доля.

Если $\lambda(p) = \frac{4}{p}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left[e^{-pt} - 1\right]\hat{m}^2(t)$ можно считать точным, но разложение его по p^n может быть неверным даже если $\int_0^\infty dt\, t\hat{m}^2(t)$ сходится. $\frac{1}{x}(e^{-x} - 1) = f(x) - 1$, $\int_0^\infty \hat{m}^2(t)dt = \pi\int_{-1/2}^{1/2} m^2(x)dx = \pi$ ч.т.д.

→ Метод $\lambda(p) = -4\pi + 4\int_0^\infty dt\, f(pt)\hat{m}^2(t)$, $f(pt) \underset{p\to 0}{=} \frac{1}{2}pt$ — плохо.

Еще можно $g(\xi) = \frac{2}{p}\ln\left(1 + \frac{p^2}{\xi^2}\right) = \frac{2}{p}\cdot 2\int_0^\infty dt\, e^{-t|\xi|}\frac{(1-\cos pt)}{t}$, но не видно какой выход.

Escaneado con CamScanner

Date. 21.07.

Для $\hat m(t)=\frac{\pi}{t}J_1(t/2)$, $m_0(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{1-4x^2}$, $\int_{-1/2}^{1/2} m_0^2(x)\,dx=1$

$\lambda(p)=-4\pi+4\cdot\int_0^\infty dt\,f(pt)\frac{\pi^2 3}{2}\frac{J_1^2(t/2)}{t^2}=-4\pi+6\pi^2\int_0^\infty dt\,f(pt)\frac{J_1^2(t/2)}{t^2}$

(числ. расчёт можно и таким рассчитать)

$\left(-\frac{1}{4\pi}\right)\lambda(p)=1-\frac{3\pi}{2}\int_0^\infty dt\,f(pt)\frac{J_1^2(t/2)}{t^2}$, $I(p)=\int_0^\infty dt\,f(pt)\frac{J_1^2(t/2)}{t^2}$

С большой точностью $I(p=0{,}011)=2{,}665\cdot10^{-3}\to\frac{\lambda_0}{(-4\pi)}=1-\frac{3\pi}{2}\cdot2{,}665\cdot10^{-3}=0{,}087$ (!)

и $\omega_0(\lambda_0)=0{,}253$. Т.е. числен. расчёт для кандидата в СФ $m_0(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{1-4x^2}$ дал также $\omega_0=0{,}253$ как было в методе разложения по "$p^n\ll1$".

Вывод: $m_0(x)\sim\sqrt{1-4x^2}$ (функциональная основного состояния) плохо согласуется с экспериментом, где $f_0=0{,}236$.

→А что даст числ. расчёт для $m_0(x)=1$, $\hat m(t)=\frac{2}{t}\sin\frac{t}{2}$

$\frac{\lambda_0(p)}{(-4\pi)}=1-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dt\,f(pt)\frac{4}{t^2}\sin^2(t/2)=1-\frac{4}{\pi}\cdot0{,}014=0{,}982$, что

даст $\omega_0[m_0(x)=1]=0{,}263$, т.е. $m_0(x)=1$ еще хуже для СФ осн. состояния, чем $\sqrt{1-4x^2}$ (что и по Ди было видно).

А потому что $\lambda_0(p)$ с коэфф. расходящ. p^n не согласуется, где $f_0=1-\frac{2}{3\pi}$

Эта ω_0 согласуется с вариац. расчётом от 16/II для $\cos(\pi m x)$, $m=0$.

$u_0(x)=\cos(\pi x)$ [$\sin(\pi x)$ н/м $x\in[0,1]$ как 16/II] даёт расчёт $\omega_0=0{,}238$!



→Т.е. $\sin\pi m x'=\begin{cases}\sin(\pi m x'), & x'\in[-\frac12,\frac12]\\ \cos(\pi m x'), & m\text{-нечет.}\end{cases}$ m-чет. ($m>0$) все же явл. лучшими пробными СФ, чем $P_m^1(2x)$. И $m(\pm1/2)=0$ выполн.

→Вариац. расчёт на $\sin(\pi m x')$ от 16/II явл. лучшим обоснованием SW-эксперимента. К тому же СФ $\sin(\pi m x')$ – хорошие и полную систему на $x'\in[0,1]$ образуют. И проблемы устранены $\lambda(x)$ нет.

→Вернемся к ур. $\Lambda m(x)=(-4)\int_{-1/2}^{1/2}dx'\frac{m(x')}{(x-x')^2+p^2}$ от 12.07. 21/VII

Пусть $m(x)$ есть неизвестная точная СФ. Положим $x=0$:

$\Lambda m(0)=(-4)\int_{-1/2}^{1/2}dx'\frac{m(x')}{x'^2+p^2}=(-4)\int_{-1/2}^{1/2}dx\,\frac{1}{x^2+p^2}\left[m(0)+\frac12 m''(0)x^2\right]=$

$=(-4)m(0)\left[\frac{\pi}{p}-4\right]-2m''(0)\int_{-1/2}^{1/2}dx\,\frac{x^2}{x^2+p^2}=-4m(0)\left[\frac{\pi}{p}-4\right]-2m''(0)\cdot1+O(p)$

(именно такие "добавки" теряются, если $\lambda(p)$ вычисл. численно)

$\Lambda(p)=\left(\frac{\partial}{\partial p}+\frac{1}{p}\right)\lambda=-\frac{4\pi}{p}+16-2\frac{m''(0)}{m(0)}$... и только $m''(0)\neq0$ даёт $\lambda(p)=-4\pi+8p$.

Escaneado con CamScanner

Date. . .

СФ $\sin(\pi m x') = \begin{cases} \cos \pi m x, & m - \text{нечет} \\ \sin \pi m x, & m - \text{чет} \end{cases}$

Разложение $\lambda(p)$ в ряд по собственным числам СФ дает точные СФ $\cos(\pi m x)$, $x \in [-1/2, 1/2]$ (можно получить — формула 11-18/I)

$$\lambda_m = \lambda_0 - 8p\left[1 - \frac{\pi m}{2} Si\left(\frac{\pi m}{2}\right)\right], \quad \lambda_0 = I_0(x=0) = -4\pi + 8p$$

$$\lambda_m = -4\pi + 8p - 8p\left[1 - \frac{\pi m}{2} Si(1)\right] = -4\pi + 4\pi m p\, Si\left(\frac{\pi m}{2}\right)$$

$$\frac{\lambda_m}{(-4\pi)} = 1 - mp\, Si\left(\frac{\pi m}{2}\right)$$ осн. гармоника $m=1$, $\lambda_1 = 1 - 1{,}31p = 0{,}985$; $\omega_0 = 0{,}257$

Здесь $\lambda_m = \lambda_m(x=0)$ для нужных СФ. Ряд по $U^{[25]}(0)$ хорошо (плохо) дает хорошие СФ. Для прочих ф. (не явл. СФ) этот ряд дает $\lambda_m(x=0)$, которое отлич. от λ, $\lambda_{вар.}$, и плохо описывает $\lambda_m(x)$. $\lambda_{m=0}(x=0)$ тоже плохо описывает (вообще) λ_0, но $\cos(\pi \cdot 0 \cdot x)$ нужные СФ неизвестна из-за гран. условий $m(\pm 1/2) = 0$.

Можно $\lambda_m(x=0)$ считать и для $\sin(\pi m x)$, но не имеет смысла, т.к. они неверно будут отображать спектр СЗ, из-за того, что это точно не хорошие СФ.

→ Правильно найти $\lambda_{вар.}$ на $\sin(\pi m x')$, $x' \in [0,1]$ как 16/II и сравнить частоты ω_m. Они достаточно хорошо совпад. с f_m экс.

Ядро не зависит от p — видно к которое выполнено условие, там $\lambda m(x) = \frac{2}{p}\int dx' \ln\left[\frac{(x-x')^2}{(x-x')^2+p^2}\right] m(x')$.

$$\frac{1}{\xi^2+p^2} = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-|\xi| t} \sin pt\, dt, \quad (-4)\int_{-1/2}^{1/2} dx' m(x') \frac{1}{p}\int dt e^{-|x-x'|t} \sin pt = \Lambda m(x)$$

$$g(\xi) = -\frac{4}{p}\int_0^\infty dt\, e^{-|\xi| t}\frac{(1-\cos pt)}{t}; \quad g''_{\xi\,(\text{т.к. нет } x)} = -\frac{4}{p}\int dt \frac{(1-\cos pt)}{t}\left[t^2 e^{-t|\xi|} - 2t\,\delta(\xi)\right]$$

$$\lambda m''(x) = \int dx' \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x x') m(x') = \int dx' m(x')\left(-\frac{4}{p}\right)\int dt \frac{(1-\cos pt)}{t}\left[t^2 e^{-t|x-x'|} - 2t\delta(x-x')\right]$$

$$= \left(-\frac{4}{p}\right)\int dt\,(1-\cos pt)\left[\int dx' m(x')\, t\, e^{-t|x-x'|} - \int dx' m(x') 2\delta(x-x')\right] =$$

$$= \frac{8}{p} m(x)\int_0^\infty dt\,(1-\cos pt) - \frac{4}{p}\int dx' m(x')\int dt\, t(1-\cos pt) e^{-t|x-x'|} \quad \text{— неясно.}$$

$$\Lambda m(x) = \left(-\frac{4\pi}{p}\right)\int_{-1/2}^{1/2} dx'\left[\frac{1}{\pi}\frac{p}{(x-x')^2+p^2}\right] m(x'), \quad \lim_{p\to 0} \frac{1}{\pi}\frac{p}{(x-x')^2+p^2} \to \delta(x-x')$$

Доказать инт. ур. на СФ отдел.

$$\Lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial p} + \frac{\lambda}{p} = \frac{\partial}{\partial p}(-4\pi + Ap) + \frac{1}{p}(-4\pi + Ap) = \frac{(-4\pi)}{p} + 2A$$

$$\Lambda\left(\frac{p}{-4\pi}\right) = 1 - 2A\left(\frac{p}{4\pi}\right) = \Lambda^*, \quad \Lambda^* m(x) = \frac{p}{\pi}\int_{-1/2}^{1/2} dx' \frac{m(x')}{(x-x')^2+p^2}.$$

Escaneado con CamScanner

Date. 22.07. СЗ. математическая операторная Wiener

$$g(\xi)=\frac{2}{\rho}\ln\left(\frac{\xi^2}{\xi^2+\rho^2}\right)=\frac{2}{\rho}\ln\left(\frac{(\xi/\rho)^2}{(\xi/\rho)^2+1}\right)=\frac{2}{\rho}\left(-\frac{2}{\pi}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t-\xi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\rho}{t}\right)$$ 22/VII

$$\frac{\partial g(\xi,\rho)}{\partial\rho}=-\frac{1}{\rho}g(\xi,\rho)-\frac{4}{\rho\pi}(>\rho)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t-\xi}\frac{t}{t^2+\rho^2}=-\frac{1}{\rho}g-4\frac{1}{\xi^2+\rho^2}$$

Если было $g(\xi,\rho)=-\frac{4}{\rho}\int_0^{\rho}dz\frac{z}{z^2+\xi^2}$, $\frac{\partial g}{\partial\rho}=-\frac{1}{\rho}g-\frac{4}{\rho}\frac{\rho}{\rho^2+\xi^2}=-\frac{1}{\rho}g-4\cdot\frac{1}{\xi^2+\rho^2}$

$$g(\xi)=-\frac{4}{\rho\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt\frac{1}{t-\xi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\rho}{t}\right)=\left|\begin{matrix}\xi=x'-x\\ t-\xi=t+x-x',\ t+x=t'\end{matrix}\right|=-\frac{4}{\rho\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt'}{t'-x'}tg^{-1}\left(\frac{\rho}{t'-x}\right)$$

$$\lambda m(x)=\int dx'\,g(x-x')m(x')=\int dx'm(x')\left(-\frac{4}{\rho\pi}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt'}{t'-x'}tg^{-1}\left(\frac{\rho}{t'-x}\right),$$ умн. на $\frac{1}{t-x}$ и $\int dx(\dots)$

$$\lambda\int dx\frac{m(x)}{t-x}=\left(\frac{-4}{\rho\pi}\right)\int dx\int dx'm(x')\frac{1}{t-x}\int\frac{dt'}{t'-x'}tg^{-1}\left(\frac{\rho}{t'-x}\right)$$

Интегральное ур. (Wiener-Hopf type)

$$\hat m(t)=\int_{-\frac12}^{\frac12}dx\frac{m(x)}{t-x},\quad \lambda\hat m(t)=\left(\frac{-4}{\rho\pi}\right)\int dt'\left[\int dx\frac{tg^{-1}\left(\frac{\rho}{t'-x}\right)}{t-x}\right]\int dx'\frac{m(x')}{t'-x'}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dt'\,\hat m(t')\,\hat g(t,t'),\ \text{где}\ \hat g(t,t')=\left(-\frac{4}{\pi\rho}\right)\int_{t'-\frac12}^{t'+\frac12}dx\frac{tg^{-1}\left(\frac{\rho}{t'-x}\right)}{t-x}=\left|\begin{matrix}t'-x=z\\ dx=-dz\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{4}{\pi\rho}\int_{t'+\frac12}^{t'-\frac12}(-1)dz\frac{tg^{-1}\left(\frac{\rho}{z}\right)}{(t-t')+z}.$$

$$\lambda\hat m(t)=\int_{-\infty}^{\infty}dt'\,\hat g(t,t')\hat m(t')$$ инт. ур. с ∞-пределами

Гильберт-представление инт. ур. по ФФ

ядро $\hat g(t,t')=\left(\frac{-4}{\pi\rho}\right)\int_{-\frac12}^{\frac12}dx\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\rho}{t'-x}\right)}{t-x}$ – близко к рациональному.

$$\frac{\partial\hat g}{\partial\rho}=-\frac{1}{\rho}\hat g+\left(-\frac{4}{\pi\rho}\right)\int dx\frac{1}{(t-x)}\frac{1}{1+\frac{\rho^2}{(t'-x)^2}}\frac{1}{(t'-x)}=-\frac{1}{\rho}\hat g+\left(\frac{-4}{\pi\rho}\right)\int_{-\frac12}^{\frac12}dx\frac{1}{(t-x)}\cdot\frac{(t'-x)}{(t'-x)^2+\rho^2}$$

$$J(t,t')=\int_{-\frac12}^{\frac12}dx\frac{(x-t')}{(x-t)}\frac{1}{(t'-x)^2+\rho^2}=\left|\begin{matrix}x-t'=z\\ x-t=z+\Delta\\ \Delta=t'-t\end{matrix}\right|=\int_{-\frac12-t'}^{\frac12-t'}dz\frac{z}{(z+\Delta)(z^2+\rho^2)}=$$

$$=\int dz\frac{z+\Delta-\Delta}{(z+\Delta)(z^2+\rho^2)}=\int dz\frac{1}{z^2+\rho^2}-\Delta\int\frac{dz\cdot}{(z+\Delta)(z^2+\rho^2)}=\frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}\frac{z}{\rho}\Big|_{\cdot}-$$

$$-\Delta\left[\frac{1}{2(\Delta-\rho^2\cdot0+\Delta^2)}\ln\frac{(z+\Delta)^2}{z^2+\rho^2}-\frac{(-2)\Delta}{2(\Delta+\Delta^2)}\int\frac{dz}{z^2+\rho^2}\right]_{\cdot}=\left|\leftarrow\text{по пр.-Р.}\right|=$$

$$=\left[\frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}\frac{z}{\rho}-\frac{1}{2(1+\Delta)}\ln\frac{(z+\Delta)^2}{z^2+\rho^2}+\frac{\Delta(-1)}{(1+\Delta)}\cdot\frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}\frac{z}{\rho}\right]_{\cdot}=$$

$$=\frac{1}{1+\Delta}\left[\frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}\frac{z}{\rho}-\frac12\ln\frac{(z+\Delta)^2}{z^2+\rho^2}\right]_{-\frac12-t'}^{\frac12-t'}=\frac{1}{1+\Delta}\left[\frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}\frac{(\frac12-t')}{\rho}+\frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}\frac{(\frac12+t')}{\rho}-\right.$$

$$\left.-\frac12\ln\frac{(\frac12-t)^2}{(\frac12-t')^2+\rho^2}+\frac12\ln\frac{(\frac12+t)^2}{(\frac12+t')^2+\rho^2}\right],\ \Delta=t'-t.$$ Здесь $J(tt')$ неточно, см. →

$$\frac{\partial\hat g(tt')}{\partial\rho}=-\frac{1}{\rho}\hat g+\left(-\frac{4}{\pi\rho}\right)J(t,t'),$$ но $\frac{\rho}{(t'\pm\frac12)}$ нельзя разлагать.

Escaneado con CamScanner

Date. . . Новое ядро с ∞-пределами:

$$J(t,t') = \frac{1}{1+t'-t}\left[\frac{1}{p}\left(\operatorname{arctg}\frac{1/2-t'}{p} + \operatorname{arctg}\frac{1/2+t'}{p}\right) + \frac{1}{2}\ln\frac{(1/2-t')^2+p^2}{(1/2+t')^2+p^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\ln\frac{(1/2+t)^2}{(1/2-t)^2}\right], \text{ видно сингулярности } \ln(\cdot) \text{ при } t=\pm 1/2.$$

Если $\hat m(t), m(x)$ не зависят явно от p, то

$$\frac{\partial\lambda}{\partial p}\hat m(t) = \int dt' \frac{\partial \hat g(tt')}{\partial p}\hat m(t') = \int dt'\left[-\hat p'\hat g - \frac{4}{\pi p}J(tt')\right]\hat m(t') = -\frac{1}{p}\lambda\hat m(t) -$$

$$\Lambda\,\hat m(t) = -\frac{4}{\pi p}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, J(t,t')\hat m(t') \qquad \Lambda(p) = -\frac{4\pi}{p} + 2A$$

← Гильберт – преобразование. Легко найти. Почему – формула инт. ур. на СФ интер.

$$J(t,t) = \int_{-1/2}^{1/2} dx \frac{1}{(t-x)^2+p^2} = \left|\begin{matrix} x-t=z \\ dx=dz \end{matrix}\right| = \int_{-1/2-t}^{1/2-t} dz \frac{1}{z^2+p^2} = \frac{1}{p}\operatorname{arctg}\frac{z}{p}\Big|_{-1/2-t}^{1/2-t} =$$

(проверка численно)

$$= \frac{1}{p}\operatorname{arctg}\frac{(1/2-t)}{p} + \frac{1}{p}\operatorname{arctg}\frac{(1/2+t)}{p} \Rightarrow J(t,t') \text{ вычислено точно.}$$

Итак

$$\frac{1}{(z+\Delta)(z^2+p^2)} = \frac{1}{p^2+\Delta^2}\frac{1}{(z+\Delta)} + \frac{\left(-\frac{1}{p^2+\Delta^2}\right)z + \frac{\Delta}{p^2+\Delta^2}}{(z^2+p^2)} =$$

$$= \frac{1}{p^2+\Delta^2}\left[\frac{1}{(z+\Delta)} + \frac{\Delta - z}{p^2+z^2}\right]$$

$$\int\frac{dz}{(z+\Delta)(p^2+z^2)} = \frac{1}{p^2+\Delta^2}\left[\int\frac{dz}{z+\Delta} + \Delta\int\frac{dz}{p^2+z^2} - \int\frac{z\,dz}{z^2+p^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{p^2+\Delta^2}\left[\frac{1}{2}\ln(z+\Delta)^2 + \Delta\frac{1}{p}\operatorname{arctg}\frac{z}{p} - \frac{1}{2}\ln(z^2+p^2)\right], \text{ у гр. р. очевидно будет}$$ когда $d\to 0$

$$J(t,t') = \frac{1}{p}\operatorname{arctg}\frac{z}{p}\Big|_{\cdot} - \Delta\cdot\frac{1}{p^2+\Delta^2}\left[\frac{\Delta}{p}\operatorname{arctg}\frac{z}{p} + \frac{1}{2}\ln\frac{(z+\Delta)^2}{z^2+p^2}\right]\Big|_{\cdot} =$$

$$= \left[\frac{1}{p}\left(1-\frac{\Delta^2}{p^2+\Delta^2}\right)\operatorname{arctg}\frac{z}{p} - \frac{1}{2}\frac{\Delta}{p^2+\Delta^2}\ln\frac{(z+\Delta)^2}{z^2+p^2}\right]_{\cdot} = \frac{p}{p^2+\Delta^2}\operatorname{arctg}\frac{z}{p}\Big|_{\cdot} - \frac{1}{2}\frac{\Delta}{p^2+\Delta^2}\ln\frac{(z+\Delta)^2}{z^2+p^2}$$

$$= \frac{1}{p^2+\Delta^2}\left[p\operatorname{arctg}\frac{(1/2-t')}{p} + p\operatorname{arctg}\frac{(1/2+t')}{p} - \frac{\Delta}{2}\ln\frac{(1/2-t)^2}{(1/2-t)^2+p^2} + \frac{\Delta}{2}\ln\frac{(1/2+t)^2}{(1/2+t')^2+p^2}\right]$$

$$J(t,t') = \frac{1}{p^2+(t-t')^2}\left[p\operatorname{arctg}\frac{(1/2-t')}{p} + p\cdot\operatorname{arctg}\frac{(1/2+t')}{p} + \frac{(t'-t)}{2}\ln\frac{(1/2-t')^2+p^2}{(1/2+t')^2+p^2} + \frac{(t'-t)}{2}\ln\frac{(1/2+t)^2}{(1/2-t)^2}\right]$$

Гильб.-ядро аналогично $\hat g(t,t')$ для фурье-преобраз. $2\sigma/\sqrt{u}$, но сложнее.

Можно ли предел $p\to 0$ будет нулем? Видно сингул. при $t=\pm 1/2$.

Если $p\to 0$, то $t'\approx t$ и $\Lambda(t) = -\frac{4}{\pi p}\pi\left[\operatorname{arctg}\frac{(1/2-t)}{p} + \operatorname{arctg}\frac{(1/2+t)}{p}\right]$,

1) $\operatorname{arctg}\frac{z}{p} \underset{(z/p)\to\infty}{\simeq} \frac{\pi}{2} - \frac{p}{z}$, так можно если $\frac{p}{t\pm 1/2} \ll 1$. И получим вдали от краев:

$$\Lambda(t) = -\frac{4}{p}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{p}{(1/2-t)} + \frac{\pi}{2} - \frac{p}{(1/2+t)}\right] = -\frac{4\pi}{p} + \frac{4}{1/4-t^2}$$

Escaneado con CamScanner

Date.

$\Lambda_0(t,p) \approx -\frac{4\pi}{p} + \frac{16}{1-4t^2}$, $|t|<\frac{1}{2}$, $2A \approx 16 + O(t^2)$, $A=8$ при $t \ll 1$.

$\lambda_0(p) = -4\pi + 8p$, $\frac{\lambda_0}{(-4\pi)} = 1 - \frac{2}{\pi}p$ - верно.

2) $t \to 1/2 \cdot 0$ $\Lambda_0(t,p) = -\frac{4}{p}\left[\frac{(1/2-t)}{p} + \operatorname{arctg}\left(\frac{1\cdot 1/2 + t}{p}\right)\right] = -\frac{2\pi}{p} + 4 + O(1/2 - t)$ - предел конечен при p - дискретизованном и $p \ll 1$.

Для $p \to 0$ $\Lambda(t)$ не зависит от вида СФ $\hat{m}(t)$ и по смыслу приближает СЗ основной моды (видимо именно $m_0(x)$ не зависит от p).

Раньше не мог вычислить $\Lambda(t,p)$.

Для остальных СЗ надо явно найти $\hat{g}(t,t')$ из $\frac{\partial \hat{g}}{\partial p} = -\frac{1}{p}\hat{g} - \frac{4}{\pi p}\mathcal{T}(t,t')$.

или вычислить $\hat{g}(t,t') = \left(-\frac{4}{\pi p}\right)\int_{-1/2}^{1/2} dx \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{p}{t'-x}\right)}{(t-x)}$.

→ Самое простое инт. ур. (если $m(x)$ не зависит от p!) 24/VII

$\Lambda m(x) = (-4)\int_{-1/2}^{1/2} dx' \frac{m(x')}{(x-x')^2+p^2}$,

$\Lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial p} + p^{-1}\lambda$, $\Lambda^* = \Lambda p + 4\pi = 2Ap$ → $\Lambda^* m(x) = 4\int dx' \left[-\frac{p}{(x-x')^2+p^2} + \pi\delta(x-x')\right] m(x')$

$\Lambda^*(p)m(x) = 4\pi\int_{-1/2}^{1/2} dx' \left[\delta(x-x') - \frac{1}{\pi}\frac{p}{(x-x')^2+p^2}\right] m(x')$, $\Lambda^* \sim p \ (\to 0)$.

$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}$, $\frac{\varepsilon}{\xi^2+\varepsilon^2} - \frac{p}{\xi^2+p^2} = \frac{\varepsilon(\xi^2+p^2) - p(\xi^2+\varepsilon^2)}{(\xi^2+\varepsilon^2)(\xi^2+p^2)} = (\varepsilon - p)\frac{\xi^2 - \varepsilon p}{(\xi^2+\varepsilon^2)(\xi^2+p^2)}$

$\Lambda m(x) = (-4)\int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi \frac{1}{\xi^2+p^2} m(x+\xi)$

→ Встреча Нового с детьми. Обустройство. Поездка в Carrefour. 25-26/VII

Отдых. Поездки в Children park и бассейн. Переезд на кв. 27/VII - 2/VIII

Написание отзыва по INTAS. Чтение новых статей. 3/VIII - 4/VIII

и писем by e-mail. 5/VII

$m(x+\xi) = e^{\xi\frac{d}{dx}} m(x)$ → $\Lambda m(x) = (-4)\int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi \frac{e^{\xi(d/dx)}}{\xi^2+p^2} m(x) = \hat{F}\left(x, \frac{d}{dx}\right) m(x)$

где $\hat{F}\left(x, \frac{d}{dx}\right) = (-4)\int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi \frac{e^{\xi(d/dx)}}{\xi^2+p^2}$. Если бы можно вычислить $\hat{F}(x,a)$ явно, то имели бы диф. ур. для $m(x)$.

$\hat{F}(x,a) = (-4)\int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi \frac{e^{a\xi}}{\xi^2+p^2}$, $\frac{\partial \hat{F}}{\partial x} = (-4)\frac{e^{(1/2-x)a}}{(1/2-x)^2+p^2}(-1) - (-4)\frac{e^{-(1/2+x)a}}{(1/2+x)^2+p^2}(-1)$

$\frac{\partial \hat{F}}{\partial a} = (-4)\int d\xi \frac{\xi e^{a\xi}}{\xi^2+p^2}$, $\frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial a^2} = (-4)\int d\xi \frac{\xi^2 e^{a\xi}}{\xi^2+p^2} = (-4)\int d\xi e^{a\xi}\left[1 - \frac{p^2}{\xi^2+p^2}\right] =$

$= (-4)\int d\xi e^{a\xi} + 4p^2 \hat{F}(a)$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$$\int d\xi e^{a\xi} = \frac{1}{a}\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} d(a\xi)\, e^{a\xi} = \frac{1}{a} e^{a\xi}\Big|_{-\gamma_2+x}^{\gamma_2-x} = \frac{1}{a}\left[e^{(\gamma_2-x)a} - e^{(-\gamma_2+x)a}\right]$$

$$= \frac{e^{-xa}}{a}\left[e^{\frac{\gamma_2}{2}a} - e^{-\frac{\gamma_2}{2}a}\right] = 2e^{-xa}\,\frac{\mathrm{sh}\frac{\gamma_2}{2}a}{a}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial a^2} - 4p^2\hat{F} = (-4)\,2e^{-xa}\,\frac{\mathrm{sh}\frac{\gamma_2}{2}a}{a} \quad \text{- ур-е для } \hat{F}(a),\ \left(a = \frac{d}{dx}\right)$$

(*) $$\frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial x^2} - 4p^2\hat{F} = Ce^{-xa}\,\frac{\mathrm{sh}\frac{\gamma_2}{2}a}{\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)} \quad \text{Л.Н.Д.У.}$$

Дне Л.О.Д.У. $\frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial x^2} - 4p^2\hat{F} = 0$ решение $\hat{F}_0(a) = C_1 e^{-2pa} + C_2 e^{2pa}$

(нормируем решение при малых $a \ll 1$)

$$\frac{\mathrm{sh}\frac{a}{2}}{\left(\frac{a}{2}\right)} \sim \frac{\mathrm{sh}\,y}{y} = \frac{1}{y}\left(y + \frac{1}{3!}y^3\right)_+ = 1 + \frac{1}{6}y^2 + \ldots = 1 + \frac{1}{6}\frac{a^2}{4} + \ldots$$

0°- приближение: $\hat{F}''_{aa} - 4p^2\hat{F} = -4e^{-xa}\cdot 1$

Частное реш. ЛНДУ $F_1(a) = Be^{-xa}$

$$Be^{-xa}x^2 - 4p^2 Be^{-xa} = -4e^{-xa},\quad B(x^2 - 4p^2) = -4,\quad B = \frac{(-4)}{x^2-4p^2}$$

Общее реш. $\hat{F}(a) = C_1 e^{-2pa} + C_2 e^{2pa} + \frac{(-4)}{x^2-4p^2}e^{-xa}$

$$\to \hat{F}(x,a) = (-4)\int_{-\gamma_2+x}^{\gamma_2-x} d\xi\, \frac{e^{i\xi a}}{\xi^2 + p^2},\quad \hat{F}(x, a=0) = (-4)\int_{-\gamma_2+x}^{\gamma_2-x}\frac{d\xi}{\xi^2+p^2} =$$

$$= (-4)\,\frac{1}{p}\,\mathrm{arctg}\frac{\xi}{p}\Big|_{-\gamma_2+x}^{\gamma_2-x} = -\frac{4}{p}\left[\mathrm{arctg}\frac{(\gamma_2-x)}{p} + \mathrm{arctg}\frac{(\gamma_2+x)}{p}\right]$$

$$\hat{F}(x, a=0) = C_1 + C_2 + \frac{(-4)}{x^2-4p^2} = -\frac{4}{p}\left[\mathrm{arctg}\frac{(\gamma_2-x)}{p} + \mathrm{arctg}\frac{(\gamma_2+x)}{p}\right]$$

$$\left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial a}\right)_{a=0} = (-4)\int \frac{d\xi\,i\xi}{\xi^2+p^2} = (-2)\int\frac{du}{u+p^2} = (-2)\ln(u+p^2)\Big|_{(\gamma_2+x)^2}^{(\gamma_2-x)^2} =$$

$$= (-2)\ln\left[\frac{(\gamma_2-x)^2+p^2}{(\gamma_2+x)^2+p^2}\right] \quad \text{- ур-е для } \hat{F}'_a.$$

$$\left(\frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial a^2}\right)_{a=0} = 4p^2\hat{F}(a=0) - 4 = 4p^2\left(-\frac{4}{p}\right)\left[\mathrm{arctg}\frac{(\gamma_2-x)}{p} + \mathrm{arctg}\frac{(\gamma_2+x)}{p}\right] - 4$$

$$\hat{F}(x,a) \underset{a\ll 1}{=} -\frac{4}{p}\left[\mathrm{arctg}(-) + \mathrm{arctg}(+)\right] + (-2)\ln\left[\frac{(\frac{\gamma_2}{2}-x)^2+p^2}{(\gamma_2+x)^2+p^2}\right]\cdot a +$$

$\hat{F}(x,0)$ — $\hat{F}'_a$

$$+ \frac{1}{2}\left\{-16p\left[\mathrm{arctg}(-) + \mathrm{arctg}(+)\right] - 4\right\}\cdot a^2 + \ldots \quad \text{, Отметим } \underset{z\to\infty}{\mathrm{arctg}\,z} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{z}$$

$\hat{F}''_{aa}$

$$\hat{L}m(x) = \hat{F}\left(x, \frac{d}{dx}\right)m(x) \approx -\frac{4}{p}\left[\mathrm{arctg}(-) + \mathrm{arctg}(+)\right]m(x) - 2\ln\left[\frac{(\frac{\gamma_2}{2}-x)^2+p^2}{(\gamma_2+x)^2+p^2}\right]\frac{d}{dx}m +$$

$$+ \left\{-8p\left[\mathrm{arctg}(-) + \mathrm{arctg}(+)\right] - 2\right\}\frac{d^2}{dx^2}m(x) + \ldots$$

$$\frac{d^2m}{dx^2} + \ln\left[\frac{(\gamma_2-x)^2+p^2}{(\gamma_2+x)^2+p^2}\right]\cdot\frac{dm}{dx} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left[-\frac{4}{p}\left\{\mathrm{arctg}(-) + \mathrm{arctg}(+)\right\} - \hat{L}\right]m(x) =$$

4p - с на сф мітах

Date. . .

Inhom. dots. 2-2 coupling.

Вблизи $x=0$: $\ln\left[\frac{(\gamma_2-x)^2+p^2}{(\gamma_2+x)^2+p^2}\right] = \ln\left[\frac{(\gamma_2+x)^2+p^2-2x}{(\gamma_2+x)^2+p^2}\right] =$

$= \ln\left[1-\frac{2x}{(\gamma_2+x)^2+p^2}\right] \approx \ln\left[1-\frac{2x}{\gamma_4+p^2}\right] = -\frac{2x}{\gamma_4+p^2} \approx -8x$

$\operatorname{arctg}(-)+\operatorname{arctg}(+) = \operatorname{arctg}\left[\frac{\gamma_p(\gamma_2-x)+\frac{1}{p}(\gamma_2+x)}{1-\frac{1}{p^2}(\gamma_2-x)(\gamma_2+x)}\right] = \operatorname{arctg}\left[\frac{p}{p^2-\gamma_4+x^2}\right]$, т.е.

при $x\to 0$ сумм $\operatorname{arctg}(-)+\operatorname{arctg}(+) = \operatorname{arctg}(-4p) \approx -4p$. Уравнение для $m(x)$ принимает вид:

$$m''(x) - 8x\cdot m'(x) + \left[\frac{\Lambda}{2} - 8\right] m(x) = 0$$

Ищем реш. в виде (полином для осн. СФ): $m_0(x) = 1+bx^2$, $x\to 0$

$$2b - 8x(2bx) + \left[\frac{\Lambda}{2}-8\right](1+bx^2) = 0 \to \begin{cases} -16b + b\left(\frac{\Lambda}{2}-8\right) = 0 \\ 2b + \left(\frac{\Lambda}{2}-8\right) = 0 \end{cases}$$

реш. а) $b=0$, $\Lambda = 16$

б) $b\neq 0$, $\Lambda = 48$, $b=-8$. $\to \Lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial p} + \frac{\lambda}{p} = 16$, $\lambda(p) = 8p$ — неверно.

Куда (-4π) делось?

→ Надо $\operatorname{arctg}(\frac{\cdot}{\cdot})$ раскладывать по отдельности как 22/VIII (см. 7)

7/VIII

Вернемся к расчету квадруп. взаимодействия в решетке inhom. доноров от 5-7/V. Вид $Q_{\alpha\beta}$ можно не конкретиз.

Итог: $\operatorname{arctg}\left(\frac{\gamma_2-x}{p}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{\gamma_2+x}{p}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{p}{\gamma_2-x} + \frac{\pi}{2} - \frac{p}{\gamma_2+x} = \pi + p\frac{(-1)}{\gamma_4-x^2}$ и

ур. на СФ теперь → $m''(x) - 8xm'(x) - \frac{1}{2}\left[-\frac{4\pi}{p} + \frac{4}{\gamma_4-x^2}\right] m(x) = 0$.

$x\to 0$, $m'' - 8xm' + \left[\frac{2\pi}{p} - 8\underbrace{(1+4x^2)}_{+\frac{\Lambda}{2}}\right] m = 0$

$$m''(x) - 8x\cdot m'(x) + \left[\frac{2\pi}{p} - 8(1+4x^2) + \frac{\Lambda}{2}\right] m(x) = 0$$

Ищем $m_0(x) = 1+bx^2$: $2b - 8x\cdot(2bx) + \left[\frac{2\pi}{p} - 8 + \frac{\Lambda}{2} - 32x^2\right](1+bx^2) = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} 2b + \left(\frac{2\pi}{p} - 8 + \frac{\Lambda}{2}\right) = 0 \\ -16b + \left(\frac{2\pi}{p} - 8 + \frac{\Lambda}{2}\right) b - 32 = 0 \end{array}\right\} \to (\dots) = -2b,\ -16b + b(-2b) - 32 = 0$$

$b^2 + 8b + 16 = 0$, $(b+4)^2 = 0$, $b = -4$,

$\Lambda = 2\left[8 - \frac{2\pi}{p} - 2b\right] = 2\left[-\frac{2\pi}{p} + 8 - 2(-4)\right] = -\frac{4\pi}{p} + 32 \to \lambda_0 = -4\pi + 16p$.

? но $16p + 8p$

$$W_m^{qq} = \frac{1}{16}\frac{1}{V_0}\mathrm{Sp}(\hat{Q}^2)\sum_n \frac{1}{R_n^5} + \frac{35}{48}\frac{1}{V_0}\left[2\sum_\alpha Q_{\alpha\alpha}^2 - \mathrm{Sp}(\hat{Q}^2)\right]\sum_n \frac{\cos 4\varphi_{\vec{R}_n}}{R_n^5} -$$

плотность энергии qq - взаимодействие решетки inhom. доноров в F-фазе.

$\hat{Q} = Q_{\alpha\beta}$ - тензор квадруп. момента дона. $\vec{R}_n$ - узлы решетки доноров.

→ Проверить коэффициенты и Q_{zz}, Q_{dz} компоненты (т.е. верно ли это вообще для W_m^{qq})

Date. 19.08.

8 – 18/VIII Прогулки, экскурсии, магазины, бас. с Л. и детьми.

19/VIII Расчет (по прежде) Новосада H_{an}, H_{an}, $\chi_{\perp}$ для кубич. цилиндрических FeNi слоев.

$\left\{ \begin{array}{l} L_z = 20, 40, 60 \text{ nm} \\ 2R = 0,1;\ 0,2;\ 0,3;\ 0,4;\ 0,6 \text{ и } 0,8 \text{ мкм} \end{array} \right\}$

Точно $L_z = 60$ nm (кроме $2R = 0,1$ и $0,3$ мкм) считал еще 16/V для H_n, H_{an}, χ.

$L_z = 40$ nm → H_n ($2R = 300, 400, 600, 800$ нм и 1 мкм) считал 17/V.

→ χ ($-11 - 2R$), H_{an} ($-11 - 2R$) считал 19/V.

$L_z = 20$ nm, FeNi с $M_s = 800$ Гс

$2R$, нм	100	200	300	400	600	800	1000
$\beta = L_z/R$	0,4	0,2	0,133	0,1	0,067	0,05	0,04
расч $H_{an}^{(2)}$	1500	990	750	610	450	360	300
$H_n^{(3)}$	ф-ла (-103) не работает	105	95	80	60	45	40
$\chi_{\perp}$	0,534	0,808	1,07	1,32	1,78	2,23	2,67

20/VIII 13/IV 00 г. M. Coupling shifted „vortex" lattice в поле $\vec{H}$ (sfo).

Было показано для решетки shifted „vortex" доков, что при учете членов до S^2 включительно энергия изотропна для квадрат. решетки. Квадруп. – квадруп. взаимодействие $\sim S^4$ и может привести к 4fold анизотропии.

Согласно 13/IV $\int_0^{\rho_+(\varphi)} d\rho\rho\, J_\mu(k\rho) = F_\mu(\rho)$ – первообразная.

$\int_0^{\rho_+(\varphi)} d\rho\rho\, J_\mu(k\rho) = F_\mu(\rho_+) - F_\mu(0)$, $\rho_+(\varphi) = S\cos\varphi + R\sqrt{1 - \frac{S^2}{R^2}\sin^2\varphi}$ при $\vec{H} \parallel Oy$, $\vec{S} \parallel Ox$ (см. 6/IV), при произвольном направлении $\vec{H}(\varphi_H)$, $\varphi_S = \varphi_H + \frac{\pi}{2}$,

→ $\rho_+(\varphi) = -S\cos(\varphi - \varphi_S) + \sqrt{R^2 - S^2 + S^2\cos^2(\varphi - \varphi_S)} = -S\cos(\varphi - \varphi_S) + \sqrt{R^2 - S^2\sin^2(\varphi - \varphi_S)}$

при $S \le 1$ $\rho_+(\varphi) = A - S\cos(\varphi - \varphi_S) - \frac{1}{2}\frac{S^2}{R}\sin^2(\varphi - \varphi_S)$

$F_\mu(\rho_+) = F_\mu(R + aS + bS^2) = F_\mu(R) + F'_\mu(R)\Delta + \frac{1}{2}F''_\mu(R)\Delta^2$

$\frac{\partial F_\mu(x)}{\partial x} = x J_\mu(kx)$, $\frac{\partial^2 F_\mu(x)}{\partial x^2} = J_\mu(kx) + x\frac{\partial J_\mu(kx)}{\partial x} = J_\mu(kx) + \frac{xk}{2}\left[J_{\mu-1}(kx) - J_{\mu+1}(k\ldots\right.$

и взять при $x = R$.

$F_\mu(\rho_+) = F_\mu(R) + RJ_\mu(kR)\left[aS + bS^2\right] + \frac{1}{2}\left\{ J_\mu(kR) + \frac{1}{2}kR\cdot\left[J_{\mu-1}(kR) - J_{\mu+1}(kR)\right]\right.$

$\left.\left. + \left[a^2S^2\right]\right\} = F_\mu(R) + aRJ_\mu(kR)\cdot S + S^2\left\{ RbJ_\mu(kR) + \frac{a^2}{2}\left[J_\mu(kR) + \frac{1}{2}kR\left(J_{\mu-1} - J_{\mu+1}\right)\right]\right\}$

С точн. до S^2. Расчет T_c – методом.

Date. 20 · 08 · Quadrupolar moment of shifted vortex

Коэф. при s^2: $\{\dots\} = R\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{R}\sin^2(\varphi-\varphi_s)\,J_\mu(kR) + \frac{1}{2}\cos^2(\varphi-\varphi_s)\times$

$\times\left[J_\mu(kR) + \frac{1}{2}kR\left(J_{\mu-1}-J_{\mu+1}\right)\right] = \frac{1}{2}J_\mu(kR)\cos 2(\varphi-\varphi_s) +$

$+\frac{1}{2}kR\cos^2(\varphi-\varphi_s)\left[J_{\mu-1}(kR) - J_{\mu+1}(kR)\right]$



$\int_0^{s+(\varphi)} d\rho\,\rho\,J_\mu(k\rho) = F_\mu(\rho_+) - F_\mu(0) = F_\mu(R) - F_\mu(0) - R\cos(\varphi-\varphi_s)J_\mu(kR)\cdot s +$

$+ s^2\{\dots\}$. Члены $\sim s^0$ и $\sim s$ проанализированы 13/IV 02.

$$\begin{cases} M_k^x = -\frac{M_s}{T^2}\sum_\mu e^{i\mu\varphi_k} i^\mu \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi\, e^{-i\mu\varphi}\left[\Delta F_\mu - R\cos(\varphi-\varphi_s)J_\mu(kR)\cdot s + s^2\{\dots\}\right] \\ M_k^y = \frac{M_s}{T^2}\sum_\mu e^{i\mu\varphi_k} i^\mu \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi\, e^{-i\mu\varphi}\left[\Delta F_\mu - R\cos(\varphi-\varphi_s)J_\mu(kR)\cdot s + s^2\{\dots\}\right] \end{cases}$$

$\int_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi\, e^{-i\mu\varphi}\cos 2(\varphi-\varphi_s) = \int d\varphi \sin\varphi\left[\cos\mu\varphi - i\sin\mu\varphi\right]\left[\cos 2\varphi\cos 2\varphi_s + \sin 2\varphi\sin 2\varphi_s\right] =$

$= \int d\varphi\left[\cos\mu\varphi - i\sin\mu\varphi\right]\left[\cos 2\varphi_s\,\frac{1}{2}(\sin 3\varphi - \sin\varphi) + \sin 2\varphi_s\,\frac{1}{2}(\cos\varphi - \cos 3\varphi)\right] =$

$= \frac{1}{2}\cos 2\varphi_s\,(-i)\pi\left[\delta_{\mu,3} - \delta_{\mu,-3} - \delta_{\mu,1} + \delta_{\mu,-1}\right] + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_s\cdot\pi\left[\delta_{\mu,1} + \delta_{\mu,-1} - \delta_{\mu,3} - \delta_{\mu,-3}\right]$

- членящие нулю. Пока остановим. Чтобы найти $Q_{\alpha\beta}$ как 11/IV.

$$Q_{xx} = \int_V d^3\vec{r}\left[6M_x x - 2(\vec{M}\cdot\vec{r})\right], \quad (\vec{M}\cdot\vec{r}) = M_x\cdot x + M_y\cdot y + M_z z$$

$M_z(\dots)=0$ если $\vec{M}$ не зависит от z

$\Rightarrow (\vec{M}\cdot\vec{r}) = -M_s f(\rho)\frac{y}{\rho}x + M_s f(\rho)\frac{x}{\rho}y = 0$ — вне зависимости от того $\vec{\rho}\in$ "core" или $\vec{\rho}$ вне "core".

в сил. коорд. с центром в центре вихря

$f(\rho)=1$.

Поэтому $Q_{zz} = 6\int d^3r\, M_z z = 6\int d^2\vec{\rho}\, M_z(\vec{\rho})\int_{-L/2}^{L/2} dz\, z = 0$ для shifted „vortex".

$Q_{\alpha z} = 3\int d^3\vec{r}\left[M_\alpha z + M_z x_\alpha\right] = 3\int d^3\vec{r}\, M_z x_\alpha = 3L\int d\rho\,\rho M_z(\rho)\int d\varphi\, x_\alpha = 0,$

$(\alpha = y, x)$ т.к. M_z зависит от $|\vec{\rho}|$, а $\int d\varphi\begin{Bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{Bmatrix} = 0$, $x_\alpha = \rho\begin{Bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{Bmatrix}$.

Для shifted „vortex" остаются комп-ты $Q_{xx}, Q_{yy}, Q_{xy} = Q_{yx}$.

$Q_{xx} = 6\int d^3\vec{r}\, M_x x = 6L\int_S d^2\vec{\rho}\, M_x(\vec{\rho})\rho\cos\varphi = 6L\int_B d^2\vec{\rho}\, M_x\rho\cos\varphi + 6L\int_{\text{вне „core"}} d^2\vec{\rho} M_x\rho\cos\varphi =$

$= 6L\int_0^b d\rho\,\rho\int_{\text{„core"}} d\varphi\,\rho\cos\varphi\,(-M_s)f(\rho)\sin\varphi + 6L\int_0^{2\pi} d\varphi\int_b^{\rho_+(\varphi)} d\rho\,\rho\cdot\rho\cos\varphi\,(-M_s)\sin\varphi$

$= 0$ из-за $\int d\varphi(\dots)=0$ (вне „core")

// Но $M_x \neq -M_y\sin\varphi$ в/м 5го зад. 3/III 02

$Q_{xx} = -6LM_s\int_0^{2\pi} d\varphi\sin\varphi\cos\varphi\int_b^{\rho_+(\varphi)} d\rho\,\rho^2 = -2LM_s\int_0^{2\pi} d\varphi\sin\varphi\cos\varphi\left[\rho_+^3(\varphi) - b^3\right] =$

$= -2LM_s\int_0^{2\pi} d\varphi\sin\varphi\cos\varphi\,\rho_+^3(\varphi)$, с точн. до s^2: $\rho_+(\varphi) = R - s\cdot\cos(\varphi-\varphi_s) - \frac{1}{2}\frac{s^2}{R}\sin^2(\varphi-\varphi_s)$

$\rho_+^3(\varphi) = (R + as + bs^2)^3 = (R+\Delta)^3 = R^3 + 3R^2\Delta + 3R\Delta^2 =$

$= R^3 + 3R^2(as+bs^2) + 3Ra^2s^2 = R^3 + 3R^2as + s^2\{Rb + a^2\}3R =$

$= R^3 + 3R^2(-\cos(\varphi-\varphi_s))s + 3Rs^2\left\{-\frac{1}{2}\sin^2(\varphi-\varphi_s) + \cos^2(\varphi-\varphi_s)\right\}$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$Q_{xx} = -2LM_s \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi\cos\varphi \left[3\cos^2(\varphi-\varphi_s)-1\right]\cdot\frac{1}{2}\cdot 3RS^2 = -LM_s \int_0^{2\pi} d\varphi \sin 2\varphi \cdot \frac{3}{2}RS^2 \cdot$

$\left[\frac{3}{2}(1+\cos 2(\varphi-\varphi_s))-1\right] = -LM_s\frac{3}{2}RS^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \sin 2\varphi \left[\frac{3}{2}\cos 2(\varphi-\varphi_s)-\frac{1}{2}\right] =$

$= -\frac{9}{4}M_s LRS^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \sin 2\varphi \left[\cos 2\varphi\cos 2\varphi_s + \sin 2\varphi \sin 2\varphi_s\right] = -\frac{9\pi}{4}M_s LRS^2 \sin 2\varphi_s$ ($\int d\varphi = 0$)

$Q_{yy} = -Q_{xx} = \frac{9\pi}{4}M_s LRS^2 \sin 2\varphi_s$

$Q_{xy} = Q_{yx} = 3\int d^3\vec{r}\left[M_x y + M_y x\right] = LM_s \int_0^{2\pi} d\varphi \cos 2\varphi\, \rho_+^3(\varphi) =$

$= LM_s \int d\varphi \cos 2\varphi \left[3\cos^2(\varphi-\varphi_s)-1\right]\frac{1}{2}3RS^2 = LM_s\frac{3}{2}RS^2 \int_0^{2\pi} d\varphi\cos 2\varphi\left[\frac{3}{2}(1+\cos 2(\varphi-\varphi_s))-1\right]$

$= \frac{9}{4}LM_s RS^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \cos 2\varphi\left[\cos 2\varphi\cos 2\varphi_s + \sin 2\varphi\cdot\sin 2\varphi_s\right] = \frac{9}{4}\pi M_s LRS^2\cos 2\varphi_s$ (Hel.) $\to 0$

$$Q_{xx} = -Q_{yy} = -Q_v \sin 2\varphi_s,\quad Q_{xy} = Q_{yx} = Q_v\cos 2\varphi_s,\quad Q_v = \frac{9}{4}\pi M_s LRS^2$$

Компоненты квадруп. тензора Shifted „Vortex" дома с тонк. $\vec{S}$ по S^2. $\varphi_s = \varphi_H + \frac{\pi}{2}$

но с такими же успехом можно $\varphi_s = \varphi_H - \frac{\pi}{2}$.

$Q_v = \frac{9}{4}M_s\frac{L}{R}\pi R^2 S^2 = \frac{9}{4}M_s V_d R\left(\frac{S}{R}\right)^2$, ($W_m$ от направл. $\vec{S}$ не зависит, только надо $\vec{S}\perp\vec{R}$.)

Тогда как для d.d.-дома было $Q_{xx} = -Q\sin 2\varphi_0$, $Q_{xy} = Q\cos 2\varphi_0$, где

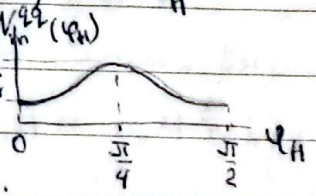
$Q = 4LR^3 M_s = \frac{4}{\pi}M_s(\pi R^2 L)R = \frac{4}{\pi}M_s V_d R$. Но $\hat{Q}$ - тензор выглядит одинаково для shifted „vortex" и double-domain дома (!). Только Q разный. ($\varphi_0 \to \varphi_s$)

Т.е. можно сразу $W_m^{qq}(\text{shifted „vortex" d.}) = (\text{isotropic}) + K_4^{qq}\cos 4\varphi_s$,

$K_4^{qq}(\text{Sh. Vor. d.}) = -\frac{35}{24}\frac{Q_v^2}{V_0}\sum_{r_n}\frac{\cos 4\varphi_{r_n}}{r_n^5} < 0$. $K_4^{qq} \sim S^4$.

Но теперь $\varphi_s = \varphi_H \pm \frac{\pi}{2}$, $\cos 4\varphi_s = \cos(4\varphi_H \pm 2\pi) = \cos 4\varphi_H$

$$W_m^{qq}(\text{sh. v. d.}) = (\text{isotr.}) - |K_4^{qq}|\cos 4\varphi_H$$



, т.е.

→ $\varphi_H = 0, \frac{\pi}{2}$ ||[10] ав. ОПН системы Shifted „Vortex" домов.

Или иначе: $\vec{S}$ равновесное зависит не только от $|\vec{H}|$, но и от φ_H по отношению к осям решетки.

21/VIII - 4/IX писал статью по in-hom. dots в Phys. Lett. A. Отдых с семьей. Аппликации на travel любопытного и мотивов.

Escaneado con CamScanner

Date. 05 • 09 • 00

План работы на ближ. время (см. план от 13/8):

1) Подгот. статью с Усовым по т. Coupled s.-d. и inhom dots, особенно если EMMA статья не будет опубликована.
2) Подгот. статью со Славиным по SW в non-ellips dots в PRB
3) Уточнить расчет H_n, H_{an} „Vortex" dots (с Мезовым)
4) Начать расчет SW на основе „Vortex" state
5) ~~Подготовить MMM-Intermag статью в JAP по прошлогодним докладам~~ (с Новиковым)
6) Уделить возврат мед. справки и пенс. взносов.
7) Уведомить Contract в KIAS и продлить визы себе и Л., открыть Л. и А. ident. cards
8) Видать application в Porto, согласовав дату начала работ
9) Продвинуть статью с Любчанским по non-lin. MO response of vortex dots
10) ~~Подгот. KIAS - отчет за год~~
11) Рассчитать „Vortex" - dot с $\vec{m} = \vec{f}(\varphi)$, объяснив MFM картинки.
12) Заполнить Res. Proposal for KIAS and Operation of Res. Fund.
13) Послать письмо Б. Иванову об INTAS и А. Богдановичу о предв. отпуска (fax) UMan

Escaneado con CamScanner

Date. 10. 09. $M_{\vec{k}}$ of "vortex" dots (для 1 диполя)

16/IX Расчет фурье-компоненты намагниченности vortex-диска.

Vortex уровня, $H=0$: $\begin{cases} M_x = -M_s f(\rho)\sin\varphi \\ M_y = M_s f(\rho)\cos\varphi \end{cases}$ $f(\rho) = \begin{cases} \frac{2B\rho}{B^2+\rho^2}, & \rho < B, \text{ внутри "core"} \\ 1, & \rho \geq B, \text{ вне "core"} \end{cases}$

От "z" $\vec{M}(\vec{r})$ - vortex не зависит.

По 22/III: $M^z_{\vec{k}} = \int_S d^2\vec{\rho}\, M_z(\vec{\rho}) e^{i\vec{k}\vec{\rho}} = \int d^2\vec{\rho}\, e^{i\vec{k}\vec{\rho}} (\pm M_s) \left\{ \begin{matrix} \frac{B^2-\rho^2}{B^2+\rho^2}, & \rho<B \\ 0, & \rho \geq B \end{matrix} \right\} = (\pm M_s) J_k$,

где $J_k = 2\pi \int_0^B d\rho\, \rho \left(\frac{B^2-\rho^2}{B^2+\rho^2}\right) J_0(k\rho) = \left| \rho/B = x \right| = 2\pi B^2 \int_0^1 dx\, x \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) J_0(kBx)$

$I(\xi) = \int_0^1 dx\, x \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) J_0(\xi x) = \left| \begin{matrix} \text{инт. Сонина} \\ \text{по учеб. 94} \end{matrix} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, J_{n+1}(\xi)}{\xi^{n+1}}$, $\xi = kB$ и

для MO-experiments $k \cdot B \approx 10^5 \text{см}^{-1} \cdot 10^{-6} \text{см} \sim 0{,}1 \ll 1$ можно считать.

$J_{n+1}(\xi) \underset{\xi \to 0}{=} \frac{\xi^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!} - \frac{\xi^{n+3}}{2^{n+3}(n+2)!} + \dots$

$I(\xi) = \int_0^1 dx\, x \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) J_0(\xi x) \underset{\xi \ll 1}{=} \sum_{n=1} \frac{n!}{\xi^{n+1}} \left[\frac{\xi^{n+1}}{2^{n+1} n!(n+1)} - \frac{\xi^{n+3}}{2^{n+3}(n+1)(n+2)n!} + \dots \right] =$

$= \sum_{n=1} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} \left[1 - \frac{\xi^2}{4(n+2)} + \dots \right] = \frac{1}{2} \sum_{n=1} \frac{1}{(n+1)2^n} - \frac{\xi^2}{8} \sum_{n=1} \frac{1}{(n+1)(n+2)2^n} + O(\xi^4)$

$\sum_{n=1} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} = \left| n+1 = m \right| = \sum_{m=2} \frac{1}{2^m \cdot m} = \sum_{m=1} \frac{1}{m 2^m} - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}$ (Гр.-Р.)

$\sum_{n=1} \frac{1}{(n+1)(n+2)2^{n+1}} = \sum_{m=2} \frac{1}{2^m m(m+1)} = \sum_{m=2} \frac{1}{2^m} \left[\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right] =$

$= \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) - \sum_{m=2} \frac{1}{2^m (m+1)} = (\cdot) - 2 \sum_{m=2} \frac{1}{2^{m+1}(m+1)} = (\cdot) - 2 \sum_{n'=3} \frac{1}{2^{n'} n'} =$

$= (\cdot) - 2 \left[\sum_{n'=1} \frac{1}{2^{n'} n'} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right] = \ln 2 - \frac{1}{2} - 2 \left[\ln 2 - \frac{5}{8} \right] = \frac{3}{4} - \ln 2$

$I(\xi) = \int_0^1 dx\, x \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) J_0(\xi x) = \ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{4} \left(\frac{3}{4} - \ln 2\right) + O(\xi^4)$ при $\xi \lesssim 1$.

$J_k \approx 2\pi B^2 \left[\ln 2 - \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{4} - \ln 2\right) \frac{k^2 B^2}{4} + O(k^4 B^4) \right]$ при $kB \lesssim 1$. $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (волн. число света)

$\ln 2 = 0{,}693$

Для решетки дисков $M^z_{\vec{k}} = \frac{1}{S_{яч}} \int_{S_{яч}} d^2\vec{\rho}\, M^z(\vec{\rho}) e^{i\vec{k}\vec{\rho}} = \frac{M_s}{S_{яч}} J_k S(\vec{k})$,

где структурный фактор $S(\vec{k}) = \sum_n e^{i\vec{k}\vec{\rho}_n \cos\theta_n}$ для 1-мерн. реш.,

$S(\vec{k}) = \sum_n e^{i\vec{k}\vec{\rho}_n \cos(\varphi_n - \varphi_{\vec{k}})}$, $\vec{\rho}_n$ - положение n-диска в яч. (in-plane magnetized dots, n - номер диска в элем. ячейке)

Escaneado con CamScanner

Date. 11.09.

Due: F-структуры (один фотон на атом) $S(\vec{k})$ упорядочены.

LM: $S(\vec{k}) = \pm 1$, и $\| \vec{M}$: $\varphi_n = \varphi_0$, $S(\vec{k}) = \cos(\varphi_0 - \varphi_{\vec{k}})$?

Плоскостью (x,y) намагничены $M^{x,y}_{\vec{k}}$ для одного Vortex-фазы: (см. 13/IV)



$$M^x_{\vec{k}} = \int_{S_a} d^2\vec{\rho}\, M_x(\vec{\rho}) e^{i\vec{k}\vec{\rho}} = (-M_S)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^b d\rho\,\rho\, f(\rho) \sin\varphi\, e^{i\vec{k}\vec{\rho}} +$$

$$+ (-M_S)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_b^R d\rho\,\rho \sin\varphi\, e^{i\vec{k}\vec{\rho}} = (-M_S)\int_0^b d\rho\,\rho\, f(\rho)\int_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi\, e^{i\vec{k}\vec{\rho}} + (-M_S)\int_b^R d\rho\,\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi\, e^{i\vec{k}\vec{\rho}}$$

$$I_{\vec{k}}(\rho) = \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi\, e^{i\vec{k}\vec{\rho}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi \sum_\mu e^{i\mu(\varphi_{\vec{k}} - \varphi)} i^\mu J_\mu(k\rho) = \sum_\mu i^\mu e^{i\mu\varphi_{\vec{k}}} J_\mu(k\rho) \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi\, e^{-i\mu\varphi} =$$

$$= \sum_\mu i^\mu e^{i\mu\varphi_{\vec{k}}} J_\mu(k\rho)\, \frac{\pi}{i}(\delta_{\mu 1} - \delta_{\mu,-1}) = \frac{\pi}{i} i e^{i\varphi_{\vec{k}}} J_1 + \frac{\pi}{i}(-1) i^{-1} e^{-i\varphi_{\vec{k}}} J_{-1} =$$

$$= \pi e^{i\varphi_{\vec{k}}} J_1 + \pi e^{-i\varphi_{\vec{k}}} J_{-1} = \pi J_1 \left[e^{i\varphi_{\vec{k}}} - e^{-i\varphi_{\vec{k}}} \right] = 2\pi i\, J_1(k\rho) \sin\varphi_{\vec{k}}$$

$$M^x_{\vec{k}} = (-M_S) 2\pi i \sin\varphi_{\vec{k}} \int_0^b d\rho\,\rho\, f(\rho) J_1(k\rho) + (-M_S) 2\pi i \sin\varphi_{\vec{k}} \int_b^R d\rho\,\rho\, J_1(k\rho) =$$

$$= (-M_S) 2\pi i \sin\varphi_{\vec{k}} \left[\int_0^b d\rho\,\rho \left(\frac{2b\rho}{b^2+\rho^2} \right) J_1(k\rho) + \underbrace{\int_b^R d\rho\,\rho\, J_1(k\rho)}_{\text{можно точно посчитать}} \right] \text{, глав. вклад.}$$

но для magneto-optics важно $(kb) \ll 1$, $kR \sim 1$.

$$I_1^{(k)} = \int_0^b d\rho\,\rho \frac{(2b\rho)}{b^2+\rho^2} J_1(k\rho) = 2b \int_0^b d\rho \frac{\rho^2 + b^2 - b^2}{\rho^2 + b^2} J_1(k\rho) = 2b \int_0^b d\rho\, J_1(k\rho) -$$

$$- 2b^3 \int_0^b d\rho \frac{J_1(k\rho)}{\rho^2 + b^2} = \left| x = \rho/b \right| = 2b^2 \int_0^1 dx\, J_1(kbx) - 2b^2 \int_0^1 dx \frac{J_1(kbx)}{1+x^2} =$$

$$= \frac{2b^2}{bk} \int_0^{kb} dy\, J_1(y) = \frac{2b}{k}\left[1 - J_0(kb) \right] - 2b^2 \int_0^1 dx \frac{J_1(kbx)}{1+x^2} = \frac{2b}{k}[\dots] -$$

$$\left[\dots = (\dots) \right]$$

$$- 2b^2 \int_0^1 dx \frac{1}{1+x^2} \left[\frac{kbx}{2} - \frac{(kb)^3 x^3}{2^3 \cdot 2!} + \dots \right] = \frac{2b}{k}[\dots] - 2b^2 \frac{1}{2} kb \int_0^1 dx \frac{x}{1+x^2} +$$

$$+ 2b^2 \frac{(kb)^3}{8\cdot 2} \int_0^1 dx \frac{x^3}{1+x^2} = \frac{2b}{k}[\dots] - \frac{kb^3}{2} \ln 2 + b^2 \frac{(kb)^3}{8} \frac{1}{2}(1 - \ln 2) + O(k^5 b^5) =$$

$$= \frac{2b}{k}\left[1 - \left(1 - \frac{k^2 b^2}{4} + \frac{1}{4} \frac{k^4 b^4}{16} \right) \right] - \frac{1}{2} kb^3 \ln 2 + \frac{1}{16} b^2 (kb)^3 (1 - \ln 2) + O(k^5 b^5) =$$

$$= \frac{1}{2} kb^3 - \frac{1}{32} k^3 b^5 - \frac{1}{2} kb^3 \ln 2 + \frac{1}{16} b^2 (kb)^3 (1 - \ln 2) + O(k^5 b^5) =$$

$$= \frac{1}{2} b^2 \left[(1 - \ln 2) kb + \frac{1}{8}\left(\tfrac{1}{2} - \ln 2 \right)(kb)^3 + O(k^5 b^5) \right], \quad kb \lesssim 1$$

$$I_2(k) = \int_b^R d\rho\,\rho\, J_1(k\rho) = \int_0^R d\rho\,\rho\, J_1(k\rho) - \int_0^b d\rho\,\rho\, J_1(k\rho) = \left| \begin{matrix} \rho/R = x \\ \rho/b = y \end{matrix} \right| =$$

$$= R^2 \int_0^1 dx\, x J_1(kRx) - b^2 \int_0^1 dy\, y J_1(kby)$$

Escaneado con CamScanner

Date. 12.03.

Ур-е: $\int_0^1 dx\, x\, J_1(ax) = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\Gamma(3/2)\left[J_1(a)H_0(a) - H_1(a)J_0(a)\right]$

$H_2(z)$ - функция Струве

$\int_0^1 dx\, x\, J_1(ax) = \left|\begin{matrix} ax = y \\ dx = \frac{dy}{a}\end{matrix}\right| = \frac{1}{a^2}\int_0^a dy\, y\, J_1(y) = -\frac{1}{a^2}\int_0^a dy\, y\, J_0'(y) = \left|\begin{matrix} dv = dJ_0 = J_0' dy \\ u = y,\ v = J_0\end{matrix}\right| =$

$= -\frac{1}{a^2}\left[y J_0(y)\Big|_0^a - \int_0^a J_0(y)dy\right] = -\frac{1}{a^2}\left[a J_0(a) - \int_0^a dx\, J_0(x)\right] =$

$= -\frac{1}{a}J_0(a) + \frac{1}{a^2}\cdot 2\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(a) = -\frac{1}{a}J_0(a) + \frac{2}{a^2}J_1(a) + \frac{2}{a^2}\sum_{n=1} J_{2n+1}(a) =$

$= \frac{1}{a}J_2(a) + \frac{2}{a^2}\sum_{n=1} J_{2n+1}(a)$

$I_2(k) = R^2 \frac{1}{(kR)}\left[J_2(kR) + \frac{2}{kR}\sum_{n=1} J_{2n+1}(kR)\right] - b^2\frac{1}{(kb)}\left[J_2(kb) + \frac{2}{kb}\sum_{n=1} J_{2n+1}(kb)\right]$

→ $M_k^x = \{(-M_s)2\pi i \sin\varphi_k\}\left[I_1(k) + I_2(k)\right] = \{\dots\}\left[\int_0^b d\rho\,\rho\left(\frac{2b\rho}{b^2+\rho^2}\right)J_1(k\rho) -\right.$

$\left. - \int_0^b d\rho\,\rho\, J_1(k\rho) + \int_0^R d\rho\,\rho\, J_1(k\rho)\right] = \{\dots\}\left\{\frac{R^2}{(kR)}[\dots] - \frac{b^2}{(kb)}\left[\frac{k^2b^2}{2\cdot 2} + \frac{2}{kb}\frac{k^3b^3}{2^3 3!} + \right.\right.$

$\left.\left. + O(k^4b^4)\right] + \frac{1}{2}b^2(1-\ln 2)kb + O(k^3b^3)\right\} = \{\dots\}\left\{\frac{R^2}{(kR)}[\dots] - b^2\frac{1}{6}(kb) + \frac{1}{2}b^2(1-\ln 2)kb + O(k^3b^3)\right\}$

$= \{\dots\}\left[\frac{R^2}{(kR)}[\dots] + b^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\ln 2\right)(kb) + O(k^3b^3)\right]$

$M_k^x = -M_s 2\pi i \sin\varphi_k\left\{\frac{R}{k}\left[J_2(kR) + \frac{2}{kR}\sum_{n=1} J_{2n+1}(kR)\right] + b^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\ln 2\right)kb\right\} =$

$= -M_s R^2 2\pi i \sin\varphi_k\left\{\frac{1}{kR}\left[J_2(kR) + \frac{2}{kR}\sum_{n=1} J_{2n+1}(kR)\right] + \left(\frac{b}{R}\right)^2(kb)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\ln 2\right)\right\}$

этот член мал по сравн. с первым

Видно, что вкладом "core" vortex $\left(\frac{b}{R}\right)$ можно пренебречь при $\left(\frac{b}{R}\right) \ll 1$ и $kb \gtrsim 1$. С хорошей точностью:

$M_k^x = \int_{S_d} d^2\vec{\rho}\, M_x(\vec{\rho})e^{i\vec{k}\vec{\rho}} = -M_s R^2 2\pi i \sin\varphi_k \frac{1}{(kR)}\left[J_2(kR) + \frac{2}{(kR)}\sum_{n=1} J_{2n+1}(kR)\right]$

Где "вокруг" при $H=0$

$M_k^y = \int_{S_d} d^2\vec{\rho}\, M_y(\rho)e^{i\vec{k}\vec{\rho}} = M_s\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^b d\rho\,\rho\, f(\rho)\cos\varphi\, e^{i\vec{k}\vec{\rho}} + M_s\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^R d\rho\,\rho\cos\varphi\, e^{i\vec{k}\vec{\rho}}$

$\Lambda_k^c(\rho) = \int_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi\, e^{i\vec{k}\vec{\rho}} = \int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})\sum_\mu e^{i\mu(\varphi_k - \varphi)} i^\mu J_\mu(k\rho) =$

$= \frac{1}{2}\sum_\mu i^\mu J_\mu \int_0^{2\pi} d\varphi\,(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})e^{-i\mu\varphi}e^{i\mu\varphi_k} = \frac{1}{2}2\pi\sum_\mu i^\mu J_\mu e^{i\mu\varphi_k}(\delta_{\mu,1} + \delta_{\mu,-1}) =$

Escaneado con CamScanner

Date. 27.09.

$$= \frac{1}{2} 2\pi \left[i J_1 e^{i\varphi_{\vec{k}}} + i^{-1} J_{-1} e^{-i\varphi_{\vec{k}}} \right] = \frac{1}{2} 2\pi i J_1 \left[e^{i\varphi_{\vec{k}}} + e^{-i\varphi_{\vec{k}}} \right] = 2\pi i J_1(kp) \cos\varphi_{\vec{k}}$$

$$M_{\vec{k}}^y = M_s \cdot 2\pi i \cos\varphi_{\vec{k}} \int_0^B dp\, p\, f(p) J_1(kp) + M_s 2\pi i \cos\varphi_{\vec{k}} \int_B^R dp\, p\, J_1(kp) =$$

$$= M_s 2\pi i \cos\varphi_{\vec{k}} \left[\int_0^B dp\, p \left(\frac{2Bp}{B^2+p^2} \right) J_1(kp) + \int_B^R dp\, p\, J_1(kp) \right] = M_s 2\pi i \cos\varphi_{\vec{k}} \left[I_1(k) + I_2(k) \right]$$

(гладкий вклад)

$$M_{\vec{k}}^y = \int_{S_0} d^2\vec{p}\, M_y(\vec{p}) e^{i\vec{k}\vec{p}} = M_s R^2 2\pi i \cos\varphi_{\vec{k}} \frac{1}{(kR)} \left[J_2(kR) + \frac{2}{(kR)} \sum_{n=1} J_{2n+1}(kR) \right]$$

Для одного диска с „vortex" или $H=0$.

Видно, что для „vortex" диска $M_{\vec{k}}^x \sim k_y$, $M_{\vec{k}}^y \sim k_x$. По симметрии МО $\vec{k} = (k_x, 0, k_z)$  , т.е. $M_{\vec{k}}^x = 0$ и вклад дает $\perp$ плоскости падения компоненты $\vec{M}$ (M_y в данном случае). Это при $H=0$ и для одного изол. диска.

→ Обсуждение и написание статьи по NMO of "vortex" dot arrays с Кибалкиным. 13.22/IX

Доработка „vortex" статьи с Ковосадом. 23/IX

Как будет выглядеть на MFM (где измеряется H_m^z вне диска) „vortex" дот? Как объяснить экспериментальные, аксиально несимметричные MFM картинки? 27/IX



Внутри обычного „vortex" (Usova) диска $\vec{M}(\vec{r})$: $\left\{ \begin{array}{l} M_x(\vec{r}) = -M_s f(\rho) \sin\varphi \\ M_y(\vec{r}) = M_s f(\rho) \cos\varphi \end{array} \right\}$, от z не зависит

где $f(\rho) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2B\rho}{B^2+\rho^2}, & \rho < B \\ 1, & \rho \geq B \end{array} \right\}$

$$div\vec{M}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x} M_x + \frac{\partial}{\partial y} M_y + \frac{\partial}{\partial z} M_z = \frac{\partial}{\partial x} \left(-M_s \frac{f(\rho)}{\rho} y \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(M_s \frac{f(\rho)}{\rho} x \right) =$$

$$= -M_s y \frac{\partial F(\rho)}{\partial x} + M_s x \frac{\partial F(\rho)}{\partial y} = -M_s y F'_\rho(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + M_s x F'_\rho(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} = M_s F'_\rho \left[-y \frac{x}{\rho} + x \frac{y}{\rho} \right] = 0$$

(=0)

~~= объемных маг. зарядов нет.~~

~~Поверх. Заряды $\vec{M}(\vec{r}), \vec{n}$ есть только на торцах диска ($z=0, L$) внутри окна ($\rho < B$).~~

~~Плотность поверх. заряда на торцах цил. диска $M_{(\vec{r})}^z = \sigma(\rho) = \left(\pm M_s \right) \frac{B^2-\rho^2}{B^2+\rho^2}$, $\rho < B$ — аксиально симметрична.~~ $\Rightarrow$ $H_m^z(\vec{r})$ над (под) диском аксиально симметрична (зависит только от ρ и z).

С точн. до знака $\varphi_m(\vec{r}) = \oint_{S'} \frac{\vec{n} \cdot \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds'$ если $div\vec{M}(\vec{r}) = 0$

(магнитостат. потенциал)

Escaneado con CamScanner

Date. 04 · 10 ·

$$\varphi_m(\vec{r}) = \int_{z'=L} ds' \frac{M_z(r')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \int_{z'=0} ds' \frac{(-M_z(r'))}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \left|z \in [0,L]\right| =$$

$$= \int_{z'=L} d\rho' \rho' \int d\varphi' M_s \left(\frac{b^2-\rho'^2}{b^2+\rho'^2}\right) \int_0^\infty dk\, e^{-k|z-z'|} J_0(k|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|) - (\;)_{z'=0} =$$

$$= \int d\rho' \rho' \int d\varphi' M_s \left(\frac{b^2-\rho'^2}{b^2+\rho'^2}\right) \int dk \left[e^{-k|z-L|} - e^{-k|z|}\right] \sum_\mu e^{i\mu(\varphi-\varphi')} J_\mu(k\rho) J_\mu(k\rho') =$$

$$= 2\pi M_s \int d\rho' \rho' \left(\frac{b^2-\rho'^2}{b^2+\rho'^2}\right) \int dk \left[e^{-k|z-L|} - e^{-k|z|}\right] J_0(k\rho) J_0(k\rho') =$$

$$= M_s \int_0^\infty dk \left[e^{-k|z-L|} - e^{-k|z|}\right] J_0(k\rho)\, \mathcal{J}(k), \text{ где } \mathcal{J}(k) = 2\pi \int_0^b d\rho\rho \left(\frac{b^2-\rho^2}{b^2+\rho^2}\right) J_0(k\rho)$$

В нашем случае $\varphi_m(\vec{r}) = \varphi_m(z,\rho) = M_s \int_0^\infty dk \left[e^{-k|z-L|} - e^{-k|z|}\right] \mathcal{J}(k) J_0(k\rho)$ зависит от z,ρ только. И $H_m^z = F(z,\rho) = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial z}$

Над доменом ($z \geq L$):

$$\varphi_m(z,\rho) = M_s \int_0^\infty dk \left[e^{kL} - 1\right] e^{-kz} \mathcal{J}(k) J_0(k\rho)$$

Неоднородность в MFM экспериментах зависимость $H_m^z(\varphi)$ вызвана, видимо, другим более сложным чем "Vortex" Усова распределением $\vec{M}(\vec{r})$.

New - Vortex

За пределами "Vortex" Усова'93.

Анализ литературы по "Vortex" domains показал:

① отклонения от "Vortex" Усова есть у Fernandez'98, '00, Kaa... (Элиптич. домены, почти double-domain → предельно сложный MFM) и у Pokhil'00 (double-vortex домены, но для тонких ферромагн. доменов и $H>0$)

② в экспериментах Pokhil'00 и Raabe'00 FeNi ферромагн. домены с $2R = 0{,}8\,\mu$m $L = 50$ nm (и тоньше) аксиально симметричные MFM-образы.

Тогда как у Hillebrands'99 близкие по размерам ($2R = 1\,\mu$m, $L = 50$ nm FeNi домены дают сложный секторный MFM(?).

Эксп. Shinjo'00 на FeNi с $2R = 1\,\mu$m $L = 50$ nm (где "core" явно виден) также дает аксиально-симметричный MFM от "Vortex" домена. У Demand... также акс.-сим. для MFM от...

→ Т.е. MFM-картины Hillebrands'97, '99 противоречат Pokhil'00, Raabe'00, Sh... MFM-экспериментам. За Hillebrands'а — Kaczmarek'00 теория. и Dema...

Появляются ли "Vortex"-структуры более сложные, чем "Vortex" Усова при росте R и/или L цилиндрического домена? Каковы R_c, L_c?

→ Более общ. вопрос: как эволюционирует "Vortex" Усова при увеличении размеров домена?

Escaneado con CamScanner

Date. 06. 10.

(3) Немного похожие на MFM-картинки Hillebrands наблюдали Vavassori'00 (MOKE) на цил. Fe dots. Эти картинки ⊕ – 4х секторные, (возможно coaxb. d.d. dots) тогда как у Hill – многосекторные. У Vavassori $2R=0{,}4$ μm, $L=40$ nm.

Wachowiak'98 на поликрист. Co-dots ▭, cylindrical, показали, что double-dom. dots дают 4х секторный MFM (4)R → ⊕ d.d. MFM

новый index?

(4) Интересную „Vortex" structure, отличную от „Vortex" Усова, наблюдали Hehn'97(4) на Co-dots цилиндрических. ◎ MFM $2R=0{,}5$ μm $L=25$ nm

M || плоскости почти, но есть M_z, которая аксиально сим., но отличается от „β". „Core" усова отсутствует. Annular domains т.к. HAL-Co

Итоги: наблюдение „Vortices" наблюдали в эллипт., цил. доках Fernandez и Vavassori, в цил. доках с $H>0$ – Pokhil и в цил. Co dots – Hehn'97. Но „Vortices" Fernandez и Vavassori – из-за эллиптичности, эксп. Pokhil при $H>0$ и только Vortices" of Hehn представляют интерес (хотя и магнитокристал. анизотропию надо учитывать), петлевые и теоретически не описывались.

Обобщение „Vortex" Усова в конечном доке. Vortex с $\nu=2$

„Vortex" Усова есть солитон Белавина-Полякова (BP) 8/X с топологическим зарядом $\nu=1$, приспособленный к описанию 3D-дока с конечным радиусом R. Солитон BP – континуальное приближение для бесконечного 2D-ферромагнетика. Роль радиуса BP-солитона в доке играет радиус „core" вихря. Возникает вопрос:

как будут выглядеть BP солитоны при $\nu>1$, в частности

1) не окажутся ли BP солитоны с $\nu>1$ в доке выгоднее „Vortex" Усова при каких то размерах дока R, L или маг. поле H?

2) какие MFM (dl^z_m) дадут солитоны с $\nu=2,3,\ldots$ и не смогут ли они объяснить эксп. MFM картинки Hillebrands'97,99 и Pokhil'00?

→ Пусть θ,φ – сферические углы $\vec{m}=\frac{\vec{M}(\vec{r})}{M_s}$ солитонного BP солитона и ν-заряд солитона.

Согласно ст. Ivanov'95: $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\left(\frac{R}{r}\right)^{|\nu|}$, $\varphi=\nu\chi+\varphi_0$ Заданы функции $\theta(\vec{r})$, $\varphi(\vec{r})$, $\vec{m}=(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$ солитона BP.

$\chi=\frac{y}{x}$, χ – обычный полярный угол, r – полярный радиус (ρ).

~~$\nu=1$, $R\to b$, $r\to\rho$, $\chi\to\varphi$, $\varphi_0=\pi/2$ и получим $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{b}{\rho}$, $m_x=-f(\rho)\sin\varphi$, $m_y=f(\rho)\cos\varphi$,~~

радиус „core" где $\sin\theta(\rho)=f(\rho)=\frac{2b\rho}{b^2+\rho^2}$ – „Vortex" Усова

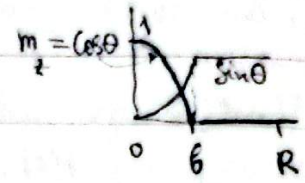
Date. . . Vortex с $\nu=2$

Π $\nu=2$, $f+\varphi$, $R+6$ $\quad \operatorname{tg}\frac{\theta(\rho)}{2}=\left(\frac{6}{\rho}\right)^2$, $\quad m_x=\sin\theta\cdot\cos(2\varphi+\varphi_0)$, $m_y=\sin\theta\sin(2\varphi$, $m_z=\cos\theta$

$m_z(\rho)=\cos\theta(\rho)$ аксиально симметрично, но $m_{x,y}$ уже не аксиально симметричны и, возможно, аксиально плоский будет и $\vec{m}$ над диском (что важно для НГМ)

$$\sin\theta(\rho)=2\rho^2\rho^2/(\rho^4+6^4)$$

$$\cos\theta(\rho)=\cos\left[2\operatorname{arctg}\left(\frac{6}{\rho}\right)^2\right]=(\pm1)\,\frac{6^4-\rho^4}{6^4+\rho^4}$$



$$f(\rho)=\sin\theta(\rho)=\begin{cases}\frac{2\rho^2\rho^2}{6^4+\rho^4}, & \rho\le 6\\ 1, & \rho>6\end{cases}$$

. Но с m_x, m_y сложнее.

Для $\nu=1$ было ($\varphi_0=\pi/2$) $\begin{cases}m_\rho=m_x\cos\varphi+m_y\sin\varphi=-f(\rho)\sin\varphi\cos\varphi+f(\rho)\cos\varphi\sin\varphi=\\ m_\varphi=-m_x\sin\varphi+m_y\cos\varphi=f(\rho)\sin^2\varphi+f(\rho)\cos^2\varphi=f(\rho)\end{cases}$

$m_\rho=0$, что особ. „vortex" state.

Тепер ($\nu=2$) $m_\rho=\sin\theta\cos(2\varphi+\varphi_0)\cos\varphi+\sin\theta\sin(2\varphi+\varphi_0)\sin\varphi=$

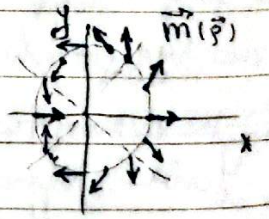
$=\sin\theta\cos(\varphi+\varphi_0)\neq0$, $\quad m_\varphi=-\sin\theta(\cos(2\varphi+\varphi_0)\sin\varphi+\sin\theta\sin(2\varphi+\varphi_0)\cos\varphi=$

$=\sin\theta\left[\sin(2\varphi+\varphi_0)\cos\varphi-\cos(2\varphi+\varphi_0)\sin\varphi\right]=\sin\theta\sin\left[(2\varphi+\varphi_0)-\varphi\right]=\sin\theta\sin(\varphi+\varphi_0)$

Т.е. получили $\vec{m}(\vec{r})$, $\vec{r}=(\rho,\varphi,z)$, от z не зависит $\begin{cases}m_\rho(\vec{r})=\sin\theta(\rho)\cos(\varphi+\varphi_0)\\ m_\varphi(\vec{r})=\sin\theta(\rho)\sin(\varphi+\varphi_0)\\ m_z(\vec{r})=\cos\theta(\rho)\end{cases}$ - решение для $\nu=2$, где $\sin\theta(\rho)$ определ.

Для $\nu=1$ было $m_\rho=f(\rho)\cos\varphi_0$, $m_\varphi=f(\rho)\sin\varphi_0$ при $\varphi_0=\pi/2$, что особ. „vortex". Удова с центром при $\rho=0$. „Vortex" в конечном поле H?

Пусть $\nu=2$. Выберем пока $\varphi_0=0$: $\begin{cases}m_x=\sin\theta\cos2\varphi\\ m_y=\sin\theta\sin2\varphi\end{cases}\Rightarrow$



Тогда $(\vec{m}\cdot\vec{n})$ - боковые $\rho=R$ заряды на доме.

при $\vec{n}=(\cos\varphi,\sin\varphi)=\frac{\vec{\rho}}{\rho}=\hat{\vec{\rho}}$. $(\vec{m}\cdot\vec{n})_{\rho=R}=(\vec{m}\cdot\hat{\vec{\rho}})=m_\rho=\sin\theta(R)\cos\varphi$ — такой дот имеет поверхн. зар. заряды $(\vec{m}\cdot\vec{n})_{\rho=R}=\sin\theta(R)\cos\varphi$ (!) как с $\vec{m}\parallel$ оз

Однородно намагничен. в плоскости дот $\vec{m}=(1,0,0)$ имеет $(\vec{m}\cdot\vec{n})_{\rho=R}=\cos\varphi$.

$\sin\theta(R)=\frac{2\rho^2R^2}{\rho^4+R^4}=\left|\rho\gtrsim R\right|\sim1$ ожидается

Но Если $R>\rho$, то $\sin\theta(R)=1$ и поверх. заряды как у ном. дота(!).

$\langle m_x\rangle=\frac{1}{V_d}\int dz\int d\rho\rho\int d\varphi\, m_x(\vec{r})=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\sin\theta(\rho)\cos2\varphi=0$ и $\langle m_y\rangle=0$, $\langle m_z\rangle\neq0$

V_d

Плоскостная засасывает $\langle\vec{m}\rangle=0$, и $\langle\vec{m}\rangle\parallel$ Oz. оси ном. дота.

Для ВР солитона с $\nu=2$ $\vec{m}(r)$ - характеристику см. в Abdullaev'99 - похоже на поле тогог. диполя.

~~Для дота решение $\vec{m}(\vec{r})$ с $\nu=2$ похоже на double-vortex, который~~ видел Rakhi'00.

Date. 03 . 10 .

Ч. задает направление оси дока. Для одного дока плотность энергии от Ч. не зависит. Но в dot lattice может зависеть

Посчитаем энергию нового „vortex" и сравним с „vortex" Усова.

$$\operatorname{div}\vec{m} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho m_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial m_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial m_z}{\partial z} = \frac{m_\rho}{\rho} + \frac{\partial m_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial m_\varphi}{\partial\varphi} = \left|\text{от „z" не зависит}\right| =$$

$$= \frac{1}{\rho}\sin\theta\cos\varphi + \cos\varphi\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\sin\theta\cdot\cos\varphi = \cos\varphi\left[\frac{2}{\rho}\sin\theta + \cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right] \neq 0\ (!)$$

$$\operatorname{rot}\vec{m} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ m_\rho & \rho m_\varphi & m_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\left[\hat{\rho}\frac{\partial m_z}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial z}\left(m_\rho\rho\hat{\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho m_\varphi\hat{z}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(m_\rho\hat{z}\right) - \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\hat{\varphi}m_z\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho m_\varphi\hat{\rho}\right)\right] = \frac{1}{\rho}\left[\hat{z}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho m_\varphi) - \hat{z}\frac{\partial m_\rho}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\hat{\varphi}m_z)\right]$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[\hat{z}\left(m_\varphi + \rho\frac{\partial m_\varphi}{\partial\rho} - \frac{\partial m_\rho}{\partial\varphi}\right) - \hat{\varphi}m_z - \rho m_z\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\rho} - \rho\hat{\varphi}\frac{\partial m_z}{\partial\rho}\right], \text{ т.к.}$$

$$\operatorname{rot}\vec{m} = \frac{1}{\rho}\left[\hat{\rho}\frac{\partial m_z}{\partial\varphi} + \rho\hat{\varphi}\frac{\partial m_\rho}{\partial z} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho m_\varphi) - \hat{z}\frac{\partial m_\rho}{\partial\varphi} - \rho\hat{\varphi}\frac{\partial m_z}{\partial\rho} - \hat{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(\rho m_\rho)\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[\hat{z}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho m_\varphi) - \hat{z}\frac{\partial m_\rho}{\partial\varphi} - \rho\hat{\varphi}\frac{\partial m_z}{\partial\rho}\right] = -\hat{\varphi}\frac{\partial m_z}{\partial\rho} + \frac{\hat{z}}{\rho}\left[m_\varphi + \rho\frac{\partial m_\varphi}{\partial\rho} - \frac{\partial m_\rho}{\partial\varphi}\right]$$

$\frac{\partial m_\rho}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\sin\theta\cos\varphi = \sin\theta(-\sin\varphi) = -m_\varphi$ и $\operatorname{rot}\vec{m} \neq 0$. $\frac{\partial m_\varphi}{\partial\varphi} = m_\rho$.

Vortex с $\nu = 2$

→ Плотность обменной энергии в цил. координатах 9/X

Согласно монографии Hubert'a (3.2a) - Eq. есть:

$$E_{ex} = \frac{C}{2}\left[\left(\frac{\partial m_\rho}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial m_\varphi}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial m_z}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial m_\rho}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial m_\varphi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial m_z}{\partial z}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\rho^2}\left\{\left(\frac{\partial m_\rho}{\partial\varphi} - m_\varphi\right)^2 + \left(\frac{\partial m_\varphi}{\partial\varphi} + m_\rho\right)^2 + \left(\frac{\partial m_z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}\right]$$

Все точки, от z зависимости нет. $\varphi_0 = 0$ пусть

$$\frac{\partial m_\rho}{\partial\rho} = \cos(\varphi+\varphi_0)\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial\rho},\quad \frac{\partial m_\varphi}{\partial\rho} = \sin\varphi\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial\rho},\quad \frac{\partial m_z}{\partial\rho} = -\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial\rho}$$

$$\frac{\partial m_\rho}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\sin\theta = -m_\varphi,\quad \frac{\partial m_\varphi}{\partial\varphi} = \sin\theta\cos\varphi = m_\rho,\quad \frac{\partial m_z}{\partial\varphi} = 0$$

$$E_{ex} = \frac{C}{2}\left[\cos^2\varphi\cos^2\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right)^2 + \sin^2\varphi\cos^2\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left\{(2m_\varphi)^2 + (2m_\rho)^2\right\}\right] =$$

$$= \frac{C}{2}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{4}{\rho^2}\left\{(m_\varphi)^2 + (m_\rho)^2\right\}\right] = \frac{C}{2}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right)^2 + 4\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\right] -$$

не зависит, конечно, от φ_0 и отлич. множит. „4" перед $\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}$ от E_{ex} „vortex" Усова.

Escaneado con CamScanner

Date. . .

Для нового „vortex" $\sin\Theta(\rho) = \frac{2b^2\rho^2}{b^4+\rho^4}$, $\rho \le b$ и 1 иначе. $\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2} = \left(\frac{b}{\rho}\right)^2$ – для ω-обмена

но $\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2} = \left(\frac{\rho}{b}\right)^2$ для дела с конечным радиусом R.

$$\cos\Theta = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\Theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\Theta}{2}} = \frac{1-(\rho/b)^4}{1+(\rho/b)^4} = \frac{b^4-\rho^4}{b^4+\rho^4},\ \rho \le b \text{ иначе } \cos\Theta = 0.$$

$$\sin\Theta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\Theta}{2}} = 2\frac{(\rho/b)^2}{1+(\rho/b)^4} = \frac{2b^2\rho^2}{b^4+\rho^4},\ \rho \le b \text{ иначе } \sin\Theta = 1,\ \Theta = \pi/2,\ \rho > b$$

$$\Theta(\rho) = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{\rho}{b}\right)^2,\ \frac{\partial\Theta}{\partial\rho} = 2\frac{1}{1+\left(\frac{\rho}{b}\right)^4}\cdot\frac{2\rho}{b^2} = \frac{4\rho b^2}{b^4+\rho^4},\ \rho \le b.\ \text{Иначе } \frac{\partial\Theta}{\partial\rho} = 0,\ \rho > b$$

$$W_{ex} = \frac{C}{2}\int_{V_d} d^3\vec{r}\left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\right)^2 + 4\frac{\sin^2\Theta}{\rho^2}\right] = \frac{1}{2}CL\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{b} d\rho\,\rho \left[\frac{16b^4\rho^2}{(b^4+\rho^4)^2} + \frac{4}{\rho^2}\cdot\frac{4b^4\rho^4}{(b^4+\rho^4)^2}\right] +$$

(равен тому же интегралу)

$$+\frac{1}{2}CL\int_0^{2\pi} d\varphi \int_b^{R} d\rho\,\rho\,\frac{4}{\rho^2} = 16CLb^4\cdot 2\pi\int_0^{b} d\rho\,\frac{\rho^3}{(b^4+\rho^4)^2} + 2CL\cdot 2\pi\int_b^{R}\frac{d\rho}{\rho} = \left|\rho^4 = u\right| =$$

(вне „core") („core")

$$= 4CLb^4 2\pi\int_0^{b^4}\frac{du}{(b^4+u)^2} + 2CL\,2\pi\ln\frac{R}{b} = 8\pi b^4 CL\frac{(-1)}{(b^4+u)}\Big|_0^{b^4} + 4\pi CL\ln\frac{R}{b} =$$

$$= 8\pi b^4 CL(-1)\left[\frac{1}{2b^4} - \frac{1}{b^4}\right] + 4\pi CL\ln\frac{R}{b} = 4\pi CL + 4\pi CL\ln\frac{R}{b} =$$

$$= 4\pi CL\left[1-\ln\frac{b}{R}\right] \to \boxed{\frac{1}{V_d}W_{ex} = 4\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\left[1-\ln\frac{b}{R}\right]},\ R_0^2 = C,\ \left(R_0^2 = \frac{C}{M_5^2}\right).$$

обм. радиус

→ обмен. энергия нового „vortex" state с $\nu = 2$.

Отметим, что она больше, чем $\frac{1}{V_d}W_{ex}^{\text{у. Усова}} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2\left[2-\ln\frac{b}{R}\right]$ у „vortex" Усова

Макс только $b \gtrsim R$, тогда как у Усова $b \ll R$. Если $m_\rho \to -m_\rho$ W_{ex} уменьш. (?!)

Магнитостат. энергия вихря $\nu = 2$,

→ Для расчета магнитостат. энергии надо найти поле, поскольку $\vec{H}_m$ будучи дана $\varphi(\vec{r})$, $\vec{r} \in V_d$. Или воспользоваться ФГ, чтобы найти $\vec{H}_m(\vec{r})$.

Ст нужна когда есть только поверхн. Заряды $(\vec{m}\cdot\vec{n})_S$. Но дана нового „vortex" $\operatorname{div}\vec{m} \neq 0$ – есть объемные заряды.

$$\operatorname{div}\vec{m} = \cos\varphi\left[\frac{2}{\rho}\sin\Theta + \cos\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\right] = \underset{(\rho\le b)}{\cos\varphi}\left[\frac{2}{\rho}\frac{2b^2\rho^2}{b^4+\rho^4} + \frac{b^4-\rho^4}{b^4+\rho^4}\frac{4\rho b^2}{b^4+\rho^4}\right] =$$

$$= \cos\varphi\cdot\frac{4b^2\rho}{(b^4+\rho^4)^2}\left[b^4+\rho^4+b^4-\rho^4\right] = \cos\varphi\,\frac{8b^6\rho}{(b^4+\rho^4)^2},\ \rho \le b.$$

Или $\rho > b$ $\operatorname{div}\vec{m} = \frac{2}{\rho}\cos\varphi$. Бок. поверхн. Заряды $(\vec{m}\cdot\vec{n})_S = \sin\Theta(R)\cos\varphi$.

Торцевые поверхн. Заряды $(\vec{m}\cdot\vec{n}_z)_{z=0,L} = \pm\cos\Theta(\rho)$ – аналогично синглу

Т.к. есть и объемные и боковые заряды то, видимо, $W_m > W_m^{\text{у. Усова}}$

у „vortex" Усова были только торцевые поверхн. Заряды.

Escaneado con CamScanner

Date. . .

Сферическая безразмерность $m_\rho \to -m_\varphi$: $\begin{cases} m_\rho(\vec\rho) = \sin\theta(\rho)\cos\varphi \\ m_\varphi(\vec\rho) = -\sin\theta(\rho)\sin\varphi \\ m_z(\vec\rho) = \cos\theta(\rho) \end{cases}$ Gle! $\theta=0$ работает при решении неравенства $\theta < \pi$ для $\theta(\rho)$

(пусть пока $\varphi_0 = 0$)

Тогда $\frac{\partial m_\rho}{\partial\varphi} = \sin\theta(-1)\sin\varphi = m_\varphi$ и $\frac{\partial m_\varphi}{\partial\varphi} = -\sin\theta\cos\varphi = -m_\rho$ и обменяемся энергии уменьшаться. $E'_{ex} = \frac{C}{2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right)^2$, что дас =

$$W'_{ex} = \frac{C}{2}\frac{1}{V_d}\int_{V_d} d^3\vec r \left(\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right)^2 \underset{(b\le R)}{=} \frac{1}{V_d}\frac{1}{2}CL\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^b d\rho\rho\,\frac{16b^4\rho^2}{(b^4+\rho^4)^2} = 2\left(\frac{R_0}{R}\right)^2,\ b\le R$$

Если $b>R$, то $\frac{1}{V_d}W'_{ex} = \frac{1}{V_d}\frac{1}{2}CL\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R d\rho\rho\,\frac{16b^4\rho^2}{(b^4+\rho^4)^2} = |\rho^4 = u| =$

$$= \frac{1}{V_d}\pi CL\cdot 4b^4\int_0^{R^4}\frac{du}{(b^4+u)^2} = \frac{1}{\pi R^2 L}\pi CL\cdot 4b^4\frac{(-1)}{b^4+u}\Big|_0^{R^4} = \frac{C}{R^2}4b^4\left[\frac{1}{b^4+R^4}-\frac{1}{b^4}\right](-1) =$$

$$= \frac{C}{R^2}4b^4\frac{R^4}{(b^4+R^4)b^4} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2\frac{4}{1+(b/R)^4}.$$

$$\frac{1}{V_d}W'_{ex} = 2\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\begin{cases}1, & b\le R\\ \frac{2}{1+(b/R)^4}, & b>R\end{cases}$$ – эта

объемная энергия W_{ex} of "vortex" Usova.

$\operatorname{div}\vec m = \frac{1}{\rho}\left(m_\rho + \frac{\partial m_\varphi}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial m_\rho}{\partial\rho} = \frac{\partial m_\rho}{\partial\rho} = \cos\varphi\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial\rho}$. $(\vec m\cdot\vec n)_S = m_\rho$ – то же

(=0 для "vortex")

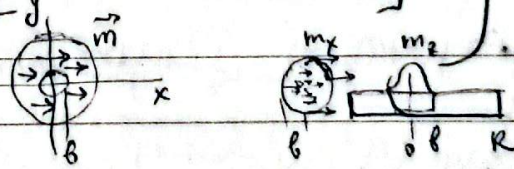
Видно, что $\operatorname{div}\vec m \neq 0$ только внутри "core" $\rho<b$.

$$\varphi_m(\vec r) = -\int d^3r'\frac{\operatorname{div}\vec m(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|} + \oint_S dS\,\frac{\vec n'\cdot\vec m(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|},\quad \frac{1}{|\vec r-\vec r'|} = \int_0^\infty dk\,e^{-k|z-z'|}\sum_\mu e^{i\mu(\varphi-\varphi')}J_\mu(k\rho)J_\mu(k\rho')$$

Какому $\vec m(r)$ соотв. new "vortex"-1? $\varphi_0=0$. 10/X

$$\begin{cases} m_x = m_\rho\cos\varphi - m_\varphi\sin\varphi = \sin\theta\left[\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right] = \sin\theta \\ m_y = m_\rho\sin\varphi + m_\varphi\cos\varphi = \sin\theta\left[\cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\right] = 0 \\ m_z = \cos\theta \end{cases}$$

$\vec m(r) = (\sin\theta, 0, \cos\theta)$



, т.е. $\vec m \parallel Ox$ вне "core" и $m_x = 1$ – hom.dot.

топология "core" $\vec m \in xOz$, m_x убывает, а m_z растет по мере приближения к оси/ур. "core". Такое $\vec m(r)$ имеет домен. W_{ex} и W_m (из-за m_z) по сравнению с hom.dot $m_x=1$ вне V_β, т.е. периферично, разве это есть ДОПН.

→ [Посчитаем не энергию W_m "vortex" – new от 8/X ($\nu=2$).

$\varphi(\vec r) = \varphi_V(\vec r) + \varphi_S(\vec r)$, $\varphi_V(\vec r) = -\int_V d^3\vec r'\frac{\operatorname{div}\vec m(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}$, $\varphi_S(r) = \oint_{S_\beta} dS\,\frac{\vec n'\cdot\vec m(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}$

$\varphi_V(r') = -\int d^3\vec r'\int dk\,e^{-k|z-z'|}\sum_\mu e^{i\mu(\varphi-\varphi')}J_\mu(k\rho)J_\mu(k\rho')\cos\varphi'\left[\frac{z}{\rho'}\sin\theta(\rho') + \cos\theta\frac{\partial\theta(\rho')}{\partial\rho'}\right]$

$\int_0^{2\pi}d\varphi' e^{-i\mu\varphi'}\cos\varphi' = \int_0^{2\pi}d\varphi' e^{-i\mu\varphi'}\frac{1}{2}\left(e^{i\varphi'}+e^{-i\varphi'}\right) = \pi\left(\delta_{\mu,1}+\delta_{\mu,-1}\right)$

Escaneado con CamScanner

Date. 11 . 10 .

$$\varphi_v(\vec r) = -\int dz' \int d\rho' \rho' \int dk\, e^{-k|z-z'|}\left[\frac{2}{\rho'}\sin\theta(\rho') + \cos\theta(\rho')\frac{\partial\theta(\rho')}{\partial\rho'}\right]\pi\left[e^{i\varphi}J_1 J_1(\rho') + e^{-i\varphi}J_{-1}J_1(\rho')\right]$$

$$= -2\pi\int dz' \int d\rho' \rho' \int dk\, e^{-k|z-z'|}[\dots]\, J_1(k\rho)J_1(k\rho')\cos\varphi =$$

$$= -2\pi\cos\varphi \int_0^L dz' \int_0^R d\rho' \rho' \int_0^\infty dk\, e^{-k|z-z'|}\begin{bmatrix} \frac{8\beta^6\rho'}{(\beta^4+\rho'^4)^2}, & \rho'\le\beta \\ \frac{2}{\rho'}, & \rho'>\beta \end{bmatrix} J_1(k\rho)J_1(k\rho')$$

$$\varphi_v(\vec r) = -4\pi\cos\varphi\int dk\int dz'\int d\rho'\rho' e^{-k|z-z'|}\begin{bmatrix} 4\beta^6\rho'/(\beta^4+\rho'^4)^2, & \rho'\le\beta \\ 1/\rho', & \rho'>\beta \end{bmatrix} J_1(k\rho)J_1(k\rho') =$$

$$= -4\pi\cos\varphi\int dk\int dz\, e^{-k|z-z'|}\left[4\beta^6\int_0^\beta d\rho' \frac{\rho'^2}{(\beta^4+\rho'^4)^2}J_1(k\rho)J_1(k\rho') + \int_\beta^R d\rho' J_1(k\rho')J_1(k\rho)\right] =$$

$$= -4\pi\cos\varphi\int dk\int dz'\, e^{-k|z-z'|}J_1(k\rho)\left[4\beta^6\int_0^\beta d\rho' \frac{\rho'^2}{(\beta^4+\rho'^4)^2}J_1(k\rho') + \int_\beta^R d\rho' J_1(k\rho')\right] =$$

$$= -4\pi\cos\varphi\int_0^\infty dk\int_0^L dz'\, e^{-k|z-z'|}J_1(k\rho)\left[\frac{1}{k}\left\{J_0(kR)-J_0(k\beta)\right\} + 4\beta\cdot\int_0^1 dx \frac{J_1(k\beta x)}{(1+x^4)^2}x^2\right]$$

$$W_m^v \sim \int_{V_d} d^3\vec r\, \mathrm{div}\vec m(\vec r)\cdot\left[\varphi_v(\vec r) + \varphi_s(\vec r)\right]$$

В eq. M_S^2: $$W_m = \frac{1}{2}\int_{V_d} d^3\vec r\, \rho(\vec r)\varphi(\vec r) + \frac{1}{2}\oint_{S_d} dS\, \sigma(\vec r)\varphi(\vec r)$$

– нормальная намагниченность. Знаем $\rho(\vec r) = -\mathrm{div}\vec m(\vec r)$, $\sigma(\vec r) = \vec m(\vec r)\cdot\vec n$

11/X

$$\to W_m = \frac{1}{2}\int_{V_d} d^3\vec r\, \rho(\vec r)\left[\varphi_v(\vec r) + \varphi_s(\vec r)\right] + \frac{1}{2}\oint_{S_d} dS\, \sigma(\vec r)\left[\varphi_v(\vec r) + \varphi_s(\vec r)\right] =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_{V_d} d^3\vec r\, \rho(\vec r)\varphi_v(\vec r)}_{(I)} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{V_d} d^3\vec r\, \rho(\vec r)\varphi_s(\vec r)}_{(II)} + \underbrace{\frac{1}{2}\oint_{S_d} dS\, \sigma(\vec r)\varphi_v(\vec r)}_{(III)} + \underbrace{\frac{1}{2}\oint_{S_d} dS\, \sigma(\vec r)\varphi_s(\vec r)}_{(IV)}$$

$$(I)\quad \frac{1}{2}\int_{V_d} d^3r\, \rho(r)\varphi_v(r) = \frac{1}{2}(-1)\int d^3\vec r\, \mathrm{div}\vec m(\vec r)\cdot\varphi_v(\vec r) = -\frac{1}{2}\int d^3\vec r\, \cos\varphi\cdot 2\begin{bmatrix} \frac{4\beta^6\rho}{(\beta^4+\rho^4)^2}, & \rho\le\beta \\ 1/\rho, & \rho>\beta \end{bmatrix} \times$$

$$\times(-4\pi)\cos\varphi\int dk\int dz' e^{-k|z-z'|}J_1(k\rho)[\dots] = 4\pi\int_0^L dz\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^R d\rho\rho\cos^2\varphi\begin{bmatrix} 4\beta^6\rho/(\beta^4+\rho^4)^2, & \rho\le\beta \\ 1/\rho, & \rho>\beta \end{bmatrix} \times$$

$$\times\int_0^\infty dk\int_0^L dz' e^{-k|z-z'|}J_1(k\rho)[\dots], \quad \int_0^{2\pi} d\varphi\cos^2\varphi = \frac{1}{2}\int d\varphi\left[1+\cos 2\varphi\right] = \pi$$

$$\int_0^{L_k} dz\, dz' e^{-k|z-z'|} = \frac{2L_k}{k}f(kL_k), \quad f(x) = 1 - \frac{1}{x}\left(1-e^{-x}\right).$$

$$\frac{1}{2}\int d^3r\, \rho(r)\varphi_v(r) = 4\pi\int_0^\infty dk\, \frac{2L_k}{k}f(kL_k)\cdot\pi\int_0^R d\rho\rho\begin{bmatrix} 4\beta^6\rho/(\cdot)^2, & \rho\le\beta \\ 1/\rho, & \rho>\beta \end{bmatrix} J_1(k\rho)[\dots]$$

$$\to I_v(k) \equiv \int_0^R d\rho\rho\begin{bmatrix} 4\beta^6\rho/(\beta^4+\rho^4)^2, & \rho\le\beta \\ 1/\rho, & \rho>\beta \end{bmatrix} J_1(k\rho) = [\dots] = \frac{1}{k}\left\{J_0(kR)-J_0(k\beta)\right\} + 4\beta\int_0^1 dx \frac{J_1(k\beta x)}{(1+x^4)^2}x^2$$

Тогда $$\frac{1}{2}\int_{V_d} d^3r\, \rho(r)\varphi_v(r) = 8\pi^2 L\int_0^\infty dk\, \frac{f(kL_k)}{k}I_v^2(k)$$

Escaneado con CamScanner

Wm of vortex с $\gamma=2$

Date.

$$\varphi_s(\vec r)=\oint_{S_d} dS'\,\frac{\vec n\cdot\vec m(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}=\int_{z=0,L\ (\text{торц.})} ds'[\dots]+\int_{\rho=R\ (\text{бок.})} ds'[\dots]=\varphi_s^T(\vec r)+\varphi_s^\delta(\vec r)$$

$\left(\vec n\cdot\vec m(\vec r')\right)_{S_T}=m_z(z=0,L,\vec s)$ — аксиально симметрично, а $\rho(\vec r)\sim\cos\varphi$.

(II) $\frac{1}{2}\int_V d^3\vec r\,\rho(\vec r)\varphi_s(\vec r)=\frac{1}{2}\int d^3\vec r\,\rho(\vec r)\left[\varphi_s^T(\vec r)+\varphi_s^\delta(\vec r)\right]=\frac{1}{2}\int d^3\vec r\,\rho(\vec r)\varphi_s^\delta(\vec r)$ (не даёт вклада)

$\varphi_s^\delta(\vec r)$ совпадает с потенциалом hom. dot с поверхностью

Запишем $(\vec n\cdot\vec m)_{\rho=R}=\sin\theta(R)\cos\varphi$ и $\vec M_0\parallel Ox$. Это было 4/II и 4/VIII ранее. для $\vec M_0\parallel Oy$.

$$\to\varphi_s^\delta(\vec r)=\int_{\rho=R} dS'\,\frac{(\vec m(r')\cdot\vec n')}{|\vec r-\vec r'|}=\int_0^L dz'\int_0^{2\pi}d\varphi' R\int dk\,e^{-k|z-z'|}\sum_\mu J_\mu(k\rho)J_\mu(k\rho')e^{i\mu(\varphi-\varphi')}\times$$

$$\times\sin\theta(R)\cos\varphi'=R\int_0^L dz'\int dk\,e^{-k|z-z'|}\sin\theta(R)\cdot 2\pi\cos\varphi\,J_1(k\rho)J_1(k\rho')=$$

$$=2\pi R\cos\varphi\sin\theta(R)\int_0^L dz'\int dk\,e^{-k|z-z'|}J_1(k\rho)J_1(kR),\quad \varphi_s^\delta(\vec r)\sim\cos\varphi,\ \varphi_V(r)\sim\cos\varphi$$

$$\frac{1}{2}\int d^3\vec r\,\rho(\vec r)\varphi_s^\delta(\vec r)=\frac{1}{2}\int dz\int d\varphi\int\rho\,d\rho\cdot 2\cos\varphi\begin{bmatrix}4B^6\rho/(B^4+\rho^4)^2, & \rho\le B\\ 1/\rho, & \rho>B\end{bmatrix}(-1)\times$$

$$\times 2\pi R\sin\theta(R)\cos\varphi\int_0^L dz'\int dk\,e^{-k|z-z'|}J_1(k\rho)J_1(kR)=$$

$$=(-1)2\pi R\sin\theta(R)\int_0^{2\pi}d\varphi\cos^2\varphi\int_0^\infty dk\int_0^L dz\,dz'\,e^{-k|z-z'|}J_1(kR)\int_0^R d\rho\,\rho\begin{bmatrix}4B^6\rho/(B^4+\rho^4), & \rho\le B\\ 1/\rho, & \rho>B\end{bmatrix}J_1(k\rho)=$$

$$=(-1)2\pi R\sin\theta(R)\pi\int_0^\infty dk\,\frac{2L}{k}f(kL)J_1(kR)I_\nu(k)=(-1)4\pi^2RL\sin\theta(R)\int_0^\infty\frac{dk}{k}f(kL)J_1(kR)I_\nu(k)$$

$$\frac{1}{2}\int_V d^3\vec r\,\rho(\vec r)\varphi_s(\vec r)=(-1)4\pi^2RL\sin\theta(R)\int_0^\infty\frac{dk}{k}f(kL)J_1(kR)I_\nu(k)$$

(III) $\frac{1}{2}\oint_{S_d} dS\,\vartheta(r)\varphi_\nu(r)=\frac{1}{2}\int_{(z=0,L)} dS\,\vartheta_T(r)\varphi_\nu(r)+\frac{1}{2}\int_{(\rho=R)} dS\,\vartheta_\delta(r)\varphi_\nu(r)=$

ϑ_T — зад. $\int_0^{2\pi}d\varphi\cos\varphi=0$, ϑ_T не зависит от φ

$$=\frac{1}{2}\int_{\rho=R} dS\,\sin\theta(R)\cos\varphi\,(-4\pi)\cos\varphi\int dz'\int dk\,e^{-k|z-z'|}J_1(k\rho)I_\nu(k)=\left|\int_{\rho=R}dS=R\int dz\int d\varphi\right|=$$

$$=(-1)2\pi\sin\theta(R)R\int dz\int d\varphi\cos^2\varphi\int dz'\int dk\,e^{-k|z-z'|}J_1(kR)I_\nu(k)=$$

$$=(-1)4\pi^2\sin\theta(R)RL\int_0^\infty dk\,\frac{f(kL)}{k}J_1(kR)I_\nu(k),\ \text{т.е. совпадает со II. членом.}$$

(IV) $\frac{1}{2}\oint_{S_d} dS\,\vartheta(r)\varphi_s(r)=\frac{1}{2}\int_{(z=0,L)} dS\,\vartheta_T(r)\left[\varphi_s^T(r)+\varphi_s^\delta(r)\right]+\frac{1}{2}\int_{(\rho=R)} dS\,\vartheta_\delta(r)\left[\varphi_s^T(r)+\varphi_s^\delta(r)\right]=$

ϑ_T не зав. — не даёт вклада т.к. $\sim\cos\varphi$ — не даёт вклада

$$=\frac{1}{2}\int_{(z=0,L)} dS\,\vartheta_T(r)\varphi_s^T(r)+\frac{1}{2}\int_{(\rho=R)} dS\,\vartheta_\delta(r)\varphi_s^\delta(r).$$

Этот вклад рассм. аналогично «Vortex» усл. от 23/III, $\vartheta_T(r)$ только другое.

$\frac{1}{2}\int_{\text{торц }(z=0,L)} dS\,\vartheta_T(r)\varphi_s^T(r)=(2\pi)^2\int_0^R d\rho\,\rho\int_0^R d\rho'\,\rho'\cos\theta(\rho)\cos\theta(\rho')\int_0^\infty dk\,(1-e^{-kL})J_0(k\rho)J_0(k\rho')$ — аналог. 23/III

Escaneado con CamScanner

Date. . .

Для $m_{\beta\beta}$: $\cos\Phi(\rho) = \frac{b^4 - \rho^4}{b^4 + \rho^4}$, $\rho < b$ (с осями на "вихрях"), для m_α: $\frac{b^4 \rho^4}{b^4 + \rho^4}$

$$J_k = 2\pi \int_0^\infty d\rho\, \rho \cos\Phi(\rho) J_0(k\rho) = 2\pi b^2 I(kb), \quad I(x) = \int_0^\infty dz \left(\frac{1 - z^4}{1 + z^4}\right) J_0(xz)$$

$$\frac{1}{2} \int_{\text{торе}} ds\, \vec{B}_1(r) \vec{A}_2^2(r) = (2\pi)^2 b^4 \int_0^\infty dk\, (1 - e^{-kL}) I^2(kb) = (2\pi)^2 b^3 \int_0^\infty dt\, (1 - e^{-t/b}) I^2(t),$$

$$\frac{1}{2} \int_{(\rho=R)} ds\, \vec{B}_1(r) \vec{A}_2^S(r) = \frac{1}{2} \int_0^L dz \int_0^R d\rho\, \rho \sin\Theta(R) \cos\varphi \cdot 2\pi R \cos\varphi \sin\Theta(R) \int_0^\infty dz' \int_0^\infty dk\, e^{-k|z-z'|} J_1^2(kR) =$$

$$= \frac{1}{2} R\, 2\pi R \sin^2\Theta(R) \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2\varphi \int_0^L dz \int_0^\infty dz' e^{-k|z-z'|} J_1^2(kR) =$$

$$= \pi^2 R^2 \sin^2\Theta(R) \int_0^L dz \int_0^\infty \frac{2k}{k} f(kL) J_1^2(kR) = 2\pi^2 R^2 L \sin^2\Theta(R) \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(kL) J_1^2(kR)$$

— с учетом того, что внутри $\sin^2\Theta(R)$ это напряжение. Энергия ком. поля с A_β^S на

Полная напряженность энергии нем "вихрем" ($\nu = 2$):

$$W_m = 8\pi^2 L \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(kL) I_\nu^2(k) - 8\pi^2 RL \sin\Theta(R) \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(kL) J_1(kR) I_\nu(k) +$$

$$+ (2\pi)^2 b^3 \int_0^\infty dt\, (1 - e^{-\frac{b}{b}t}) I^2(t) + 2\pi^2 R^2 L \sin^2\Theta(R) \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(kL) J_1^2(kR), \quad V_d = \pi R^2 L$$

$$\frac{1}{V_d} W_m = \frac{8\pi}{R^2} \int \frac{dk}{k} f I_\nu^2(k) - 8\pi \frac{\sin\Theta(R)}{R} \int \frac{dk}{k} f J_1(kR) I_\nu(k) + 2\pi \sin^2\Theta(R) \int \frac{dk}{k} f J_1^2(kR) +$$

$$+ 2^2 \pi \frac{b^3}{R^2 L} \int dt\, (1 - e^{-\frac{b}{b}t}) I^2(t) = 2\pi \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(kL) \left[\frac{4}{R^2} I_\nu^2(k) - \frac{4}{R} \sin\Theta(R) J_1(kR) I_\nu(k) + \right.$$

$$\left. + \sin^2\Theta(R) J_1^2(kR) \right] + 4\pi \frac{b^3}{R^2 L} \int dt \left(1 - e^{-\frac{b}{b}t}\right) I^2(t)$$

$$\frac{1}{V_d} W_m = 2\pi \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(kL) \left[\frac{2}{R} I_\nu(k) - \sin\Theta(R) J_1(kR) \right]^2 + 4\pi \frac{b^3}{R^2 L} \int_0^\infty dt \left[1 - e^{-\frac{b}{b}t} \right] I^2(t)$$

избыток энергии за счет объемных и боковых поверхн. зарядов, которых не было у "вихрей" ($\nu = 1$) Абрикосова

энергия корн. напряж. m_β

$$\sin\Theta(R) = \begin{cases} 1, & b \in R \\ 2b^2 R^2 / (b^4 + R^4), & b > R \end{cases}$$

Абрикосовские с К. Магнитными 12-31/Σ.

12-16/Σ Обсуждение характеристики работы и $\nu = 1, 2$ вихрей с К. Магнитными. Ур. Эйлера для вихря и его устойчивость $\delta^2 W > 0$.

17/Σ (II) Какое Stray field dl_m^z над диском дает "вихрь" с $\nu = 2$?

Аксиально-несимметричные гармоники $\varphi_V(\vec{r})$, $\varphi_\delta^S(\vec{r}) \sim \cos\varphi$.

$$\varphi_V(\vec{r}) = -4\pi \cos\varphi \int_0^\infty dk \int_0^L dz' e^{-k|z-z'|} J_1(kp) I_\nu(k)$$

Вне диска и над ним $z > L$, $z > z'$: $\int_0^L dz' e^{-k|z-z'|} = e^{-kz} \int_0^L dz' e^{kz'} = e^{-kz} \frac{1}{k} (e^{kL} - 1)$

Смещенный вихрь (на a, a^*) $O(z) = \frac{z-a}{1-az}$

Date.

$\varphi_v(\vec{r}) = -4\pi\cos\varphi \int_0^\infty \frac{dk}{k} e^{-kz}(e^{kL}-1) J_1(kp) I_v(k)$

Вклад от $\varphi_v(\vec{r})$ в H_m^z: $H_m^z(\vec{r}) = -\frac{\partial \varphi_v(\vec{r})}{\partial z} = 4\pi\cos\varphi \int dk e^{-kz}(e^{kL}-1) J_1(kp) I_v(k)$

$H_{m\ z\gg L}^z(\vec{r}) \sim \cos\varphi$, такую же симметрию даст и вклад от $\varphi_s^z(\vec{r})$. Следовательно $H_m^z(\vec{r}) \sim \cos\varphi$ и MFM vortex похож на hom. dot. Следовательно для MFM-tip общее size анти-вихрь $w(z) = 1/z$.

Расчет смещенного "vortex" Усова (не rigid'ного, а обменная и.)

$\vec{m}(\vec{r}) = (\sin\theta\cdot\cos\Phi, \sin\theta\sin\Phi, \cos\theta)$, $\theta(r), \Phi(r)$, $\vec{m} = \frac{\vec{M}}{M_s}$, $|\vec{m}|=1$.

- распределение намагниченности в доме.

$m_x + i m_y = \frac{2W(z)}{1+|W|^2}$, $m_z = \frac{1-|W|^2}{1+|W|^2}$, $W = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} e^{i\varphi}$

$z = x+iy$. Вид комп. функции $W(z)$ определяет $\vec{m}(\vec{r})$ вихря.

$|z| = \rho$.

$$W(z) = \begin{cases} i\,(z/c)^\nu, & |z|\le c, \ \rho/R \le c \\ i\,\frac{z^\nu}{|z|^\nu}, & z > c. \end{cases}$$

— солитон ВР с топ. зарядом ν

— синяка с рем. $m_z = 0$

Сдвиг вихря на $a = x_c + iy_c$ описывается заменой $z \to O(z) = \frac{z-a}{1-a^*z} = z'$

Для вихря Усова $\nu = 1$ и предполож. $a = \bar{a}$ (сдвиг $\parallel Ox$):

$$W(z) = \begin{cases} e^{i\pi/2}\,\frac{1}{c}\,\frac{z-a}{1-az}, & \rho/R \le c \\ i\,\frac{z-a}{1-az}\,\frac{1}{|O(z)|}, & \rho/R > c, \ |z'|>c' \end{cases} \quad \Big| \quad W(z) = \begin{cases} \frac{i}{c} O(z), & |z|\le c \\ i\,\frac{O(z)}{|O(z)|}, & |z|>c \end{cases}$$

$\operatorname{div}\vec{m} = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial m_z}{\partial z}}_{=0} = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

$\frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

$$\frac{z-a}{1-az} = \frac{x+iy-a}{1-a(x+iy)} = \frac{(x-a)+iy}{(1-ax)-iay}\cdot\frac{(1-ax)+iay}{(1-ax)+iay} =$$

$$= \frac{(x-a)(1-ax)-ay^2+iy[1-ax+a(x-a)]}{[(1-ax)^2+a^2y^2]} = \frac{(x-a)(1-ax)-ay^2+iy(1-a^2)}{(1-ax)^2+a^2y^2}$$

$$\frac{z-a}{1-az} = \frac{\rho\cos\varphi - a + a^2\rho\cos\varphi - a\rho^2 + i\rho\sin\varphi(1-a^2)}{1-2a\rho\cos\varphi+a^2\rho^2} = \Big| z = \frac{\rho}{R}e^{i\varphi} \Big| =$$

$$= \frac{(1+a^2)\rho\cos\varphi - a(1+\rho^2) + i\rho\sin\varphi(1-a^2)}{1-2a\rho\cos\varphi+a^2\rho^2} = \frac{\rho e^{i\varphi} - a(1+\rho^2) + a^2\rho e^{-i\varphi}}{1-2a\rho\cos\varphi+a^2\rho^2}$$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

Вигъпи „сото": $W(z)=\frac{i}{c}\frac{(1+a^2)\rho\cos\varphi-a(1+\rho^2)+i\rho\sin\varphi\cdot(1-a^2)}{1-2a\rho\cos\varphi+\rho^2a^2}$

$|w(z)|^2=\frac{1}{c^2}\frac{1}{[1-2a\rho\cos\varphi+\rho^2a^2]^2}\left[(1+a^2)^2\rho^2\cos^2\varphi+a^2(1+\rho^2)^2-\right.$

$\left.-2a(1+\rho^2)(1+a^2)\rho\cos\varphi+\rho^2\sin^2\varphi(1-a^2)^2\right]=$

$=\frac{1}{c^2}\frac{1}{[\cdot]^2}\left[(1+a^4)\rho^2+2a^2\rho^2\cos2\varphi+a^2(1+\rho^2)^2-2a\rho(1+a^2)(1+\rho^2)\cos\varphi\right]$

$$\begin{cases} m_x(\rho,\varphi)=\frac{2}{1+|w|^2}\mathrm{Re}(w)=\frac{2}{1+|w|^2}\frac{(-1)}{c}\frac{\rho\sin\varphi(1-a^2)}{[1-2a\rho\cos\varphi+\rho^2a^2]} \\ m_y(\rho,\varphi)=\frac{2}{1+|w|^2}\mathrm{Im}(w)=\frac{2}{1+|w|^2}\frac{1}{c}\frac{(1+a^2)\rho\cos\varphi-a(1+\rho^2)}{[1-2a\rho\cos\varphi+\rho^2a^2]} \end{cases}$$ – Вигъпи „сото"

$W(z)=\frac{i}{c}\frac{z-a}{1-az}=\frac{i}{c}\frac{[(1+a^2)\rho\cos\varphi-a(1+\rho^2)+i\rho\sin\varphi(1-a^2)]}{[\cdot\cdot]}=$

$=\frac{1}{c}\frac{[-\rho\sin\varphi(1-a^2)+i\{(1+a^2)\rho\cos\varphi-a(1+\rho^2)\}]}{[1-2a\rho\cos\varphi+\rho^2a^2]}=\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}e^{i\Phi}$

$\mathrm{tg}\Phi=\frac{(1+a^2)\rho\cos\varphi-a(1+\rho^2)}{\rho\sin\varphi(1-a^2)}$, $\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}=|W|^2$

$\mathrm{div}\vec{m}=\frac{\partial}{\partial x}[\sin\theta\cos\Phi]+\frac{\partial}{\partial y}[\sin\theta\sin\Phi]=\cos\Phi\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}+$

$+\sin\theta(-1)\sin\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\sin\Phi\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}+\sin\theta\cos\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial y}=$

$=m_z\left[\cos\Phi\frac{\partial\theta}{\partial x}+\sin\Phi\frac{\partial\theta}{\partial y}\right]+m_x\frac{\partial\Phi}{\partial y}-m_y\frac{\partial\Phi}{\partial x}$

18/I $W(z)=W_1(z)+iW_2(z)$

$\frac{dW(z)}{dz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)[W_1+iW_2]=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial W_1}{\partial x}+\frac{\partial W_2}{\partial y}+i\left(\frac{\partial W_2}{\partial x}-\frac{\partial W_1}{\partial y}\right)\right]$

$m^+=m_x+im_y$, $\frac{dm^+}{dz}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial m_x}{\partial x}+\frac{\partial m_y}{\partial y}+i\left(\frac{\partial m_y}{\partial x}-\frac{\partial m_x}{\partial y}\right)\right]=$

$=\frac{1}{2}\left[\mathrm{div}\vec{m}+i(\mathrm{Rot}\vec{m})_z\right]$

$\mathrm{div}\vec{m}=\frac{\partial m_x}{\partial x}+\frac{\partial m_y}{\partial y}=2\mathrm{Re}\frac{\partial m^+}{\partial z}=2\mathrm{Re}\frac{\partial}{\partial z}\frac{2W(z)}{1+|W|^2}$, $z'=\Theta(z)=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$

$W(z)=\begin{cases}\frac{i}{c'}z', & |z'|\le c' \\ i\frac{z'}{|z'|}, & |z'|>c'\end{cases}$, c' (некои радиус „сето" ѝм а≠0) надо сама найти.

Escaneado con CamScanner

Date. . .

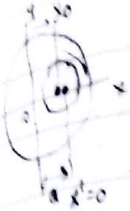
Изисква вихрен $m_2 = 1$ разположен при $z=a$.

$M_2 \cdot (1-|W|^2) = 0$ дава радиус „core" симетричното вихрене. (граница „core").

$|z'| = c'$, $|W|^2 = \frac{|z'|^2}{c'^2} = 1$. $\left|\frac{z-a}{1-az}\right|^2 = c'^2$

$\left|\frac{z-a}{1-az}\right|^2 = \frac{[(1+a^2)x - a(1+\rho^2)]^2 + y^2(1-a^2)^2}{[(1-ax)^2 + a^2y^2]^2} = \frac{(1+a^2)^2x^2 + a^2(1+\rho^2)^2 - 2a(1+a^2)(1+\rho^2)x + \ldots}{[\,\cdot\,]^2}$

$+y^2(1-a^2)^2 = \frac{1}{[\,\cdot\,]^2}\left[(1+a^4)\rho^2 + a^2(1+\rho^2)^2 + 2a^2(x^2-y^2) - 2a(1+a^2)(1+\rho^2)x\right]$



Снимка на $|z'|^2 = c'^2$, а на симетрия относително т. $z' = (x', y') = 0$ отбелязана. Снимка при $|z'-z_0'| = c'$?

Изисква $W(z) = \begin{cases} \frac{i}{c}z', & |w| \le 1, \; W(z) = \frac{i}{c}z \\ i\frac{z'}{|z'|}, & |w| > 1 \end{cases}$

Граница $|W|^2 = 1$ – граница „core".

$1 = |W(z)|^2 = \left|\frac{i}{c}z'\right|^2 = \left|\frac{i}{c}\frac{z-a}{1-az}\right|^2 = \frac{1}{c^2}\left|\frac{z-a}{1-az}\right|^2$

$(1+a^4)\rho^2 + a^2(1+\rho^2)^2 + 2a^2(x^2-y^2) - 2a(1+a^2)(1+\rho^2)x =$

$= c^2\left[(1-ax)^4 + a^4y^4 + 2a^2y^2(1-ax)^2\right]$

$(1+a^4)\rho^2 + \ldots = c^2\left[1 + 4a^2x^2 + a^4\rho^4 - 4ax + 2a^2\rho^2 - 4a^3x\rho^2\right]$

$(1+a^4)\rho^2 + \ldots = (1+a^4)\rho^2 + a^2(1+\rho^2)^2 + 2a^2(2x^2-\rho^2) - 2a(1+a^2)(1+\rho^2)x =$

$= (1+a^4)\rho^2 + a^2\left[1+\rho^4+2\rho^2-2\rho^2\right] + 4a^2x^2 - 2a(1+a^2)(1+\rho^2)x =$

$= (1+a^4)\rho^2 + (1+\rho^4)a^2 + 4a^2x^2 - 2a(1+a^2)(1+\rho^2)x$

$|W|^2 = \frac{1}{c^2}\left|\frac{z-a}{1-az}\right|^2 = \frac{1}{c^2}\frac{z-a}{1-az}\cdot\left(\frac{z-a}{1-az}\right)^* = \frac{1}{c^2}\frac{(z-a)}{(1-az)}\frac{(z^*-a)}{(1-az^*)} =$

$= \frac{1}{c^2}\frac{zz^* - a(z+z^*) + a^2}{1 - a(z+z^*) + a^2zz^*} = \frac{1}{c^2}\frac{\rho^2 - 2ax + a^2}{1 - 2ax + a^2\rho^2}$, $|W|^2 = 1$ – граница „core"

$\rho^2 - 2ax + a^2 = c^2\left[1 - 2ax + a^2\rho^2\right]$

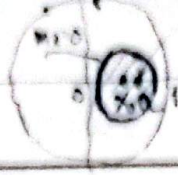
$\rho^2(1-c^2a^2) - 2ax(1-c^2) + a^2 - c^2 = 0$

$(x-x_0)^2 + y^2 = r^2 \rightarrow \rho^2 + x_0^2 - 2x_0x - r^2 = 0$ – граница „core"

$x_0 = \frac{1-c^2}{1-c^2a^2}$, $-r^2 + x_0^2 = \frac{a^2-c^2}{1-c^2a^2}$, $r^2 = x_0^2 - \frac{a^2-c^2}{1-c^2a^2} = c^2\frac{(1-a^2)^2}{(1-c^2a^2)^2}$

x_0 – симетрична отбелязаното, деление „core" граница, $r(a)$ – радиус „core".

Date. . .



$x_0 < a$
$r \le c$ – вътре сферата

(инверсия „core": $(x-x_0)^2+y^2=r^2$, $x_0 = a\frac{1-c^2}{1-c^2a^2}$, $r = \frac{c(1-a^2)}{1-c^2a^2}$

$\operatorname{div}\vec{m} = 2\operatorname{Re}\frac{\partial}{\partial z}\frac{2W(z)}{1+|W|^2}$, $W(z) = \begin{cases} \frac{i}{c}O(z), & \text{вътре „core", } |W|\le 1 \\ i\frac{O(z)}{|O(z)|}, & \text{вне „core"} \end{cases}$

Вне „core" $|W|^2 = \left|i\frac{O(z)}{|O|}\right| = 1$ $\quad O(z) = \frac{z-a}{1-az}$

и $\operatorname{div}\vec{m} = 2\operatorname{Re}\frac{\partial W(z)}{\partial z} = 2\operatorname{Re}\frac{\partial}{\partial z} i\frac{O(z)}{|O(z)|} = 2\operatorname{Re}\frac{\partial}{\partial z} i e^{i\Phi} = -2\operatorname{Re} e^{i\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial z} =$

$O(z) = |O(z)|e^{i\Phi(z)}$

$O(z) = \frac{z-a}{1-az}$, $|O(z)| = \sqrt{\frac{\rho^2 - 2a\rho\cos\varphi + a^2}{1-2a\rho\cos\varphi + a^2\rho^2}}$, $\Phi(z) = \operatorname{arctg}\frac{\rho\sin\varphi(1-a^2)}{(1+a^2)\rho\cos\varphi - a(1+\rho^2)}$

$\rho^2 = x^2+y^2$.

$|O(z)| = \sqrt{O(z)\cdot O^*(z)} = \sqrt{\frac{z-a}{1-az}\cdot\frac{z^*-a}{1-az^*}}$

вне „core" $\rightarrow \operatorname{div}\vec{m} = 2\operatorname{Re} i\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-a}{1-az}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{z-a}{1-az}\frac{z^*-a}{1-az^*}}} = 2\operatorname{Re} i\sqrt{\frac{1-az^*}{z^*-a}}\frac{\partial}{\partial z}\sqrt{\frac{z-a}{1-az}} =$

$= 2\operatorname{Re} i\sqrt{(x)}\frac{1}{2\sqrt{\frac{z-a}{1-az}}}\cdot\frac{[1-az-(z-a)\cdot(-a)]}{(1-az)^2} = \operatorname{Re} i\sqrt{\frac{1-az^*}{z^*-a}\frac{1-az}{z-a}}\frac{1-a^2}{(1-az)^2} =$

$= (1-a^2)|O(z)|^{-1}\operatorname{Re} i\frac{1}{(1-az)^2} = -(1-a^2)\frac{1}{|O(z)|}\operatorname{Im}\left[\frac{1}{(1-az)^2}\right]$

$\frac{1}{(1-az)^2} = \frac{1}{1-2az+z^2a^2} = \frac{1}{1-2a(x+iy)+a^2(x^2-y^2+2ixy)} =$

$= \frac{1}{\left[1-2ax+a^2(x^2-y^2)\right]+i\left[-2ay+2a^2xy\right]} = \frac{1}{[\,\cdot\,]+i2ay(ax-1)} =$

$= \frac{[\,\cdot\,]-i2ay(ax-1)}{\left[1-2ax+a^2(x^2-y^2)\right]^2+4a^2y^2(ax-1)^2}$

Volume charges

$\operatorname{div}\vec{m} = -\frac{(1-a^2)}{|O(z)|}\frac{(-1)2ay(ax-1)}{\left[1-2ax+a^2(x^2-y^2)\right]^2+4a^2y^2(ax-1)^2} = \frac{(1-a^2)}{|O(z)|}\frac{2ay(ax-1)}{[\,\cdot\,]^2+4a^2y^2(ax-1)^2}$

$\operatorname{div}\vec{m}$ – нечетна функция $y = \rho\sin\varphi$.

диверженция вне „core"

$\rightarrow W_m^{vol} = \frac{1}{2}\int_{V_a} d^3\vec{r}\,\rho(r)\varphi_v(r) = \frac{1}{2}\int_{V_a} d^3r' \int_{V_a} d^3r \frac{\operatorname{div}\vec{m}(r)\cdot\operatorname{div}\vec{m}(r')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} =$

$= \frac{1}{2}\int d^3r \cdot \int d^3r' \,(\cdot) + \frac{1}{2}\cdot 2\int d^3r \int d^3r'\,(\cdot) + \frac{1}{2}\int d^3r \int d^3r'\,(\cdot)$

r вне „core" r' вне „core" $\quad r$ core r' вне „core" $\quad r$ „core" r' „core"

$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int dk e^{-k|z-z'|}\sum_n e^{in(\varphi-\varphi')} J_n(k\rho)J_n(k\rho')$

Escaneado con CamScanner

Date. 19. 10.

$W_m^{int}(r,r' \text{ bine core}) = \frac{1}{2}\int d^3x \int d^3x' \int_0^\infty dk\, e^{-k|z-z'|}\left[J_0 J_0 + 2\sum_{\mu>0}\cos\mu(\varphi-\varphi')J_\mu J_\mu\right] \cdot$

$\cdot 4a^2(1-a^2)^2 \frac{y(ax-1)y'(ax'-1)}{[1-2ax+a^2(x^2-y^2)]^2+4a^2y^2(ax-1)^2} \cdot \frac{1}{[1-2ax'+a^2(x'^2-y'^2)]^2+4a^2y'^2(ax'-1)^2} \cdot$

$\cdot \sqrt{\frac{1-2ax+a^2\rho^2}{\rho^2-2ax+a^2}}\sqrt{\frac{1-2ax'+a^2\rho'^2}{\rho'^2-2ax'+a^2}} \cdot \int_0^L dz\,dz'\, e^{-k|z-z'|} = \frac{2L}{k}f(kL)$

$yy'\cos\mu(\varphi-\varphi') = \rho\rho'\sin\varphi\sin\varphi'[\cos\mu\varphi\cos\mu\varphi' + \sin\mu\varphi\sin\mu\varphi']$

на $\int d\varphi(\dots)$ вторая часть $\to 0$

$W_m^{int}(r,r' \text{ bine "core"}) = \frac{2L}{2}\int\frac{dk}{k}f(kL)\,4a^2(1-a^2)^2\int d\rho\rho\int d\varphi\int d\rho'\rho'\int d\varphi' \cdot$

$\cdot \sum_{\mu>0} J_\mu(k\rho)J_\mu(k\rho')\sin\mu\varphi\sin\mu\varphi' \frac{\rho\sin\varphi(ax-1)}{[1-2ax+a^2(x^2-y^2)]^2+4a^2y^2(ax-1)^2} \cdot$

$\cdot \frac{\rho'\sin\varphi'(ax'-1)}{[\cdot]^2+4a^2y'^2(ax'-1)^2}\sqrt{\frac{1-2ax+a^2\rho^2}{\rho^2-2ax+a^2}}\sqrt{\frac{1-2ax'+a^2\rho'^2}{\rho'^2-2ax'+a^2}} \sim a^2(1-a^2)^2$

$J(ka) = \int_{(\rho \text{ bine "core"})}\int d\rho\rho\int d\varphi\, J_\mu(k\rho)\sin\mu\varphi\,\frac{\rho\sin\varphi(a\rho\cos\varphi-1)}{[1-2ax+a^2(x^2-y^2)]^2+4a^2y^2(ax-1)^2}\sqrt{\frac{1-2ax+a^2\rho^2}{\rho^2-2ax+a^2}}$

$W_m^{int}(r,r' \text{ bine "core"}) = 8La^2(1-a^2)^2\int_0^\infty\frac{dk}{k}f(kL)\sum_{\mu>0}J_\mu^2(k,a)$

$J_\mu(k,a=0) = \int_c^1 d\rho\rho\int_0^{2\pi} d\varphi\, J_\mu(k\rho)\sin\mu\varphi\,\frac{(-\rho)\sin\varphi}{\rho} = -\int_c^1 d\rho\rho J_\mu(k\rho) \cdot$

$\cdot \int_0^{2\pi} d\varphi\sin\mu\varphi\sin\varphi = -\pi\int_c^1 d\rho\rho J_1(k\rho)\delta_{\mu 1} = \left|\int dx J_1(x)x = f(\dots) \text{ не берется нужно}\right| =$

$= -\pi\delta_{\mu 1}\int_c^1 d\rho\rho J_1(k\rho)R^2 = -\pi\delta_{\mu 1}F_1(k)R^2, \quad F_1(k,c) = \int_c d\rho\rho J_1(k\rho)$

$W_m^{int}(r,r' \text{ bine "core"}) \underset{a\to 0}{=} \frac{8L}{2}a^2R^2\int_0^\infty\frac{dk}{k}f(kL)\pi^2F_1^2(k) = \frac{8\pi^2L}{2}a^2R^2\int_0^\infty\frac{dk}{k}f(kL)F_1^2(k,c)$

Бублик "core" $W(z) = \frac{i}{c}O(z), \quad O(z) = \frac{z-a}{1-az}$ 19/X

$O(z) = (z-a)(1+az+a^2z^2+\dots) = z-a+az^2-a^2z+a^2z^3 =$

$= z+a(z^2-1)+a^2z(z^2-1), \quad |W(z)|^2 = \frac{1}{c^2}|O(z)|^2 = \frac{1}{c^2}[z+a(z^2-1)+a^2z(z^2-1)] \cdot$

$\cdot [z^2+a(z^{*2}-1)+a^2z^*(z^{*2}-1)] = \frac{1}{c^2}[zz^* + a(z^2-1)z^* + a(z^{*2}-1)z + a^2zz^*(z^2-1) +$

$+ a^2(z^2-1)(z^{*2}-1) + a^2z^*z(z^{*2}-1)],$

Escaneado con CamScanner

Date. . . Бриз-ом "сопло"

$$|w(z)|^2 = \frac{1}{c^2}\left[|z|^2 + a\{ z(z^{*2}-1) + z^*(z^2-1)\} + a^2\{ zz^*(z^2+z^{*2}-2) + (z^2-1)(z^{*2}-1)\}\right]$$

$$w(z) = \frac{i}{c}\left[z + a(z^2-1) + a^2 z(z^2-1)\right]$$

$$\operatorname{div}\vec{m} = 2\operatorname{Re}\frac{\partial}{\partial z}\frac{2w(z)}{1+|w(z)|^2} = 4\operatorname{Re}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{i}{c}\right)\frac{\left[z + a(z^2-1) + a^2 z(z^2-1)\right]}{\frac{1}{c^2}\left[|z|^2 + a\{\cdot\} + a^2\{\cdot\}\right]}$$

$$\frac{z + a(z^2-1) + a^2 z(z^2-1)}{\left[|z|^2 + a\{\cdot\} + a^2\{\cdot\}\right]} = \frac{1}{|z|^2}\left[z + a(z^2-1) + a^2 z(z^2-1)\right]\frac{1}{1 + \frac{a}{|z|^2}\{1\} + \frac{a^2}{|z|^2}\{2\}}$$

$$\operatorname{div}\vec{m} = 4\operatorname{Re}\frac{\frac{\partial w}{\partial z}(1+|w|^2) - w(z)\frac{\partial |w|^2}{\partial z}}{(1+|w|^2)^2} = \frac{4}{(1+|w|^2)^2}\operatorname{Re}\left[\frac{\partial w}{\partial z}(1+|w|^2) - w\frac{\partial |w|^2}{\partial z}\right]$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{i}{c}\left[1 + 2az + a^2(z^2-1) + a^2 z\cdot 2z\right]$$

$$\frac{\partial |w|^2}{\partial z} = \frac{1}{c^2}\left[z^* + a\{z^{*2} - 1 + 2zz^*\} + a^2\{z^*(z^2+z^{*2}-2) + zz^*\cdot 2z + 2z(z^{*2}-1)\}\right]$$

$$= \frac{1}{c^2}\left[z^* + a\{z^{*2} - 1 + 2|z|^2\} + a^2\{-2(z+z^*) + z^{*3} + z|z|^2 + 2|z|^2(z+z^*)\}\right]$$

$$\operatorname{div}\vec{m} = \frac{4}{(1+|w|^2)^2}\operatorname{Re}\left[\frac{i}{c}(1 + 2az + a^2(3z^2-1))(1+|w|^2) - \frac{i}{c}\left(z + a(z^2-1) + a^2 z(z^2-1)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{c^2}\{z^* + a(z^{*2} - 1 + 2|z|^2) + a^2(2(z+z^*)(|z|^2-1) + z^{*3} + z|z|^2)\}\right] = \left|\begin{array}{l}\text{отбрасываем}\\ \text{все члены}\\ \sim a\end{array}\right.$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{4}{(1+|w|^2)^2}\operatorname{Im}\left[(1+2az)(1+|w|^2) - \left(z + a(z^2-1)\right)\frac{1}{c^2}\{z^* + a(z^{*2} - 1 + 2|z|^2)\}\right] =$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{4}{(1+|w|^2)^2}\operatorname{Im}\left[2az(1+|w|^2) - \frac{1}{c^2}\{|z|^2 + a(z^2-1)z^* + az(z^{*2} - 1 + 2|z|^2)\}\right] =$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{4}{(1+|w|^2)^2}\operatorname{Im}\left[2az(1+|w|^2) - \frac{a}{c^2}\{(z^2-1)z^* + z(z^{*2} - 1 + 2|z|^2)\}\right] =$$

(Вещ.)

$$= -\frac{2a}{c}\frac{4}{(1+|w|^2)^2}\operatorname{Im}\left[z(1+|w|^2) - \frac{1}{c^2}z|z|^2\right] = -\frac{8a}{c}\frac{y}{(1+|w|^2)^2}\left[1 + |w|^2 - \frac{|z|^2}{c^2}\right]$$

Используем $|w|^2 = \frac{1}{c^2}\left[|z|^2 + a\{z(z^{*2}-1) + z^*(z^2-1)\} + \dots\right]$, с точ. до "a":

$$\operatorname{div}\vec{m} = -\frac{8a}{c}\frac{y}{(1+|w|^2)^2}\left[1 + O(a)\right] = -\frac{8a}{c}\frac{y}{\left(\frac{|z|^2}{c^2}+1\right)^2} = -8ac^3\frac{y}{(|z|^2+c^2)^2}$$

Т.е. бриз-ом "сопло" ($\rho \le c$) $\operatorname{div}\vec{m} = -8ac^3\frac{\rho\sin\varphi}{(\rho^2+c^2)^2}$ с точностью до "a".

Сравним "сопло" с точ. до "a": $\operatorname{div}\vec{m} = -\frac{2ay}{\rho} = -2a\sin\varphi$, сравним при $\rho = c$ (на внеш. границе)

Date.

$$W_m^{vol} = \frac{1}{2}\int_{r,r'\,в\,ч.,core} d^3r\,d^3r' \frac{div\vec{m}(r)\,div\vec{m}(r')}{|r-r'|} + \int_{r\,в\,ч.,\,r'\,вне\,ч.\,core} d^3r\int d^3r' \frac{div\vec{m}\cdot div\vec{m}(r')}{|r-r'|} + \frac{1}{2}\int_{r,r'\in core} d^3r\int d^3r' \frac{div\vec{m}\,div\vec{m}(r')}{|r-r'|}$$

$$W_m^{vol}(r,r'\in core) = \frac{1}{2}\int dz\,dz' \int d\rho\,\rho \int d\varphi \int d\rho'\rho' \int d\varphi' \int dk\, e^{-k|z-z'|} \sum_\mu e^{i\mu(\varphi-\varphi')} \times$$

$$\times J_\mu(k\rho) J_\mu(k\rho') (8ac^3)^2 \frac{\rho\sin\varphi}{(\rho^2+c^2)^2} \frac{\rho'\sin\varphi'}{(\rho'^2+c^2)^2}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i\mu\varphi}\sin\varphi = i\int_0^{2\pi} d\varphi \sin\mu\varphi\sin\varphi = \pi i\delta_{\mu 1}$$

$$W_m^{vol}(r,r'\in core) = \frac{1}{2}\int dk \frac{2L}{k} f(kL) \int d\rho\,\rho \int d\rho'\rho' \sum_\mu J_\mu(k\rho) J_\mu(k\rho') \frac{\rho}{(\rho^2+c^2)^2} \frac{\rho'}{(\rho'^2+c^2)^2}$$

$$(8ac^3)^2 \pi^2 \delta_{\mu 1} = L(8\pi a c^3)^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(kL) \int_0^c d\rho\,\rho\, J_1(k\rho) \frac{\rho}{(\rho^2+c^2)^2} \int_0^c d\rho'\rho' J_1(k\rho') \frac{\rho'}{(\rho'^2+c^2)^2}$$

Введем $G(k,c) = \int_0^c d\rho\,\rho\, J_1(k\rho) \frac{\rho}{(\rho^2+c^2)^2}$, тогда

$$W_m^{vol}(r,r'\in core) = L(8\pi)^2 a^2 c^6 \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(kL)\, G^2(k,c)$$

$$W_m^{vol}(r\in вне, r'\in core) = \int dz\,dz' \int_0^1 d\rho\,\rho \int_0^c d\rho'\rho' \int d\varphi \int d\varphi' \int dk\, e^{-k|z-z'|} \sum_\mu e^{i\mu(\varphi-\varphi')} \times$$

$$\times J_\mu(k\rho) J_\mu(k\rho') (-8ac^3) \frac{\rho'\sin\varphi'}{(\rho'^2+c^2)^2} (-2a)\sin\varphi = \int dk \frac{2L}{k} f(kL) \sum_\mu (i\pi\delta_{\mu 1})(-i\pi\delta_{\mu 1})$$

$$\int_0^c d\rho\,\rho\, J_\mu(k\rho) J_\mu(k\rho') (16a^2c^3) \frac{\rho'}{(\rho'^2+c^2)^2} = 32La^2c^3\pi^2 \int \frac{dk}{k} f(kL) \int_c^1 d\rho\,\rho\, J_1(k\rho) \times$$

$$\times \int_0^c d\rho'\rho' J_1(k\rho') \frac{\rho'}{(\rho'^2+c^2)^2} = 32\pi^2 La^2c^3 \int \frac{dk}{k} f(kL) F_1(k,c)\, G(k,c)$$

$$W_m^{vol} = \frac{8\pi^2 La^2}{2} \int \frac{dk}{k} f(kL) F_1^2(k,c) + 32\pi^2 La^2c^3 \int \frac{dk}{k} f F_1(k,c) G(k,c) + 64\pi^2 La^2c^6 \int \frac{dk}{k} f G^2(k,c)$$

$$W_m^{vol} = 4\pi^2 La^2 \int \frac{dk}{k} f(kL) \left[F_1^2(k,c) + 8c^3 F_1(k,c) G(k,c) + 16c^6 G^2(k,c) \right] =$$

$$= 4\pi^2 La^2 \int \frac{dk}{k} f(kL) \left[F_1(k,c) + 4c^3 G(k,c) \right]^2, \quad V_d = \pi R^2 L \to \pi L \ (R=1).$$

$$\frac{1}{V_d} W_m^{vol} = 4\pi a^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(kL) \left[F_1(k,c) + 4c^3 G(k,c) \right]^2$$ – энергия объемных зарядов сильнозаполненного ядра.

$$F_1(k,c) + 4c^3 G(k,c) = \int_0^1 d\rho\,\rho\, J_1(k\rho) + 4c^3 \int_0^c d\rho\,\rho\, J_1(k\rho) \frac{\rho}{(\rho^2+c^2)^2} = \int_0^1 d\rho\,\rho\, J_1(k\rho) F(\rho,c),$$

где $F(\rho,c) = \begin{cases} 4c^3\rho/(\rho^2+c^2)^2, & \rho \le c \\ 1, & \rho > c \end{cases}$ – разложение Гаусс divm.



Escaneado con CamScanner

Date. . . $\vec{H} \parallel Oy$ y_p "core" $(x-x_0)^2+y^2=r^2$

$\langle m_y \rangle_{V_d} = L \int_{S_d} d^2\vec{\rho}\, m_y(\vec{\rho})$, $m_y(\rho) = \frac{2}{1+|w|^2} \frac{\rho\cos\varphi - a(1+\rho^2)}{[1]}$ с точн. до "вн." (внутри "core").

$|w|^2 = \begin{cases} |z|^2/c^2, & \text{вторая нога} \\ 1, & \text{вне "core"} \end{cases}$ внутри "core"

$\vec{H} \parallel y$: "core" (1), x; x_0, $x_0 = a\frac{1-c^2}{1-a^2c^2}$

$\int_{S_d} d^2\vec{\rho}\, m_y(\vec{\rho}) = \int_{\text{внутри "core"}} d^2\vec{\rho}\, m_y^{in} + \int_{\text{вне "core"}} d^2\vec{\rho}\, m_y^{out} =$

$= \int_{\text{внутри}} d^2\vec{\rho}\, [m_y^{in}(\rho) - m_y^{out}(\rho)] + \int_{S_d} d^2\vec{\rho}\, m_y^{out}(\rho)$

$\int_{S_d} d^2\vec{\rho}\, m_y^{out}(\vec{\rho}) = \int_0^1 d\rho\,\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{2}{1+1}\left[\rho\cos\varphi - a(1+\rho^2)\right] = |\dots|$

Точнее $m_y(\vec{\rho}) = \frac{1}{c}\frac{2}{1+|w|^2}\frac{\rho\cos\varphi - a(1+\rho^2)}{1-2a\rho\cos\varphi} = \frac{2c^{-1}}{1+|w|^2}\left[\rho\cos\varphi - a(1+\rho^2)\right]\left[1+2a\rho\cos\varphi\right]$:

$= \frac{2c^{-1}}{1+|w|^2}\left[\rho\cos\varphi + 2a\rho^2\cos^2\varphi - a(1+\rho^2)\right] = \frac{2c^{-1}}{1+|w|^2}\left[\rho\cos\varphi + a\rho^2\cos 2\varphi - a\right]$

$\int_{S_d} d^2\vec{\rho}\, m_y^{out}(\vec{\rho}) = \int_0^1 d\rho\,\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\rho\cos\varphi + a\rho^2\cos 2\varphi - a\right] = -\pi a$ – неверно

$\int_{\text{"core"}} d^2\vec{\rho}\, [m_y^{in} - m_y^{out}] = \int_{\text{core}} d^2\vec{\rho}\, \underbrace{\left[\rho\cos\varphi + a\rho^2\cos 2\varphi - a\right]}_{\text{неверно}} 2\left[\frac{1}{1+|w^{in}|^2} - \frac{1}{1+|w^{out}|^2}\right] =$

$= \int_{\text{core}} d^2\vec{\rho}\, \left[\rho\cos\varphi + a\rho^2\cos 2\varphi - a\right]\left[\frac{2}{1+\frac{1}{c^2}\left[|z|^2 + a\{\dots\}\right]} - 1\right]$

$\{\dots\} = z(z^{*2}-1) + z^2(z^2-1) = |z|^2 z^* + |z|^2 z - (z+z^*) = (z+z^*)(|z|^2-1) =$

$= 2\rho\cos\varphi(\rho^2-1)$.

Плохо вне. Всюду $m_y = \frac{1}{c}\frac{2}{1+|w|^2}\left[\rho\cos\varphi - a(1+\rho^2)\right]$ – верно внутри "core".

Вне "core" $w(z) = i\frac{O(z)}{|O(z)|}$ и $m_y = \frac{2\,\mathrm{Im}\,w}{1+|w|^2}$ – другое (с вып. $|w|^2=1$).

Вне "core" $w(z) = \frac{i}{|O(z)|}\frac{z-a}{1-az}$, $m_y = \mathrm{Im}\,w = \frac{1}{|O(z)|}\mathrm{Re}\frac{z-a}{1-az} =$

$= \frac{1}{|O(z)|}\mathrm{Re}\left[z + a(z^2-1) + O(a^2)\right] = \frac{1}{|O(z)|}\mathrm{Re}\left[x+iy + a(x^2-y^2+2ixy-1)\right] =$

$= \frac{\rho\cos\varphi + a(\rho^2\cos 2\varphi - 1)}{|O(z)|}$, $|O(z)|^2 = |z|^2 + a(z+z^*)(|z|^2-1) =$

$= \rho^2 + 2\rho\cos\varphi\cdot a(\rho^2-1)$

$m_y(\vec{\rho})$ (вне "core") $= \frac{\rho\cos\varphi + a(\rho^2\cos 2\varphi - 1)}{\sqrt{\rho^2 + 2a\rho\cos\varphi(\rho^2-1)}} = \left[\cos\varphi + \frac{a}{\rho}(\rho^2\cos 2\varphi - 1)\right]\left[1 - \frac{a}{\rho}\cos\varphi(\rho^2-1)\right] =$

Escaneado con CamScanner

$\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi = \pi$

Date.

$= \cos\varphi + \frac{a}{\rho}\left[\rho^2\cos 2\varphi - 1 - \cos^2\varphi(\rho^2-1)\right] = \cos\varphi + \frac{a}{\rho}\left[\rho^2(-\sin^2\varphi) + (-\sin^2\varphi)\right]$

$m_y(\vec{\rho}) = \cos\varphi - \frac{a}{\rho}(\rho^2+1)\sin^2\varphi$ — вне „core" с точн. до „a".

$\int_{S_d} d^2\vec{\rho}\, m_y^{out} = \int_0^1 d\rho\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\cos\varphi - \frac{a}{\rho}(\rho^2+1)\sin^2\varphi\right] = -a\pi \int_0^1 d\rho(\rho^2+1) =$

$= -a\pi\left[\frac{\rho^3}{3} + \rho\right]\Big|_0^1 = -a\pi\left[\frac{1}{3}+1\right] = -\frac{4}{3}a\pi$

$\int_{S_d} d^2\vec{\rho}\left[m_y^{in} - m_y^{out}\right]$ — преобразуем.

„core"

$\langle m_y\rangle_{V_d} = -\frac{4}{3}a\pi L$ или плотность $\langle m_y\rangle_{V_d} = -\frac{4}{3}a$ (умн. на $\frac{1}{S_d L} = \frac{1}{\pi L}$), $\vec{H} \parallel -\vec{a}_y$

$\frac{1}{V_d M_s^2} W_H = -\frac{1 M_s}{V_d M_s^2}\int d^3r\, \vec{m}\cdot\vec{H} = +\frac{L H_y M_s}{V_d M_s^2}\int_{S_d} d^2\vec{\rho}\, m_y = -\frac{4}{3}a h$, $h = \frac{H}{M_s}$

— безразмерная энергия вихря

$\to W_{ex} = R_0^2 L \int_{S_d} d^2\vec{\rho}\, \frac{8}{(1+|w|^2)^2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right)$

$w(z) = \begin{cases} \frac{i}{c}\Omega(z) = \frac{i}{c}\left[z + a(z^2-1)\right], & \text{внутри „core"} \\ i\frac{\Omega(z)}{|\Omega(z)|} = i\frac{[z+a(z^2-1)]}{\sqrt{z\bar{z} + a(z+\bar{z})(z\bar{z}-1)}}, & \text{вне „core"} \end{cases}$

$\frac{[z+a(z^2-1)]}{\sqrt{(\cdots)}} = \frac{[\cdots]}{\sqrt{z\bar{z}}\sqrt{1+a\frac{(z+\bar{z})}{z\bar{z}}(z\bar{z}-1)}} = \frac{1}{\sqrt{z\bar{z}}}\left[z+a(z^2-1)\right]\left[1 - \frac{a}{2}\frac{(z+\bar{z})}{z\bar{z}}(z\bar{z}-1)\right] =$

$= \frac{1}{\sqrt{z\bar{z}}}\left[z + a\left\{z^2 - 1 - \frac{1}{2}\frac{(z+\bar{z})}{\bar{z}}(z\bar{z}-1)\right\}\right] = \frac{1}{|z|}\left[z + \frac{a}{\bar{z}}\left\{z|z|^2 - \bar{z} - \frac{1}{2}(z+\bar{z})(|z|^2-1)\right\}\right] =$

$= \frac{1}{|z|}\left[z + \frac{a}{\bar{z}}\left\{z|z|^2 - \bar{z} - \frac{1}{2}z|z|^2 - \frac{1}{2}\bar{z}|z|^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z}\right\}\right] = \frac{1}{|z|}\left[z + \right.$

$\left. + \frac{a}{\bar{z}}\left\{\frac{1}{2}z|z|^2 - \frac{1}{2}\bar{z}|z|^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\bar{z}\right\}\right] = \frac{1}{|z|}\left[z + \frac{1}{2}\frac{a}{\bar{z}}(z-\bar{z})(|z|^2+1)\right]$

$W(z) = \begin{cases} \frac{i}{c}\left[z + (z^2-1)a\right] \\ \frac{i}{\sqrt{z\bar{z}}}\left[z + \frac{1}{2}\frac{a}{\bar{z}}(z-\bar{z})(z\bar{z}+1)\right] \end{cases}$, $\overline{W(z)} = \begin{cases} -\frac{i}{c}\left[\bar{z} + a(\bar{z}^2-1)\right] \\ -\frac{i}{\sqrt{z\bar{z}}}\left[\bar{z} + \frac{1}{2}a\left(\frac{\bar{z}}{z}-1\right)(z\bar{z}+1)\right] \end{cases}$.

$\frac{\partial W}{\partial z} = \begin{cases} \frac{i}{c}\left[1 + 2za\right] \\ -\frac{i}{z^2\bar{z}}[\cdots] + \frac{i}{z\bar{z}}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{a}{\bar{z}}\left\{\frac{1}{\bar{z}}(z\bar{z}+1) + \left(\frac{z}{\bar{z}}-1\right)\bar{z}\right\}\right] \end{cases}$ — неверно и громоздко.

Поступаем $m_x(\vec{\rho})$, $m_y(\vec{\rho})$ с точностью до a.

$W_{ex} = \frac{1}{2}R_0^2\int_{V_d} d^3\vec{r}\left[(\nabla m_x)^2 + (\nabla m_y)^2 + (\nabla m_z)^2\right]$, $R_0^2 = \frac{C}{M_s^2}$

Escaneado con CamScanner

Date. 21.10. Возмущённые поля компоненты $\vec{m}$ вихря

21/X Расчёт объёма энергии Смещённого вихря.

→ Вне „ядра" с точ. до „a": $m_y(\vec{\rho}) = \cos\varphi - \frac{a}{\rho}(\rho^2+1)\sin^2\varphi$

$m_x(\vec{\rho}) = \frac{2}{1+|w|^2}\operatorname{Re} w \underset{|w|=1}{=} \operatorname{Re} w$, $w = w(z) = \frac{i}{|O(z)|}\frac{z-a}{1-az}$

$m_x(\vec{\rho}) = -\frac{1}{|O(z)|}\operatorname{Im}\frac{z-a}{1-az} = -\frac{1}{|O(z)|}\operatorname{Im}\left[x+iy+(x^2-y^2+2ixy-1)a\right] =$

$= -\frac{1}{|O(z)|}\left[y+2xya\right] = -\rho\sin\varphi\,\frac{\left[1+2a\rho\cos\varphi\right]}{\sqrt{\rho^2+2a\rho\cos\varphi(\rho^2-1)}}$ – без разложения по „a"

→ Вне „ядра" с точ. до „a": $m_x(\vec{\rho}) = -\frac{\rho\sin\varphi}{\rho}\left[1+2a\rho\cos\varphi\right]\left[1-\frac{a}{\rho}\cos\varphi(\rho^2-1)\right] =$

$= -\sin\varphi\left[1+2a\rho\cos\varphi - \frac{a}{\rho}\cos\varphi(\rho^2-1)\right] = -\sin\varphi\left[1+a\rho\cos\varphi+\frac{a}{\rho}\cos\varphi\right] =$

$= -\sin\varphi\left[1+\frac{a}{\rho}\cos\varphi(\rho^2+1)\right]$

Верно $m_x^2+m_y^2 = \cos^2\varphi - 2\frac{a}{\rho}(\rho^2+1)\sin^2\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi\left[1+\frac{2a}{\rho}(\rho^2+1)\cos\varphi\right] = 1+O(a^2)$

→ Внутри „ядра": $m_y(\vec{\rho}) = \frac{2}{1+|w|^2}\operatorname{Im} w = \frac{2}{1+|w|^2}\frac{1}{c}\,\frac{(1+a^2)\rho\cos\varphi - a(1+\rho^2)}{\left[1-2a\rho\cos\varphi+\rho^2a^2\right]}$

$|w(z)|^2 = \frac{1}{c^2}\left[|z|^2+a\left\{z(z^2-1)+z^*(z^2-1)\right\}\right]+O(a^2)$, разлагая по „a"

$m_y(\vec{\rho}) = \frac{1}{c}\,\frac{2}{1+|w|^2}\left[\rho\cos\varphi+a(\rho^2\cos2\varphi-1)\right] = \frac{2}{c}\,\frac{1}{1+\frac{1}{c^2}\left[\rho^2+a\{\dots\}\right]}\times$

$\times\left[\rho\cos\varphi+a(\rho^2\cos2\varphi-1)\right] = \frac{2}{c}\,\frac{c^2}{c^2+\rho^2}\left[1-\frac{a}{c^2+\rho^2}\left\{z(z^2-1)+z^*(z^2-1)\right\}\right]\times$

$\times\left[\rho\cos\varphi+a(\rho^2\cos2\varphi-1)\right] = \frac{2c}{c^2+\rho^2}\left[1-\frac{a}{c^2+\rho^2}\{\rho^2-1\}2\rho\cos\varphi\right]\left[\rho\cos\varphi+a(\rho^2\cos2\varphi-1)\right] =$

$= \frac{2c}{c^2+\rho^2}\left[\rho\cos\varphi+a\left(\rho^2\cos2\varphi-1-\frac{2\rho^2}{c^2+\rho^2}(\rho^2-1)\cos^2\varphi\right)\right] =$

$= \frac{2c}{c^2+\rho^2}\left[\rho\cos\varphi+a\left\{\frac{c^2+1}{c^2+\rho^2}2\rho^2\cos^2\varphi-(\rho^2+1)\right\}\right]$

→ Внутри „ядра": $m_x(\vec{\rho}) = \frac{2}{1+|w|^2}\operatorname{Re} w = \frac{2}{1+|w|^2}\frac{(-1)}{c}\,\frac{\rho\sin\varphi(1-a^2)}{1-2a\rho\cos\varphi+\rho^2a^2} =$

$= -\frac{2c}{c^2+\rho^2}\left[1-\frac{a}{c^2+\rho^2}(\rho^2-1)2\rho\cos\varphi\right]\left[1+2a\rho\cos\varphi\right]\rho\sin\varphi =$

$= -\frac{2c\rho\sin\varphi}{c^2+\rho^2}\left[1+a\left\{2\rho\cos\varphi-\frac{(\rho^2-1)}{c^2+\rho^2}2\rho\cos\varphi\right\}\right] = -\frac{2c\rho\sin\varphi}{c^2+\rho^2}\left[1+a2\rho\cos\varphi\cdot\frac{(c^2+1)}{c^2+\rho^2}\right]$

$m_z(\vec{\rho}) = \frac{1-|w|^2}{1+|w|^2} = \frac{1-\frac{1}{c^2}\left[|z|^2+a\{\dots\}\right]}{1+\frac{1}{c^2}\left[|z|^2+a\{\dots\}\right]} = \frac{c^2-\rho^2-a\{\dots\}}{c^2+\rho^2+a\{\dots\}} =$

Escaneado con CamScanner

Дата.

$$\frac{c^2-p^2}{c^2+p^2}\,\frac{1-\frac{a}{c^2-p^2}\{\dots\}}{1+\frac{a}{c^2+p^2}\{\dots\}} = \frac{c^2-p^2}{c^2+p^2}\left[1-\frac{a}{(c^2-p^2)}\{\dots\}\right]\left[1-\frac{a}{(c^2+p^2)}\{\dots\}\right] =$$

$$= \frac{c^2-p^2}{c^2+p^2}\left[1-\frac{a}{c^2-p^2}\{\dots\}-\frac{a}{c^2+p^2}\{\dots\}\right] = \frac{c^2-p^2}{c^2+p^2}\left[1-a\cdot 2p\cos\varphi\,(p^2-1)\,\frac{2c^2}{c^4-p^4}\right] =$$

$$= \frac{1}{c^2+p^2}\left[c^2-p^2-2ap(p^2-1)\cos\varphi\,\frac{2c^2}{c^2+p^2}\right]$$

Проверка внутри "core" $1 = m_x^2+m_y^2+m_z^2 = \frac{2^2c^2p^2\sin^2\varphi}{(c^2+p^2)^2}\left[1+a\cdot 4p\cos\varphi\,\frac{c^2+1}{c^2+p^2}\right]+$

$$+\frac{4c^2}{(c^2+p^2)^2}\left[p^2\cos^2\varphi+2ap\cos\varphi\left\{\frac{c^2+1}{c^2+p^2}2p^2\cos^2\varphi-(p^2+1)\right\}\right]+$$

$$+\frac{1}{(c^2+p^2)^2}\left[(c^2-p^2)^2-8ap(p^2-1)(c^2-p^2)\cos\varphi\,\frac{c^2}{c^2+p^2}\right] =$$

$$= \frac{4p^2c^2+(c^2-p^2)^2}{(c^2+p^2)^2}+\frac{1\cdot a}{(c^2+p^2)^2}\left[4c^2p^2(1-\cos^2\varphi)\,4p\cos\varphi\,\frac{c^2+1}{c^2+p^2}+\right.$$

$$\left.+4c^2\cdot 2p\cos\varphi\left\{\frac{c^2+1}{c^2+p^2}2p^2\cos^2\varphi-(p^2+1)\right\}-8p(p^2-1)(c^2-p^2)\frac{c^2}{c^2+p^2}\cos\varphi\right] =$$

$$= 1+\frac{a\cdot 8}{(c^2+p^2)^2}\left[\left\{2c^2p^2p\,\frac{c^2+1}{c^2+p^2}-(p^2+1)c^2p-p(p^2-1)(c^2-p^2)\frac{c^2}{c^2+p^2}\right\}\cos\varphi+\right.$$

$$\left.+\left\{-2c^2p^3\frac{c^2+1}{c^2+p^2}+2c^2p^3\frac{c^2+1}{c^2+p^2}\right\}\cos 3\varphi\right] = 1+O(a^2) - \text{верно}.$$

Вне "core": $m_\rho(\vec\rho) = m_x\cos\varphi+m_y\sin\varphi = -\cos\varphi\sin\varphi\left[1+\frac{a}{\rho}\cos\varphi\,(p^2+1)\right]+$

$$+\cos\varphi\sin\varphi-\frac{a}{\rho}(p^2+1)\sin^3\varphi = \frac{a}{\rho}\sin\varphi\left[-\cos^2\varphi(p^2+1)-\sin^2\varphi(p^2+1)\right] =$$

$$= -a\,\frac{(p^2+1)}{\rho}\sin\varphi$$

$$m_\varphi(\vec\rho) = -m_x\sin\varphi+m_y\cos\varphi = \sin^2\varphi\left[1+\frac{a}{\rho}\cos\varphi\,(p^2+1)\right]+\cos^2\varphi-\frac{a}{\rho}\sin^2\varphi\cos\varphi(p^2+1) =$$

$$= 1+O(a^2)\,!\qquad m_z = 0.$$

Вне "core": $\sum_\alpha(\nabla m_\alpha)^2 = \left(\frac{\partial m_\rho}{\partial\rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left[\left(\frac{\partial m_\rho}{\partial\varphi}-m_\varphi\right)^2+m_\rho^2\right] =$

$$= a^2\sin^2\varphi\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}+\rho\right)\right\}^2+\frac{1}{\rho^2}\left[\left(-a\,\frac{\rho^2+1}{\rho}\cos\varphi-1\right)^2+a^2\frac{(\rho^2+1)^2}{\rho^2}\sin^2\varphi\right] =$$

$$= a^2\sin^2\varphi\left[-\frac{1}{\rho^2}+1\right]^2+\frac{1}{\rho^2}\left[a^2\frac{(\rho^2+1)^2}{\rho^2}+2a\,\frac{(\rho^2+1)}{\rho}\cos\varphi+1\right] =$$

$$= a^2\sin^2\varphi\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left[1+\frac{a^2}{\rho^2}(\rho^2+1)^2+2a\cos\varphi\,\frac{(\rho^2+1)}{\rho}\right]$$

~~$\int_{S_0} d^2\vec\rho\sum_\alpha(\nabla m_\alpha)^2 = \int d^2\vec\rho\,(\cdot)+\int d^2\vec\rho\,(\cdot)$~~

Вне "core" Внутри "core"

Уравнение на границе "core" $(x-x_0)^2+y^2 = \varepsilon^2$.

Escaneado con CamScanner

Date. . .

Вернёмся к "core": $m_\rho(\vec{\beta}) = -\frac{2c\rho\sin\varphi\cos\varphi}{(c^2+\rho^2)}\left[1+2a\rho\cos\varphi\,\frac{c^2+1}{c^2+\rho^2}\right] +$

$+\frac{2c\sin\varphi}{(c^2+\rho^2)}\left[\rho\cos\varphi + a\left\{2\rho^2\cos^2\varphi\,\frac{c^2+1}{c^2+\rho^2} - (\rho^2+1)\right\}\right] =$

$= a\,\frac{2c\sin\varphi}{c^2+\rho^2}\left[-2\rho^2\cos^2\varphi\,\frac{c^2+1}{c^2+\rho^2} + 2\rho^2\cos^2\varphi\,\frac{c^2+1}{c^2+\rho^2} - (\rho^2+1)\right] = -2ca\sin\varphi\,\frac{\rho^2+1}{\rho^2+c^2}$

$m_\varphi(\vec{\beta}) = \frac{2c\rho\sin^2\varphi}{c^2+\rho^2}\left[1+2a\rho\cos\varphi\,\frac{c^2+1}{c^2+\rho^2}\right] + \frac{2c\cos\varphi}{c^2+\rho^2}\left[\rho\cos\varphi + a\left\{2\rho^2\cos^2\varphi\,\frac{c^2+1}{c^2+\rho^2} - (\rho^2+1)\right\}\right]$

$= \frac{2c\rho}{c^2+\rho^2} + \frac{2ca}{c^2+\rho^2}\left[2\rho^2\sin^2\varphi\cos\varphi\,\frac{c^2+1}{c^2+\rho^2} + 2\rho^2\cos^3\varphi\,\frac{c^2+1}{c^2+\rho^2} - (\rho^2+1)\cos\varphi\right] =$

$= \frac{2c\rho}{c^2+\rho^2} + \frac{2ca}{c^2+\rho^2}\cos\varphi\left[2\rho^2\,\frac{c^2+1}{c^2+\rho^2} - (\rho^2+1)\right] = \frac{2c\rho}{c^2+\rho^2} + \frac{2ca}{c^2+\rho^2}\cos\varphi\,\frac{1}{c^2+\rho^2}(\rho^2-1)(c$

$m_z(\vec{\beta}) = \frac{1}{c^2+\rho^2}\left[c^2-\rho^2 - 4a\cos\varphi\,\rho(\rho^2-1)\,\frac{c^2}{c^2+\rho^2}\right]$

$\sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = \left(\frac{\partial m_\rho}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial m_\varphi}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial m_z}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left[\left(\frac{\partial m_\rho}{\partial\varphi} - m_\varphi\right)^2 + \left(\frac{\partial m_\varphi}{\partial\varphi} + m_\rho\right)^2 + \left(\frac{\partial m_z}{\partial\varphi}\right)^2\right]$

$= 4c^2a^2\sin^2\varphi\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\,\frac{\rho^2+1}{\rho^2+c^2}\right]^2 + 4c^2\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\,\frac{\rho}{c^2+\rho^2} + a\,\frac{\partial}{\partial\rho}\,\frac{(\rho^2-1)(c^2-\rho^2)}{(c^2+\rho^2)^2}\cos\varphi\right]^2 +$

$+\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\,\frac{c^2-\rho^2}{c^2+\rho^2} - 4ac^2\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial\rho}\,\frac{\rho(\rho^2-1)}{(c^2+\rho^2)^2}\right]^2 + \frac{1}{\rho^2}\left[\left(-2ca\cos\varphi\,\frac{\rho^2+1}{\rho^2+c^2} - \frac{2c\rho}{c^2+\rho^2} - \right.\right.$

$-2ca\cos\varphi\,\frac{(\rho^2-1)(c^2-\rho^2)}{(c^2+\rho^2)^2}\Big)^2 + \left(-2ca\sin\varphi\,\frac{(\rho^2-1)(c^2-\rho^2)}{(c^2+\rho^2)^2} - 2ca\sin\varphi\,\frac{\rho^2+1}{\rho^2+c^2}\right)^2 +$

$\left.+\left(4ac^2\,\frac{\rho(\rho^2-1)}{(c^2+\rho^2)^2}\sin\varphi\right)^2\right]$

22/I

$\sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = 4c^2a^2\left[\frac{2\rho(\rho^2+c^2) - (\rho^2+1)2\rho}{(\rho^2+c^2)^2}\right]^2 + 4c^2\left[\frac{c^2+\rho^2 - \rho\cdot 2\rho}{(c^2+\rho^2)^2} + \right.$

$+ a\cos\varphi\,\frac{\{2\rho(c^2-\rho^2) + (\rho^2-1)(-2\rho)\}(c^2+\rho^2)^2 - (\rho^2-1)(c^2-\rho^2)2(c^2+\rho^2)2\rho}{(c^2+\rho^2)^4}\Big]^2 +$

$+\left[\frac{-2\rho(\rho^2+c^2) - (c^2-\rho^2)2\rho}{(c^2+\rho^2)^2} - 4ac^2\cos\varphi\,\frac{\{\rho^2-1+\rho\cdot 2\rho\}(c^2+\rho^2)^2 - \rho(\rho^2-1)2(c^2+\rho^2)2\rho}{(c^2+\rho^2)^4}\right]^2 +$

$+\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{4c^2}{(c^2+\rho^2)^2}\left(\rho + a\cos\varphi\,(\rho^2+1) + a\cos\varphi\,\frac{(\rho^2-1)(c^2-\rho^2)}{(c^2+\rho^2)}\right)^2 + \right.$

$\left.+\frac{4c^2a^2\sin^2\varphi}{(c^2+\rho^2)^2}\left(\frac{(\rho^2-1)(c^2-\rho^2)}{(c^2+\rho^2)} + (\rho^2+1)\right)^2 + 16a^2c^4\sin^2\varphi\,\frac{\rho^2(\rho^2-1)^2}{(c^2+\rho^2)^4}\right] = .$

Escaneado con CamScanner

Date.

$$= 4c^2a^2 + 4p^2\frac{(c^2-1)^2}{(p^2+c^2)^4} + 4c^2\left[\frac{c^2p^2}{(c^2+p^2)^2} + a\cos\varphi\, 2p\frac{\{c^4+1-2p^2\}(c^2+p^2)-2(p^2-1)(c^2+p^2)}{(c^2+p^2)^3}\right]^2 +$$

$$+\frac{1}{(c^2+p^2)^4}\left[-4pc^2 - 4ac^2\cos\varphi\,\frac{\{3p^2-1\}(c^2+p^2)-4p^2(p^2-1)}{(c^2+p^2)}\right]^2 +$$

$$+\frac{1}{p^2}\left[\frac{4c^2}{(c^2+p^2)^2}\left(p+a\cos\varphi\frac{2p^2(c^2+1)}{(p^2+c^2)}\right)^2 + \frac{4c^2a^2\sin^2\varphi}{(c^2+p^2)^2}\left(\frac{2p^2(c^2+1)}{(c^2+p^2)}\right)^2 +\right.$$

$$\left. + 16a^2c^4\sin^2\varphi\,\frac{p^2(p^2-1)^2}{(c^2+p^2)^4}\right] = 16a^2c^2p^2\frac{(c^2-1)^2}{(p^2+c^2)^4} + \frac{4c^2}{(c^2+p^2)^4}\left[c^2-p^2+\right.$$

$$\left.+\frac{2ap\cos\varphi}{(c^2+p^2)}\left(c^4+3c^2-3p^2c^2-p^2\right)\right]^2 + \frac{16c^4}{(c^2+p^2)^4}\left[p+\frac{a\cos\varphi}{(c^2+p^2)}\left(-p^4+3p^2+3p^2c^2-c^2\right)\right]^2 +$$

$$+\frac{1}{p^2}\frac{4c^2}{(c^2+p^2)^2}\left[\left(p+2a\cos\varphi\,p^2\frac{(c^2+1)}{(p^2+c^2)}\right)^2 + a^2\sin^2\varphi\left(\frac{2p^2(c^2+1)}{(c^2+p^2)}\right)^2 +\right.$$

$$\left.+4a^2c^2\sin^2\varphi\,\frac{p^2(p^2-1)^2}{(c^2+p^2)^2}\right] = 16a^2c^2p^2\frac{(c^2-1)}{(p^2+c^2)^4} + \frac{4c^2}{(c^2+p^2)^4}\left[c^2-p^2+2ap\cos\varphi\,\frac{(c^4+3c^2-3p^2c^2-p^2)}{(c^2+p^2)}\right.$$

$$+\frac{16c^4}{(c^2+p^2)^4}\left[p+\frac{a\cos\varphi}{(c^2+p^2)}\left(-p^4+3p^2+3p^2c^2-c^2\right)\right]^2 + \frac{1}{p^2}\frac{4c^2}{(c^2+p^2)^2}\times$$

$$\left.\times\left[p^2+4a\cos\varphi\,p^3\left(\frac{c^2+1}{p^2+c^2}\right)+4a^2p^4\left(\frac{c^2+1}{p^2+c^2}\right)^2+4a^2c^2\sin^2\varphi\,\frac{p^2(p^2-1)^2}{(c^2+p^2)^2}\right]=\right.$$

$$= 16a^2c^2p^2\frac{(c^2-1)^2}{(p^2+c^2)^4} + \frac{4c^2}{(c^2+p^2)^4}\left[(c^2-p^2)^2+4ap\cos\varphi\,(c^2-p^2)\frac{(c^4+3c^2-3p^2c^2-p^2)}{(c^2+p^2)}+\right.$$

$$+4a^2p^2\cos^2\varphi\,\frac{(c^4+3c^2-3p^2c^2-p^2)^2}{(c^2+p^2)^2} + 4c^2p^2 + 4c^2\cdot\frac{2a\cos\varphi\cdot p}{(c^2+p^2)}\left(-p^4+3p^2+3p^2c^2-c^2\right)+$$

$$\left.+4c^2\frac{a^2\cos^2\varphi}{(p^2+c^2)^2}\left(-p^4+3p^2+3p^2c^2-c^2\right)^2\right] + \frac{4c^2}{(c^2+p^2)^2}\left[1+4ap\cos\varphi\,\frac{(c^2+1)}{(c^2+p^2)}+\right.$$

$$\left.+4a^2p^2\left(\frac{c^2+1}{c^2+p^2}\right)^2 + 4a^2c^2\sin^2\varphi\,\frac{(p^2-1)^2}{(c^2+p^2)^2}\right]$$

$$\sum_\alpha(\nabla m_\alpha)^2 = F(a) = F(0) + a\,\frac{4c^2\cos\varphi}{(c^2+p^2)^4}\left[4p(c^2-p^2)\frac{(c^4+3c^2-3p^2c^2-p^2)}{(c^2+p^2)}+\right.$$

$$+8c^2p\,\frac{(-p^4+3p^2+3p^2c^2-c^2)}{(c^2+p^2)} + 4p(c^2+1)(c^2+p^2)\Big] +$$

$$+a^2\cdot 16\,\frac{c^2}{(c^2+p^2)^4}\left[p^2(c^2-1)^2 + p^2\cos^2\varphi\,\frac{(c^4+3c^2-3p^2c^2-p^2)^2}{(c^2+p^2)^2} + \frac{c^2\cos^2\varphi}{(p^2+c^2)^2}\left(-p^4+3p^2+3p^2c^2-c^2\right)^2+\right.$$

$$\left.+p^2(c^2+1)^2 + c^2\sin^2\varphi\,(p^2-1)^2\right] =$$

Escaneado con CamScanner

Date. 24 . 10 .

$$= F(0) + a\cos\varphi \frac{4c^2}{(c^2+\rho^2)^2}\left[c^6 + 2c^4 + 2\rho^2(c^2+1)(\rho^2+2c^2)\right]^{1/2} +$$

$$+ a^2 \frac{16c^2}{(c^2+\rho^2)^4}\left[2\rho^2(c^2+1) + c^2(\rho^2-1)^2\cos^2\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{(c^2+\rho^2)^2}\left\{\rho^2(c^4+3c^2-3\rho^2c^2-\rho^2)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + c^2(-\rho^4+3\rho^2+3\rho^2c^2-c^2)^2\right\}\right] - \text{вклад от "сосуда"}$$



$$\begin{cases} x_0 = a\dfrac{1-c^2}{1-c^2a^2} \\ z = c\dfrac{1-a^2}{1-c^2a^2} \end{cases}$$

Уравнение на границу "сосуда": $(x'-x_0)^2 + y'^2 = r^2$

$x'^2 - 2x'x_0 + x_0^2 + y'^2 = r^2$

$\rho'^2 - 2\rho'\cos\varphi' x_0 = r^2 - x_0^2$

$\rightarrow \rho'^2 - 2\rho'\cos\varphi' x_0 = \dfrac{c^2-a^2}{1-a^2c^2} = \bar{r}^2$

$O'(x'y'z')$ - центр в системе "сосуда"

$O(xyz)$ - центр в системе "сосуда"

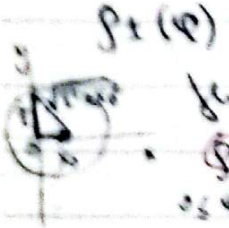
Это кор-ра $m_2(\vec{\rho})$ относительно ρ,φ - координаты $O(xyz)$ - с центром в центре "сосуда".

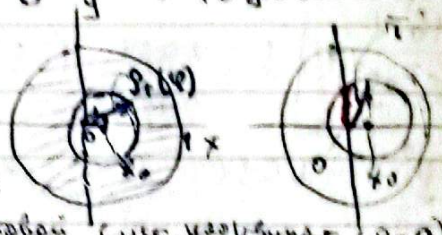
Уравнение "сосуда" $\rho'^2 - 2\rho'\cos\varphi' x_0 - \bar{r}^2 = 0$

$$(\rho')_{1,2} = \frac{1}{2}\left[+2x_0\cos\varphi' \pm \sqrt{4x_0^2\cos^2\varphi' - 4(-\bar{r}^2)}\right] = x_0\cos\varphi' \pm \sqrt{\bar{r}^2 + x_0^2\cos^2\varphi'}$$

Для задания границы нужно знать $\rho_+(\varphi)$ ($\rho=0$ - центр газа) уравнение на границу "сосуда" (в полярных координатах)

$$\rho_+(\varphi) = x_0\cos\varphi \pm \sqrt{\bar{r}^2 + x_0^2\cos^2\varphi}$$





Физика берет на себя:

- $\rho_+(\varphi) = x_0\cos\varphi + \sqrt{\bar{r}^2 + x_0^2\cos^2\varphi}$ - уравнение "сосуда"

$0 \le \varphi \le 2\pi$. Для описания "сосуда" в полярной системе координат ($\rho=0$)

ρ меняется от 0 до $\rho_+(\varphi)$.

$$\int_{S_\Delta} d^2\vec{\rho} \sum_a (\nabla m_2)^2 = \int_{\text{вне "сосуда"}}^{a,b} d^2\vec{\rho}\,(\cdot) + \int_{\text{внутри "сосуда"}}^{in} d^2\vec{\rho}\,(\cdot) = \int_{S_\Delta} d^2\vec{\rho}\left[\sum_a (\nabla m_2)^2\right]_{out} + \int_{\text{"сосуд"}} d^2\vec{\rho}\left\{\left[\sum_a (\nabla m_2)^2\right]_{in} - \left[\right.\right.$$

$$\int_{S_\Delta} d^2\vec{\rho}\left[\sum_a (\nabla m_2)^2\right]_{out} = \int_{S_\Delta} d^2\vec{\rho}\left\{a^2\sin^2\varphi\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left[1 + \frac{a^2}{\rho^2}(\rho^2+1)^2 + 2a\cos\varphi\,\frac{\rho^2+1}{\rho}\right]\right\} -$$

$$- \text{вклад} \int_0^{\rho_+(\varphi)} d\rho\rho \text{, по будущей расход. конфигурации.}$$

$$\int_{\text{вне "сосуда"}} d^2\vec{\rho}\left[\sum_a (\nabla m_2)^2\right]_{out} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\rho_+(\varphi)}^{1} d\rho\rho\left\{a^2\sin^2\varphi\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left[1 + \frac{a^2}{\rho^2}(\rho^2+1)^2 + 2a\cos\varphi\,\frac{(\rho^2+1)}{\rho}\right]\right\}$$

$$\rho_+(\varphi) = x_0\cos\varphi + \sqrt{\bar{r}^2 + x_0^2\cos^2\varphi} \underset{a=1}{=} x_0\cos\varphi + \bar{r}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{x_0^2}{\bar{r}^2}\cos^2\varphi\right] = x_0\cos\varphi + \bar{r} +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{a^2(1-c^2)^2}{c}\cos^2\varphi = a(1-c^2)\cos\varphi + c\left[1 + a^2(c^2-1)\right] + a^2\frac{(1-c^2)^2}{2c}\cos^2\varphi$$

$$\int_{\text{вне "сосуда"}} d^2\vec{\rho}\left[\sum_a (\nabla m_2)^2\right]_{out} = a^2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_c^1 d\rho\rho\left[\sin^2\varphi\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)^2 + \frac{3}{\rho^2}(\rho^2+1)^2\right] + 2a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{c+a(1-c^2)\cos\varphi}^1 d\rho\rho\cos\varphi\,\frac{(\rho^2+1)}{\rho^3} +$$

Escaneado con CamScanner

$\{\dots\} = c(c^2-1) + \frac{(1-c^2)^2}{2c}\cos^2\varphi$

Date. 24 • 10 •

$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\rho_+(\varphi)}^{1} d\rho\,\rho\,\frac{1}{\rho^2} = a^2\int_0^{2\pi} d\varphi\left[\pi\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)^2 + 2\pi\frac{1}{\rho^4}(\rho^2+1)^2\right] + 2a\int_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi\int_{\rho_+(\varphi)}^{1} d\rho\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right) +$

$+\int_0^{2\pi} d\varphi \ln\rho_+(\varphi) = \pi a^2\int_c^1 d\rho\left[3\rho + 2\frac{1}{\rho} + 3\frac{1}{\rho^3}\right] + 2a\int_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi\left[\rho - \frac{1}{\rho}\right]_{\rho_+(\varphi)}^{1} - \int_0^{2\pi} d\varphi\ln\rho_+(\varphi) =$

$= \pi a^2\left[\frac{3}{2}\rho^2 + 2\ln\rho + (-1)\frac{3}{2}\frac{1}{\rho^2}\right]_c^1 + 2a\int_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi\left[\rho_+(\varphi) - \frac{1}{\rho_+(\varphi)}\right] - \int_0^{2\pi} d\varphi\ln\rho_+(\varphi) =$

$= -\pi a^2\left[\frac{3}{2}c^2 + 2\ln c - \frac{3}{2}\frac{1}{a^2}\right] + 2a\int_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi\left[\rho_+(\varphi) - \frac{1}{\rho_+(\varphi)}\right] - \int_0^{2\pi} d\varphi\ln\rho_+(\varphi)$

$\rho_+(\varphi) - \frac{1}{\rho_+(\varphi)} = c + a(1-c^2)\cos\varphi - \frac{1}{c\left[1 + \frac{a}{c}(1-c^2)\cos\varphi\right]} = c + a(1-c^2)\cos\varphi -$

$-\frac{1}{c}\left[1 - \frac{a}{c}(1-c^2)\cos\varphi\right] = \left(c - \frac{1}{c}\right) + a(1-c^2)\cos\varphi\left[1 + \frac{1}{c^2}\right] = \frac{1}{c}(c^2-1) + a\cos\varphi\,c^2\left(\frac{1-c^2}{1+c^2}\right)(1+c^2)$

$\ln\rho_+(\varphi) = \ln\left[c + a(1-c^2)\cos\varphi + a^2\{\dots\}\right] = \ln c + \ln\left[1 + a\frac{(1-c^2)}{c}\cos\varphi + \frac{1}{c}a^2\{\dots\}\right] =$

$= \left|\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2\right| = \ln c + a\frac{(1-c^2)}{c}\cos\varphi + \frac{a^2}{c}\{\dots\} - \frac{1}{2}a^2\frac{(1-c^2)^2}{c^2}\cos^2\varphi =$

не даёт вкл. при $\int d\varphi$

$= \ln c + \frac{a^2}{c^2}\left[c^2(c^2-1) + \frac{1}{2}(1-c^2)^2\cos^2\varphi - \frac{1}{2}(1-c^2)^2\cos^2\varphi\right] = \ln c + a^2(c^2-1)$

$\left[\sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2\right]_{out} = -\pi a^2\left[\frac{3}{2}\frac{1}{c^2}(c^4-1) + 2\ln c\right] + (+)2a\int_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi\left[\frac{(c^2-1)}{c} + \frac{a}{c^2}\cos\varphi(1-c^4)\right] -$

$-\int_0^{2\pi} d\varphi\left[\ln c + a^2(c^2-1)\right] = -\pi a^2\left[\frac{3}{2}\frac{(c^4-1)}{c^2} + 2\ln c\right] + (+)2a^2\frac{(1-c^4)}{c^2}\cdot\pi - 2\pi\left[\ln c + a^2(c^2-1)\right] =$

↑ пров. инструмент

$= -2\pi\ln c - \pi a^2\left[\frac{3}{2}\frac{(c^4-1)}{c^2} + 2\ln c + 2\frac{(1-c^4)}{c^2} + 2(c^2-1)\right] =$

$= -2\pi\ln c + \pi a^2\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{c^2}(1-c^4) + 2(1-c^2) - 2\ln c\right]$, $c<1$, так что $[\cdot]>0$.

↑ этот коэф. изменился — все „core"

$\left[\sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2\right]_{in} = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\rho_+(\varphi)} d\rho\,\rho\left[\underbrace{F(0)}_{(I)} + a\cos\varphi\underbrace{\frac{16c^2\rho}{(c^2+\rho^2)^3}[\cdot]}_{(II)} + a^2\underbrace{\frac{16c^2}{(c^2+\rho^2)^4}[\cdot\cdot]}_{(III)}\right]$

$\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\rho_+(\varphi)} d\rho\,\rho\,F(0) = \int d\varphi\int d\rho\,\rho\left\{\frac{4c^2}{(c^2+\rho^2)^4}\left[(c^2-\rho^2)^2 + 4c^2\rho^2\right] + \frac{4c^2}{(c^2+\rho^2)^2}\right\} =$ 24Σ

$= \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\rho_+(\varphi)} d\rho\,\rho\,\frac{8c^2}{(c^2+\rho^2)^2} = \frac{8c^2}{2}\int d\varphi\int\frac{d(\rho^2)}{(c^2+\rho^2)^2} = 4c^2\int d\varphi\,\frac{(-1)}{(c^2+\rho^2)}\Big|_0^{\rho_+} =$

$= 4c^2(-1)\int d\varphi\left[\frac{1}{c^2+\rho_+^2} - \frac{1}{c^2}\right] = 4\int_0^{2\pi} d\varphi\left[1 - \frac{1}{1+\frac{1}{c^2}\rho_+^2(\varphi)}\right]$

$\rho_+^2(0) = \frac{1}{c^2}\left[c + a(1-c^2)\cos\varphi + a^2\{\dots\}\right]^2 = \frac{1}{c^2}\left[c^2 + 2ca(1-c^2)\cos\varphi + 2ca^2\{\dots\} + a^2(1-c^2)^2\cos^2\varphi\right] = 1 + 2\frac{a}{c}(1-c^2)\cos\varphi + \frac{a^2}{c^2}2(1-c^2)\left[-c^2 + (1-c^2)\cos^2\varphi\right]$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

(I) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho_1} d\rho\,\rho\, F(\rho) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left| 1 - \frac{a}{1+\frac{\pi^2}{c^2}(\cdots)} \right| = 4\int d\varphi \left| 1 - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{a}{c}(1-c^2)\cos\varphi + a^2(\cdots)\right] \right|$

$= 4\int d\varphi \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a^2(1-c^2) \right| = 4\pi - 4\pi a^2(1-c^2)$

(II): $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho_1(\varphi)} d\rho\,\rho\, a\cos\varphi \frac{16c^2\rho}{(c^2+\rho^2)^3}\left[c^6 + 2c^4 + 2\rho^2(c^4+1)(\rho^2+2c^2)\right] =$

$= 16c^2 a \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi \int_0^{\rho_1(\varphi)} d\rho\, f(\rho) = \left| f(\rho) = \frac{\rho^2}{(c^2+\rho^2)^3}[\cdots] \right| =$

$= 16c^2 a \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi \left| F(\rho_1(\varphi)) - F(0) \right| = \left| \begin{array}{l} \text{т.к. } \rho_1(\varphi) = c^2 + a(1-c^2)\cos\varphi \\ F(\rho) - \text{первообразная от } \frac{\rho^2}{(c^2+\rho^2)^3}[\cdots] \end{array} \right| =$

$= 16c^2 a \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi \left| F(c) + a(1-c^2)\cos\varphi \cdot \frac{dF(\rho)}{d\rho}\Big|_{\rho=c} \right| = \left| \begin{array}{l} \text{т.к. } dF(\rho)/d\rho = f(\rho), \\ \text{то } \ldots \\ F(\rho) \text{ и не } \ldots \end{array} \right|$

$= 16c^2 a^2 (1-c^2)\left(\frac{dF}{d\rho}\right)_{\rho=c} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2\varphi = 16c^2a^2(1-c^2)\pi \cdot \frac{c^2}{2^3 c^{10}}\left[c^6 + 2c^4 + 2c^2(c^2+1)\cdot 2c^2\right]$

$= \frac{1}{2}a^2\pi(1-c^2)\frac{1}{c^6}\left[c^6 + 2c^4 + 6c^4(c^2+1)\right] = \frac{1}{2}\pi a^2(1-c^2)\left[7 + \frac{8}{c^2}\right]$

(III): $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho_1(\varphi)} d\rho\,\rho\, a^2 \frac{16c^2}{(c^2+\rho^2)^4}[\cdots] = 16c^2a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{c} d\rho\,\rho \frac{1}{(c^2+\rho^2)^4}\left[2\rho^2(c^4+1) + \cdots\right] =$

$= \left| \begin{array}{l} \text{т.к. } \varphi \text{ меняется} \\ \text{от } 0 \text{ до } 2\pi \end{array} \right| = 16\pi c^2 a^2 \int_0^{c} d\rho\,\rho \frac{1}{(c^2+\rho^2)^4}\left[4\rho^2(c^4+1) + c^2(\rho^2-1)^2 + \right.$

$\left. + \frac{1}{(c^2+\rho^2)^2}\left\{\rho^2(c^4+3c^2-3\rho^2c^2-\rho^2)^2 + c^2(-\rho^4+3\rho^2+3\rho^2c^2-c^2)^2\right\}\right] =$

$= 16\pi c^2 a^2 \int_0^{c} d\rho\,\rho \frac{1}{(c^2+\rho^2)^4}\left[4\rho^2(c^4+1) + c^2(\rho^2-1)^2 + (\rho^2+c^2)(\rho^2c^2+1)\right] = \left|\rho = cx\right| =$

$= 16\pi c^2 a^2 c^2 \int_0^{1} dx\, x \frac{1}{c^8(1+x^2)^4}\left[4x^2c^2(c^4+1) + c^2(c^2x^2-1)^2 + c^2(x^2+1)(x^2c^4+1)\right] =$

$= 16\pi a^2 \frac{1}{c^2}\int_0^{1} dx\, x \frac{1}{(1+x^2)^4}\left[4x^2(c^4+1) + (c^2x^2-1)^2 + (x^2+1)(x^2c^4+1)\right] =$

$= 16\pi\frac{a^2}{c^2}\left[4(c^4+1)\int_0^{1} dx\, x\frac{x^2}{(1+x^2)^4} + \int_0^{1}\frac{dx\,x}{(1+x^2)^4}\left\{c^4x^4 - 2c^2x^2 + 1\right\} + \right.$

$\left. + \int_0^{1}\frac{dx\,x}{(1+x^2)^4}\left\{c^4x^2(x^2+1) + (x^2+1)\right\}\right] = 16\pi\frac{a^2}{c^2}\left[4(c^4+1)\cdot 0{,}042 + c^4\cdot 0{,}021 - \right.$

$\left. - 2c^2\cdot 0{,}042 + 0{,}146 + c^4\cdot 0{,}063 + 0{,}187\right] = 16\pi\frac{a^2}{c^2}\left[4(c^4+1)\cdot 0{,}042 + 2c^4\cdot 0{,}042 - \right.$

$\left. - 2c^2\cdot 0{,}042 + 0{,}333\right]$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$R_0^2 = C/M_s^2$

$\int d^2\vec{\rho} \left[\sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2\right] = 4\pi - 4\pi a^2(1-c^2) + 4\pi a^2(1-c^2)\left[\frac{7}{8} + \frac{1}{c^2}\right] +$

$+ 4\pi a^2 \frac{4}{c^2}\left[6\cdot 0{,}042\cdot c^4 - 2\cdot 0{,}042\, c^2 + \frac{1}{2}\right]$, $V_d = \pi R^2 L = \pi L$ в наших единицах

$\int_{S_d} d^2\vec{\rho} \sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = -2\pi \ln c + \pi a^2\left[\frac{7}{2}\frac{1}{c^2}(1-c^4) + 2(1-c^2) - 2\ln c\right] +$

$+ 4\pi - 4\pi a^2(1-c^2) + 4\pi a^2(1-c^2)\left[\frac{7}{8} + \frac{1}{c^2}\right] + 4\pi a^2 \frac{4}{c^2}\left[6\cdot 0{,}042\, c^4 - 2\cdot 0{,}042\, c^2 + \frac{1}{2}\right] =$

$\frac{1}{M_s^2} W_{ex} = \frac{1}{(2\pi)M_s^2} C \int_{S_d} d^2\vec{\rho} \sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = (R_0)^2\left[2 - \ln c\right] + R_0^2 a^2\left[\frac{7}{4}\frac{1}{c^2}(1-c^4) + 1 - c^2 - \ln c +\right.$

$\left. + 2(-1)(1-c^2) + 2(1-c^2)\left[\frac{7}{8} + \frac{1}{c^2}\right] + \frac{8}{c^2}\left[6\cdot 0{,}042\, c^4 - 2\cdot 0{,}042\, c^2 + 1/2\right]\right]$

$\frac{1}{V_d M_s^2 R_0^2} W_{ex} = \frac{1}{2\pi}\int_{S_d} d^2\vec{\rho} \sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = 2 - \ln c + a^2\left[\frac{7}{4}\frac{1}{c^2} - \frac{7}{4}c^2 - 1 + c^2 - \ln c +\right.$

$\left. + \frac{14}{8} - \frac{14}{8}c^2 + 2\frac{1}{c^2} - 2 + \frac{4}{c^2} + 8\cdot 2\cdot 0{,}042\left(3c^2 - 1\right)\right] =$

$= 2 - \ln c + a^2\left[-\frac{5}{4} - 16\cdot 0{,}042 + \frac{31}{4}\frac{1}{c^2} - \ln c + \left(48\cdot 0{,}042 - \frac{5}{2}\right)c^2\right]$

– имея обменной энергии смещенного дом. проверить!

Проверим $\vec{m}$ и/или $\sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2$ методом $W(z)$.

Внутри „Core" → $W(z) = \frac{i}{c}\left(z + a(z^2-1)\right)$ — надо еще учесть $\sim a^2$ (!)

Вне „core" → $i\,\frac{z^2 + a(z^2-1)}{\sqrt{z\bar{z} + a(z\bar{z}-1)(z+\bar{z})}} = i\left[\frac{z}{\bar{z}} + \frac{1}{2}\frac{a}{z\bar{z}^{3/2}}(z-\bar{z})(z\bar{z}+1)\right]$

$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} = \frac{1}{|z|}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a}{|z|^2}(z\bar{z}-1)(z+\bar{z})}}$, „a" – вещ.

Внутри „Core": $W(z) = \frac{i}{c}\left[z + a(z^2-1)\right]$, $\overline{W(z)} = -\frac{i}{c}\left[\bar{z} + a(\bar{z}^2-1)\right] = -\frac{i}{c}\left[\bar{z} + a(z^2-1)\right]$

$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{i}{c}\left[1 + 2az\right]$, $\frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = -\frac{i}{c}\left[1 + 2a\bar{z}\right]$, $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = 0$

$\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{z}} = \frac{i}{c}\left[1 + 2az\right]\left(-\frac{i}{c}\right)\left[1 + 2a\bar{z}\right] = \frac{1}{c^2}\left[1 + 2a(z+\bar{z}) + 4a^2|z|^2\right]$

$\left(1 + |W|^2\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{c^2}\left[|z|^2 + a\{\cdot\} + a^2\{\cdot\}\right]\right)^2 = 1 + \frac{2}{c^2}\left[|z|^2 + a\{\cdot\} + a^2\{\cdot\}\right] +$ ам. 19/8

$+ \frac{1}{c^4}\left[|z|^4 + 2a|z|^2\{\cdot\} + a^2\{\cdot\}^2 + 2a^2|z|^2\{\cdot\}\right] = \left(1 + \frac{|z|^2}{c^2}\right)^2 + a\left[\frac{2}{c^2}\{\cdot\} + \frac{2|z|^2}{c^4}\{\cdot\}\right] +$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$$+a^2\left[\frac{2}{c^2}\{\cdot\}+\frac{1}{c^4}\{\cdot\}^2+\frac{2|z|^2}{c^4}\{\cdot\}\right]=\left(1+\frac{|z|^2}{c^2}\right)^2+2a\frac{1}{c^2}\{\cdot\}\left[1+\frac{|z|^2}{c^2}\right]+$$

$$+\frac{a^2}{c^2}\left[\frac{1}{c^2}\{\cdot\}^2+2\{\cdot\}\left(1+\frac{|z|^2}{c^2}\right)\right]=\left(1+|w|^2\right)^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{(1+|w|^2)^2}\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{b_0+b_1a+b_2a^2}\left[1+2a(z+\bar{z})+4a^2|z|^2\right]\frac{1}{c^2}=$$

$$=\frac{1}{b_0c^2}\frac{1}{1+\frac{b_1}{b_0}a+\frac{b_2}{b_0}a^2}[\cdot]=\frac{1}{b_0c^2}\left[1-\frac{b_1}{b_0}a-\frac{b_2}{b_0}a^2+\frac{b_1^2}{b_0^2}a^2\right]\left[1+2a(z+\bar{z})+4a^2|z|^2\right]$$

$$=\frac{1}{b_0c^2}\left[1+a\left(-\frac{b_1}{b_0}+2(z+\bar{z})\right)+a^2\left\{\frac{b_1^2}{b_0^2}-\frac{b_2}{b_0}+4|z|^2-\frac{b_1}{b_0}2(z+\bar{z})\right\}\right]$$

Коэф. при a: $2(z+\bar{z})-\frac{b_1}{b_0}=4x-\frac{1}{\left(1+\frac{\rho^2}{c^2}\right)^2}\frac{2}{c^2}\{\cdot\}\left[1+\frac{\rho^2}{c^2}\right]=4x-\frac{2}{c^2}\frac{1}{\left(1+\frac{\rho^2}{c^2}\right)}\cdot 2\rho\cos\varphi\left(\rho^2-1\right)=$

$$=4\rho\cos\varphi\left[1-\frac{(\rho^2-1)}{c^2+\rho^2}\right]=\frac{4\rho\cos\varphi}{c^2+\rho^2}(c^2+1)$$ — похоже на рад. ож. $F(a)$ от $22/\bar{z}$, но не то.

Коэф. при a^2: $\frac{b_1}{b_0}\left(\frac{b_1}{b_0}-2(z+\bar{z})\right)+4|z|^2-\frac{b_2}{b_0}=\frac{2}{c^2}\frac{2\rho\cos\varphi(\rho^2-1)(1+\rho^2/c^2)}{\left(1+\frac{\rho^2}{c^2}\right)^2}\times$

$$\times(-1)\frac{4\rho\cos\varphi}{(c^2+\rho^2)}(c^2+1)+4\rho^2-\frac{1}{\left(1+\rho^2/c^2\right)^2}\frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{c^2}\{\cdot\}^2+2\{\cdot\}\left(1+\rho^2/c^2\right)\right]=$$

$$=\left\{\{\cdot\}=|z|^2\left(z^2+z^{*2}-2\right)+\left(z^2-1\right)\left(z^{*2}-1\right)=|z|^2\left(z^2+z^{*2}-2\right)+|z|^4+1-z^2-z^{*2}=\right.$$

$$\left.z=x+iy=\rho e^{i\varphi},\quad z^2+z^{*2}=\rho^2\left(e^{2i\varphi}+e^{-2i\varphi}\right)=2\rho^2\cos2\varphi\right.$$

$$\left.=\rho^2\left(2\rho^2\cos2\varphi-2\right)+\rho^4+1-2\rho^2\cos2\varphi=1+\rho^4+2\rho^2\left(\rho^2\cos2\varphi-1\right)-2\rho^2\cos2\varphi\right\}=$$

$$=-\frac{16}{c^2}\rho^2\cos^2\varphi\left(\rho^2-1\right)\frac{1}{\left(1+\frac{\rho^2}{c^2}\right)}\frac{c^2+1}{(c^2+\rho^2)}+4\rho^2-\frac{1}{c^2}\frac{1}{\left(1+\frac{\rho^2}{c^2}\right)^2}\left[\frac{1}{c^2}4\rho^2\cos^2\varphi\left(\rho^2-1\right)^2+\right.$$

$$\left.+2\left\{1+\rho^4+2\rho^2\left(\rho^2\cos2\varphi-1\right)-2\rho^2\cos2\varphi\right\}\left(1+\frac{\rho^2}{c^2}\right)\right]=$$

$$=-16\rho^2\cos^2\varphi\left(\rho^2-1\right)\frac{c^2+1}{(c^2+\rho^2)^2}+4\rho^2-\frac{1}{c^4}\frac{1}{\left(1+\frac{\rho^2}{c^2}\right)^2}\left[4\rho^2\left(\rho^2-1\right)^2\cos^2\varphi+\right.$$

$$\left.+2\left\{1+\rho^4+2\rho^2\left(\rho^2\cos2\varphi-1\right)-2\rho^2\cos2\varphi\right\}\left(c^2+\rho^2\right)\right]$$

$$W_{ex}=8R_0^2L\int_{S_d}d^2\vec{\rho}\,\frac{1}{(1+|w|^2)^2}\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}$$

$$\int_{\text{внутри цилиндра}}d^2\vec{\rho}\,\frac{1}{(1+|w|^2)^2}\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\rho_+(\varphi)}d\rho\,\rho\,\frac{1}{c^2\left(1+\frac{\rho^2}{c^2}\right)^2}\left[1+a\cdot\frac{4\rho\cos\varphi}{c^2+\rho^2}(c^2+1)+\right.$$

$$\left.+a^2\left\{-16\rho^2\cos^2\varphi\left(\rho^2-1\right)\frac{c^2+1}{(c^2+\rho^2)^2}+4\rho^2-\frac{1}{(c^2+\rho^2)^2}\left[4\rho^2\left(\rho^2-1\right)^2\cos^2\varphi+2\left(c^2+\rho^2\right)\left(\rho^2-1\right)^2\right]\right\}\right]=$$

Escaneado con CamScanner

Date. 25.10.

= | здесь внутренний член ~ cos2φ, т.к. при a² ∫₀^c dρρ ∫₀^{2π} dφ и они исчезают, ρ₊(φ) = c | =

$$= c^2 \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\rho_+(\varphi)} d\rho\rho \frac{1}{(c^2+\rho^2)^2} + ac^2 \cdot 4(c^2+1) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho_+(\varphi)} d\rho\rho \frac{\rho\cos\varphi}{(c^2+\rho^2)^3} +$$

$$+ a^2c^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{c} d\rho\rho \frac{1}{(c^2+\rho^2)^2} \left\{ -16\rho^2\cos^2\varphi \frac{(\rho^2-1)}{(c^2+\rho^2)^2}(c^2+1) + 4\rho^2 - \frac{(\rho^2-1)^2}{(c^2+\rho^2)^2}\left[4\rho^2\cos^2\varphi + 2(c^2+\rho^2)\right]\right\} =$$

$$= c^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho_+(\varphi)} d\rho\rho \frac{1}{(c^2+\rho^2)^2} + 4ac^2(c^2+1) \int_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi \int_0^{\rho_+(\varphi)} d\rho \frac{\rho^2}{(c^2+\rho^2)^3} +$$

(I) (II)

$$+ 4a^2c^2\pi \int_0^{c} d\rho\rho \frac{1}{(c^2+\rho^2)^2} \left\{ -4\rho^2 \frac{(\rho^2-1)}{(c^2+\rho^2)^2}(c^2+1) + 2\rho^2 - \frac{(\rho^2-1)^2}{(c^2+\rho^2)^2}\left[\rho^2+c^2+\rho^2\right]\right\}$$

(III)

(I) даёт класс $8c^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho_+(\varphi)} d\rho\rho \frac{1}{(c^2+\rho^2)^2} = 4\pi - 4\pi a^2(1-c^2)$

(II): $\int_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi \int_0^{\rho_+(\varphi)} d\rho f(\rho) = a(1-c^2)\pi f(c) = \pi a(1-c^2)\frac{c^2}{(c^2+c^2)^3} = \frac{\pi}{8}a(1-c^2)\frac{1}{c^4}$

сомножитель $\cos\varphi$ перед скобкой

(III): $\{\dots\} = \frac{1}{(c^2+\rho^2)^2}\left[(\rho^2-1)\left\{-4\rho^2(c^2+1) - (\rho^2-1)(c^2+2\rho^2)\right\} + 2\rho^2(c^2+\rho^2)^2\right] =$

$$= \frac{1}{(c^2+\rho^2)^2}\left[(\rho^2-1)\left\{-4\rho^2(c^2+1) - (\rho^2-1)(c^2+2\rho^2) + 2(c^2+\rho^2)^2\right\} + 2(c^2+\rho^2)^2\right] =$$

$$= 2 + \frac{(\rho^2-1)}{(c^2+\rho^2)^2}\left\{2c^4+c^2-c^2\rho^2-2\rho^2\right\}$$

$$\frac{1}{R_0^3 L} W_{ex}(\text{внутри сосуда}) = 8\int_{\text{сосуд}} d^2\vec{\rho} \frac{1}{(1+|w|^2)^2}\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 4\pi - 4\pi a^2(1-c^2) +$$

$$+ 4a^2c^2(c^2+1)\cdot 8\cdot\frac{\pi}{8}a(1-c^2)\frac{1}{c^4} + 8\cdot 4a^2c^2\pi\int_0^{c} d\rho\rho\frac{1}{(c^2+\rho^2)^2}\left[2 + \frac{(\rho^2-1)}{(c^2+\rho^2)^2}\{\dots\}\right] =$$

$$= 4\pi - 4\pi a^2(1-c^2) + 4\pi a^2(1-c^4)\frac{1}{c^2} + 32\pi a^2c^2\int_0^{c} d\rho\rho\frac{1}{(c^2+\rho^2)^2}\left[2 + \right.$$

$$\left. + \frac{(\rho^2-1)}{(c^2+\rho^2)^2}\left\{2c^4+c^2-c^2\rho^2-2\rho^2\right\}\right] =$$

$\int_0^{c} d\rho\rho\frac{1}{(c^2+\rho^2)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{c^2}$

25/X

$$= 4\pi - 4\pi a^2(1-c^2) + 4\pi\frac{a^2}{c^2}(1-c^4) + 32\pi\cdot 2a^2c^2\frac{1}{4}\frac{1}{c^2} + 32\pi a^2c^2\int_0^{c} d\rho\rho\frac{(\rho^2-1)}{(c^2+\rho^2)^4}\left\{2c^4+c^2-c^2\rho^2-2\rho^2\right\}$$

$$J(c) = \int_0^{c} d\rho\rho\frac{(\rho^2-1)}{(c^2+\rho^2)^4}\left\{2c^4+c^2-c^2\rho^2-2\rho^2\right\} = \left|x=\rho^2\right| = c^2(2c^2+1)\frac{1}{2}\int_0^{c^2} dx\frac{(x-1)}{(c^2+x)^4} -$$

$$- (c^2+2)\frac{1}{2}\int_0^{c^2} dx\frac{(x-1)}{(c^2+x)^4}\cdot x = \frac{1}{2}c^2(2c^2+1)\int\frac{dx}{(c^2+x)^4}\left[x+c^2-c^2-1\right] - \frac{1}{2}(c^2+2)\times$$

$$\times\int dx\, x\frac{1}{(c^2+x)^4}\left[x+c^2-c^2-1\right] =$$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$$= \frac{1}{2}c^2(2c^2+1)\left[\int \frac{dx}{(c^2+x)^3} - (c^2+1)\int \frac{dx}{(c^2+x)^4}\right] - \frac{1}{2}(c^2+2)\left[\int \frac{dx\cdot x}{(c^2+x)^3} - (c^2+1)\int \frac{dx\cdot x}{(c^2+x)^4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}c^2(2c^2+1)[\,\cdot\,] - \frac{1}{2}(c^2+2)\left[\int \frac{dx}{(c^2+x)^2} - c^2\int \frac{dx}{(c^2+x)^3} - (c^2+1)\int \frac{dx}{(c^2+x)^3} + (c^2+1)c^2\left[\int \frac{dx}{(c^2+x)^4}\right]\right]$$

$$= \left| \int_0^{c^2} \frac{dx}{(c^2+x)^2} = (-1)\frac{1}{c^2+x}\Big|_0^{c^2} = (-1)\left[\frac{1}{2c^2} - \frac{1}{c^2}\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{c^2};\ \int_0^{c^2}\frac{dx}{(c^2+x)^3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(c^2+x)^2}\Big|_0^{c^2} = \right.$$

$$\left. = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4c^4} - \frac{1}{c^4}\right] = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8}\frac{1}{c^4};\ \int_0^{c^2}\frac{dx}{(c^2+x)^4} = -\frac{1}{3}\frac{1}{(c^2+x)^3}\Big|_0^{c^2} = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{8c^6} - \frac{1}{c^6}\right] = \right|$$

$$= \frac{1}{2}c^2(2c^2+1)\left[\frac{3}{8}\frac{1}{c^4} - (c^2+1)\frac{7}{3\cdot 8}\frac{1}{c^6}\right] - \frac{1}{2}(c^2+2)\left[\frac{1}{2}\frac{1}{c^2} - c^2\frac{3}{8}\frac{1}{c^4} - (c^2+1)\frac{3}{8}\frac{1}{c^4} + c^2(c^2+1)\frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{3}{8}\frac{1}{2}\frac{(2c^2+1)}{c^2}\left[1 - (c^2+1)\frac{7}{9}\frac{1}{c^2}\right] - \frac{1}{2}\frac{3}{8}\frac{(c^2+2)}{c^2}\left[\frac{1}{3} - (c^2+1)\frac{1}{c^2} + \frac{(c^2+1)}{c^2}\frac{7}{9}\right] =$$

$$= \frac{3}{16}\left(2+\frac{1}{c^2}\right)\left[\frac{2}{9} - \frac{7}{9}\frac{1}{c^2}\right] - \frac{3}{16}\left(1+\frac{2}{c^2}\right)\left[\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{c^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{3}{16}\left(2+\frac{1}{c^2}\right)\frac{1}{9}\left[2 - \frac{7}{c^2}\right] - \frac{3}{16}\frac{1}{9}\left(1+\frac{2}{c^2}\right)\left[1 - \frac{2}{c^2}\right] = \frac{1}{48}\left[4 - \frac{14}{c^2} + \frac{2}{c^2} - \frac{7}{c^4} - \right.$$

$$\left. - 1 + \frac{4}{c^4}\right] = \frac{1}{48}\left[3 - \frac{12}{c^2} - \frac{3}{c^4}\right] = \frac{1}{16}\left[1 - \frac{4}{c^2} - \frac{1}{c^4}\right]$$

$\frac{1}{R_0^2 L}W_{ot}$ (внутри „core") $= 4\pi - 4\pi a^2(1-c^2) + 4\pi\frac{a^2}{c^2}(1-c^4) + 16\pi a^2 +$

$$+ 32\pi a^2 c^2 \cdot \frac{1}{16}\left[1 - \frac{4}{c^2} - \frac{1}{c^4}\right] = 4\pi + 2\pi a^2\left[-2(1-c^2) + \frac{2}{c^2}(1-c^4) + 8 + \right.$$

$$\left. + c^2 - 4 - \frac{1}{c^2}\right] = 4\pi + 2\pi a^2\left[2 + c^2 - \frac{1}{c^2}\right]$$

— это внутри „core" больше. Отличается от $24/\bar{z}$, рассчитанного β-ч методом.

Вне „core": $W(z) = \frac{i}{|z|\bar{z}}\left[|z|^2 + \frac{1}{2}a(z-\bar{z})(|z|^2+1)\right] =$

$$= i\frac{z}{|z|}\left[1 + \frac{1}{2}a\frac{1}{|z|^2}(z-\bar{z})(|z|^2+1)\right], \quad \frac{\partial W}{\partial z} - \text{не так просто.}$$

$$\overline{W(z)} = -i\frac{\bar{z}}{|z|}\left[1 + \frac{1}{2}a\frac{1}{|z|^2}(\bar{z}-z)(|z|^2+1)\right]$$

$$W(z) = i\frac{(x+iy)}{\rho}\left[1 + \frac{1}{2}a\frac{1}{\rho^2}2iy(\rho^2+1)\right] = \frac{1}{\rho}\left[-y - x\frac{a}{\rho^2}y(\rho^2+1) + i\left(x - ay\frac{y}{\rho^2}(\rho^2+1)\right)\right.$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[-y\left(1 + \frac{xa}{\rho^2}(1+\rho^2)\right) + i\left(x - a\frac{y^2}{\rho^2}(\rho^2+1)\right)\right]$$

$m_y(\vec{\rho}) = \operatorname{Im} W = \cos\varphi - a\frac{\sin^2\varphi}{\rho}(\rho^2+1)$, $m_x(\vec{\rho}) = \operatorname{Re} W = -\sin\varphi\left(1 + a\cos\varphi\frac{1}{\rho}(\rho^2+1)\right)$

Escaneado con CamScanner

$\rho_+(\varphi) = c + a(1-c^2)\cos\varphi + O(a^2)$

Date.

$m_x(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(1 + a\frac{x}{\rho^2}(1+\rho^2)\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[1 + ax\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right)\right]$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\rho^2 = x^2+y^2$

$m_y(x,y) = \frac{x}{\rho} - ay^2\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^3}\right)$, $\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}$, $\frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho}$.

$\frac{\partial m_x}{\partial x} = -y\left(-\frac{1}{\rho^2}\right)\frac{x}{\rho}\left[1 + ax\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right)\right] - \frac{y}{\rho}\left[a\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right) + ax\frac{(-2)}{\rho^3}\frac{x}{\rho}\right] =$

$= \frac{yx}{\rho^3}\left[1 + ax\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right)\right] - a\frac{y}{\rho}\left[1 + \frac{1}{\rho^2} - 2\frac{x^2}{\rho^4}\right] = \frac{xy}{\rho^3} + a\left[\frac{yx^2}{\rho^3}\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right) - \frac{y}{\rho}\left[1+\frac{1}{\rho^2} - \frac{x^2}{\rho^4}\right]\right]$

$= \frac{xy}{\rho^3} + a\frac{y}{\rho}\left[\frac{x^2}{\rho^2}\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right) - 1 - \frac{1}{\rho^2} + 2\frac{x^2}{\rho^4}\right] = \frac{xy}{\rho^3} + a\frac{y}{\rho}\left[-1 + \frac{1}{\rho^2}(x^2-1) + 3\frac{x^2}{\rho^4}\right] -$

– через x, y $(\nabla m_x)^2 (\nabla m_y)^2$ считать тяжело.

Через ρ, φ получаем $m_\rho(\vec{\rho}^{\,0}) = -a\frac{(\rho^2+1)}{\rho}\sin\varphi$, $m_\varphi(\vec{\rho}^{\,0}) = 1$, $m_z = 0$

– вне ρ слой с пом. "а"

$\sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = \left(\frac{\partial m_\rho}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left[\left(\frac{\partial m_\rho}{\partial\varphi} - 1\right)^2 + m_\rho^2\right]$

$\frac{\partial m_\rho}{\partial\rho} = -a\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}(\rho^2+1)\right] = -a\sin\varphi\left[-\frac{1}{\rho^2}(\rho^2+1) + \frac{1}{\rho}2\rho\right] = -a\sin\varphi\left[1 - \frac{1}{\rho^2}\right]$

$\frac{\partial m_\rho}{\partial\varphi} = -a\frac{(\rho^2+1)}{\rho}\cos\varphi$

$\sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = a^2\sin^2\varphi\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left[\left(-1 - \frac{a}{\rho}(\rho^2+1)\cos\varphi\right)^2 + \frac{a^2}{\rho^2}(\rho^2+1)\sin^2\varphi\right] =$

$= a^2\sin^2\varphi\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left[1 + \frac{2a}{\rho}(\rho^2+1)\cos\varphi + \frac{a^2}{\rho^2}(\rho^2+1)^2\right] =$

$= \frac{1}{\rho^2} + 2a\frac{1}{\rho^3}(\rho^2+1)\cos\varphi + a^2\left[\sin^2\varphi\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)^2 + \frac{1}{\rho^4}(\rho^2+1)^2\right]$

$\int_{\text{вне } \rho_+(\varphi)} d^2\vec{\rho}\sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\rho_+(\varphi)}^{1} d\rho\,\rho\left[\frac{1}{\rho^2} + 2a\frac{(\rho^2+1)}{\rho^3}\cos\varphi + a^2\left\{\sin^2\varphi\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{\rho^2}\right)^2\right\}\right] =$

к этой формуле хорошо только при $a < c$, тогда не всегда выполняется.

$= -\int_0^{2\pi} d\varphi \ln\rho_+(\varphi) + 2a\int_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi\int_{\rho_+(\varphi)}^{1} d\rho\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right) + a^2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_c^1 d\rho\,\rho\left[\sin^2\varphi\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{\rho^2}\right)^2\right]$

(I) (II) (III)

(I): $\int_0^{2\pi} d\varphi \ln\rho_+(\varphi) = (\ln c)\cdot 2\pi + \int_0^{2\pi} d\varphi \ln\left[1 + \frac{a}{c}(1-c^2)\cos\varphi + a^2\left\{c^2 - 1 + \frac{(1-c^2)^2}{2c^2}\cos^2\varphi\right\}\right] =$

$= 2\pi\ln c + \int_0^{2\pi} d\varphi\left[a^2\left\{c^2 - 1 + \frac{(1-c^2)^2}{2c^2}\cos^2\varphi\right\} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{c^2}(1-c^2)^2\cos^2\varphi\right] = 2\pi\ln c + \underset{(\text{вспом})}{2\pi a^2(c^2-1)}$

(II): $\int d\varphi\cos\varphi\int_{\rho_+(\varphi)}^{1} d\rho\, f(\rho) = \int_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi\left[F(1) - F(\rho_+)\right] = -\int_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi\, F[\rho_+(\varphi)] = -\int_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi\left[F(c) + \left(\frac{dF}{d\rho}\right)_{\rho=c} a(1-c^2)\cos\varphi + O(a^2)\right] = -a(1-c^2)f(c)\pi = -\pi a(1-c^2)\left(1+\frac{1}{c^2}\right) = -\pi a\frac{1}{c^2}(1-c^4)$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

III $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_c^1 d\rho\, \rho \left[\sin^2\varphi \left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{\rho^2}\right)^2 \right] = \pi \int_c^1 d\rho\, \rho \left[\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)^2 + 2\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right)^2 \right] =$

$= \pi \int_c^1 d\rho\, \rho \left[1 - \frac{2}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^4} + 2 + \frac{4}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^4} \right] = \pi \int_c^1 d\rho \left[3\rho + \frac{2}{\rho} + \frac{3}{\rho^3} \right] =$

$= \pi \left[3\frac{\rho^2}{2} + 2\ln\rho + 3\frac{(-1)}{2}\frac{1}{\rho^2} \right]_c^1 = \pi \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \right] - \pi \left[\frac{3}{2}c^2 + 2\ln c - \frac{3}{2}\frac{1}{c^2} \right]$

$= -\pi \left[\frac{3}{2}\left(c^2 - \frac{1}{c^2}\right) + 2\ln c \right]$ - так же как и 24/X.

$\int_{\text{вне «сердцевины»}} d^2\vec{\rho} \sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = -2\pi \ln c - 2\pi a^2 (c^2-1) + 2a \left[-\pi \frac{q}{c^2} (1-c^4) \right] -$

$- \pi a^2 \left[\frac{3}{2}\left(c^2 - \frac{1}{c^2}\right) + 2\ln c \right] = -2\pi \ln c - 2\pi a^2 (c^2-1) -$

$- 2\pi a^2 \frac{1}{c^2}(1-c^4) - \pi a^2 \left[\frac{3}{2}\frac{1}{c^2}(c^4-1) + 2\ln c \right] = -2\pi \ln c -$

$- \pi a^2 \left[2(c^2-1) + 2\frac{1}{c^2}(1-c^4) + \frac{3}{2}\frac{1}{c^2}(c^4-1) + 2\ln c \right] = -2\pi \ln c -$

$- \pi a^2 \left[2(c^2-1) + 2\ln c + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}(1-c^4) \right]$ — совп. с исправл. расчетом от 24/X.

↑ проверить. К. Матлаб посчитал by Mathematica, что $W_{ex} = W_{ex}(0) + (\ldots)\rho^2$ (0)

$\frac{1}{V_a M_s^2} W_m^{\text{торм.}} = \frac{1}{\beta} \pi \frac{c^3}{\beta} \left\{ \left[g_u(0) - g_u\left(\frac{\beta}{c}\right) \right] + 8c^2 a^2 \left[g_{MG}(0) - g_{MG}\left(\beta/c\right) \right] \right\}$

$\beta = \frac{L_0}{R}$

c – радиус «сердцевины» в/м $a=0$ б
eg. R, a – смещение $\frac{z-q}{1-qz}$
б eg. R.

$\frac{1}{V_a M_s^2} W_m^{\text{бок.}} = \pi a^2 \int_0^\infty dk\, \frac{2f(\beta k)}{k} J_1^2(k)$, $g_{MG}(x) =$

$g_{MG}(x) = \int_0^\infty dk\, e^{-kx} \left[\int_0^1 dr\, \frac{r^2(1-r^2)}{(1+r^2)^2} J_1(kr) \right]^2$

$g_u(x) = \int_0^\infty dk\, e^{-kx} \left[\int_0^1 \frac{r(1-r^2)}{(1+r^2)} J_0(kr)\, dr \right]^2$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x}(1-e^{-x})$

$\frac{1}{V_a M_s^2} W_m^{\text{vol}} = 4\pi a^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} f\left(k\frac{L_0}{R}\right) \left[\int_0^1 d\rho\, \rho\, J_1(k\rho) F(\rho, c) \right]^2$, $F(\rho,c) = \begin{cases} \frac{4c^3\rho}{(\rho^2+c^2)^2}, & \rho \le \\ 1, & \rho > c \end{cases}$

$\frac{1}{V_a M_s^2} W(a) = W_m(a) + W_{ex}(a) + W_H(a) = W(0) + W_m^{\text{торм.}}(a) + W_m^{\text{бок.}}(a) + W_m^{\text{vol}}(a) - \frac{4}{3}a^3 h$ ← не дает вклада $\sim a^2$

$\int_0^1 d\rho\, \rho\, J_1(k\rho) F(\rho,c) = \left| \begin{matrix} \rho/c = x \\ d\rho = dx \cdot c \end{matrix} \right| = c^2 \int_c^{1/c} [dx \cdot [\,]]$, $F(\rho,c) = \frac{4}{c} \frac{\rho}{(1+\rho^2/c^2)^2}$

Escaneado con CamScanner

Date. 26. 10.

На основе найденной энергии смещённого ядра Y_0 26/I

(вспом. $(w(\gamma) = \frac{\gamma - a}{1 - a\gamma}$) можно найти:

1) область устойчивости "vortex" (зона относительно двух неустойчивых
2) наименьшую восприимчивость $\chi(R, L)$! в крит. точке на пл. R-L.
3) поле H_n как поле при $a \neq 1$ или равновесия $W(a) = W_{min}$
или потери устойчивости "vortex".

Для этого надо знать „c" – равновесный радиус „сопа" при $a = 0$

Бланк 23/III (разные энергии Усова): $\frac{1}{V_d M_s^2} W_{us}^{(b)} = \frac{4\pi b^3}{LR^2}\left[g(0) - g\left(\frac{L}{b}\right)\right] + \left(\frac{R_0}{R}\right)^2\left[2 - \ln\frac{b}{R}\right]$, 2-ур. ...

$g(x)$ – здесь q)-я Усова $g_u(x) = \int_0^\infty dk\, e^{-xk}\left[\int_0^1 d\tau\, \tau\left(\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}\right) J_0(k\tau)\right]^2$

Если обозн. как 7/IV $\xi = \frac{b}{L}$, то

$$\frac{1}{V_d M_s^2} W_{us}(\xi) = \beta^2\left\{4\pi\xi^3\left[g(0) - g\left(\frac{1}{\xi}\right)\right] - \left(\frac{R_0}{L}\right)^2 \ln\xi\right\} + \left(\frac{R_0}{R}\right)^2\left[2 - \ln\beta\right]$$

Ур-е Усова для определения $\xi_{min} = \xi_0 = \frac{b}{L}$, которое зависит только от (L/R_0)

надо найти min $u(\xi) = 4\pi\xi^3\left[g(0) - g\left(\frac{1}{\xi}\right)\right] - \left(\frac{R_0}{L}\right)^2 \ln\xi$. $L/R_0 = l$

Равновесный радиус core в" Усова — фаза Vortex-мазь

R_0	0,1	0,2	0,5	0,75	5/6	1	10/9	1,25	1,5	1,75	2	20/9	2,25	2,5	2,75	3	30/9
b/L	0,569	3,07	1,393	1,00	0,920	0,795	0,734	0,675	0,584	0,522	0,473	0,435		0,400		0,350	0,325
c/R_0	0,569	0,614	0,697	0,750		0,795		0,844	0,876	0,914	0,946			1,00		1,05	

При $\frac{L}{R_0} > 1$, $\frac{b}{L} \approx 0{,}68\left(\frac{R_0}{L}\right)^{2/3}$ соотн. Усова'94. Для $\frac{L}{R_0} = 3$ это дает $\frac{b}{L} = 0{,}327$ – не очень точно.

Квадратичное приближение:

$\frac{1}{V_d}W(a) = W(0) + \frac{1}{2}W''(0)a^2 - \frac{4}{3}ah = W(a)$, $W''(0) \geq 0$, $W''(0) = 0$ – граница устойчивости "vortex"

$\frac{\partial W}{\partial a} = W''(0)a - \frac{4}{3}h = 0$, $a_0 = \frac{4}{3}\frac{1}{W''(0)}h$ – равновесное смещение.

$\langle m_y\rangle_{a_0} = \frac{4}{3}a_0 = \frac{4}{3}\frac{1}{W''(0)}\frac{4}{3}h = \left(\frac{4}{3}\right)^2\frac{1}{W''(0)}h$ или $\chi_{in} = \frac{\partial\langle m_y\rangle}{\partial h} = \left(\frac{4}{3}\right)^2\frac{1}{W''(0)}$

$W(a_0) = W(0) + \frac{1}{2}W''\left(\frac{4}{3}\right)^2\frac{1}{(W'')^2}h^2 - \frac{4}{3}\frac{4}{3}\frac{1}{W''}h^2 = W(0) - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^2\frac{1}{W''}h^2 = W(0) - \frac{1}{2}\chi h^2$ –

энергия смещенного "vortex". Ее можно сравнить с энергией hom-dot

$W_{hom} = W(a=1) - h$, что дает кв. уравнение на h_c – равновесн. энергия фаз. – см. 12/XI – нижняя оценка нам.

Date. 28. 10.

Проверка объемной энергии соленоидного $O(z) = \frac{(z-a)}{(1-az)}$

к. Можно ли W_{ex} не зависит от a^n с точностью до a^2 ?

$$W_{ex} = \sum_\alpha (m_x)^2 = \left| \frac{\partial}{\partial z} \ln O(z) \right|^2 \text{ вне "core"}.$$

Вне "core" $m_x = \mathrm{Re}\, W$, $m_y = \mathrm{Im}\, W$, $W(z) = i \frac{O(z)}{|O(z)|}$. $W(z) = e^{i\left[\Phi(x,y) + \frac{\pi}{2}\right]}$

$m_x = \mathrm{Re}\, W = \mathrm{Re}\left[i e^{i\Phi}\right] = \mathrm{Re}\left[i(\cos\Phi + i\sin\Phi)\right] = -\sin\Phi$, $m_y = \cos\Phi$

При $a = 0$ $\Phi(a=0) = \varphi$ – обычн. полярный угол.

$$\sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = \left(\frac{\partial m_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial m_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial m_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial m_y}{\partial y}\right)^2 = \left| \begin{matrix} m_x = -\sin\Phi(x,y) \\ m_y = \cos\Phi(x,y) \end{matrix} \right| =$$

$$= \cos^2\Phi \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right] + \sin^2\Phi \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right] = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 = (\nabla\Phi)^2$$

$$\Phi(x,y) = \mathrm{arctg}\left[\frac{\rho\sin\varphi\,(1-a^2)}{(1+a^2)\rho\cos\varphi - a(1+\rho^2)}\right]$$ Согласно 18/$\bar{X}$.

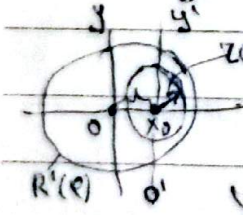
$$(\nabla m_x)^2 = \left[\nabla\left(m_x^0 + a\{\cdot\} + \{\cdot\}a^2\right)\right]^2$$

$$\sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = \left(\frac{\partial m_\rho}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left[\left(\frac{\partial m_\rho}{\partial\varphi} - m_\varphi\right)^2 + \left(\frac{\partial m_\varphi}{\partial\varphi} + m_\rho\right)^2\right]$$

Согласно 21/$\bar{X}$ вне "core" : $m_\rho = -a\sin\varphi\,\frac{(\rho^2+1)}{\rho} + O(a^2)$, $m_\varphi = 1 + O(a^2)$

$\Rightarrow$ подгоним в тиле $\left(\frac{\partial m_\rho}{\partial\varphi} - m_\varphi\right)^2 = \left(\frac{\partial m_\rho}{\partial\varphi}\right)^2 + m_\varphi^2 - 2m_\varphi\frac{\partial m_\rho}{\partial\varphi}$ подгонам до "a^n" надо сначала и $\rho_+(\varphi)$-определить подгонам вне "core" 21/$\bar{X}$ надо исправить. имеет при $a < c$ (т.к. $a \to 0$).

29/$\bar{X}$ $\Phi(x,y) = \mathrm{arctg}\left[\frac{y(1-a^2)}{(1+a^2)x - a(1+x^2+y^2)}\right]$, x,y – в системе координат с центром в центре γ



x, x' $\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y \end{cases}$ В $O'(x'y')$ системе координат с центром в центре вихря, гр. "core" $\rho' = z(a)$

Гр-я граница дана неявно в $x'y'$-координатах : $R'(\varphi) = -x_0\cos\varphi + \sqrt{R^2 - x_0^2\sin^2\varphi}$

Инт. вне "core" $\int dS(\cdot) = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{R'(a)}^{R'(\varphi)} d\rho'\rho'(\cdot)$.

$$\mathrm{tg}\,\Phi(x',y') = \frac{y'(1-a^2)}{(1+a^2)(x'+x_0) - a\left[1 + (x'+x_0)^2 + y'^2\right]}$$

$$\begin{cases} x_0 = a\frac{1-c^2}{1-a^2c^2} \\ c = c\frac{1-a^2}{1-a^2c^2} \end{cases}$$ x_0 – расст. центра вихря от центра γ

$$\mathrm{ctg}\,\Phi(x',y') = \frac{1}{y'(1-a^2)}\left[(1+a^2)(x'+x_0) - a\left[1 + x'^2 + y'^2 + 2x'x_0 + x_0^2\right]\right] = \left|\text{с чего бы?}\right|$$

$$= \frac{1}{y'}(1+a^2)\left[x' + x_0 + a^2x' - a\left\{1 + x'^2 + y'^2 + 2x'x_0\right\}\right] =$$

$$= \frac{1}{y'}\left[x' + x_0 + 2a^2x' - a\left\{1 + x'^2 + y'^2 + 2x'a\right\}\right] = \frac{1}{y'}\left[x' + x_0 - a(1 + x'^2 + y'^2) + 2a^2x'\right]$$

Dato.

$= \frac{1}{y'}\left[x' - a(c^2 + x'^2 + y'^2) + 2a^2 x' c^2 \right]$. $\varphi(x,y) = \operatorname{arctg}(u)$

$\operatorname{arctg} u = \pm\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{u}$. $\varphi(x,y) = \pm\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left[\frac{(1+a^2)x - a(1+\beta^2)}{y(1-a^2)}\right] =$

$= \pm\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left[\frac{x'}{y'} - \frac{a}{y'}(c^2 + x'^2 + y'^2) + 2a^2 c^2 \frac{x'}{y'} \right]$

$\operatorname{arctg}\left[\varphi_0 + a\varphi_1 + a^2\varphi_2\right] = f(\varphi_0 + a\varphi_1 + a^2\varphi_2) = f(\varphi_0) + f'(\varphi_0)(a\varphi_1 + a^2\varphi_2) +$

$+ \frac{1}{2} f''(\varphi_0) a^2\varphi_1^2 = \operatorname{arctg}\varphi_0 + \frac{1}{1+\varphi_0^2}(a\varphi_1 + a^2\varphi_2) + \frac{1}{2}\frac{(-1)}{(1+\varphi_0^2)^2} 2\varphi_0 a^2\varphi_1^2 =$

$= \operatorname{arctg}\varphi_0 + a\frac{\varphi_1}{1+\varphi_0^2} + \frac{a^2}{(1+\varphi_0^2)^2}\left[\varphi_2(1+\varphi_0^2) - \varphi_0\varphi_1^2\right]$

$\varphi(x',y') = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x'}{y'} - a\frac{1}{1+\frac{x'^2}{y'^2}}\left(-\frac{1}{y'}\right)(c^2 + x'^2 + y'^2) + \frac{a^2}{\left(1+\frac{x'^2}{y'^2}\right)^2}\left[2c^2\frac{x'}{y'}\left(1+\frac{x'^2}{y'^2}\right)\right.$

$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x'}{y'} + a\frac{y'}{x'^2+y'^2}(c^2 + x'^2 + y'^2) + \frac{a^2}{(x^2+y'^2)^2}\left[2c^2 x'y'(x'^2+y'^2) - \right.$

$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x'}{y'} + a\frac{y'}{\rho'^2}(c^2 + \rho'^2) + a^2\frac{x'y'}{\rho'^4}\left[2c^2\rho'^2 - (c^2+\rho'^2)^2\right] =$

$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x'}{y'} + a\frac{y'}{\rho'^2}(c^2+\rho'^2) + a^2\frac{x'y'}{\rho'^4}(-1)(c^4+\rho'^4) =$

$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x'}{y'} + ac^2\frac{y'}{\rho'^2} + ay' - a^2c^4\frac{x'y'}{\rho'^4} - a^2x'y'$

$\frac{\partial\varphi}{\partial x'} = -\frac{1}{1+\frac{x'^2}{y'^2}}\frac{1}{y'} + ac^2y'\left(-\frac{2}{\rho'^3}\right)\frac{x'}{\rho'} - a^2c^4y'\left[\frac{1}{\rho'^4} + x'\frac{(-4)}{\rho^5}\frac{x'}{\rho'}\right] - a^2y'$

и т.д. - немного громоздко. Другой путь:

$w_{cx} = \sum_\alpha (\bar{v}m_\alpha)^2 = \left|\frac{\partial}{\partial z}\ln O(z)\right|^2 = \left|\frac{\partial}{\partial z}\ln\left(\frac{z-a}{1-az}\right)\right|^2 = \left|\frac{\partial}{\partial z}\left[\ln(z-a) - \right.\right.$

$\left.\left. - \ln(1-az)\right]\right|^2 = \left| \begin{array}{l} \ln(z-a) = \ln z(1-\frac{a}{z}) = \\ = \ln z + \ln(1-\frac{a}{z}) \end{array} \right|$

$\ln O(z) = \ln\frac{z-a}{1-az} = \ln z + \ln\frac{1-a/z}{1-az} = \ln z + \ln\left[\left(1-\frac{a}{z}\right)\left(1+az+a^2z^2\right)\right] =$

$= \ln z + \ln\left[1 + az + a^2z^2 - \frac{a}{z} - a^2\right] = \ln z + \ln\left[1 + a\left(z-\frac{1}{z}\right) + a^2(z^2-1)\right]$

$\frac{\partial}{\partial z}\ln O(z) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\ln(z-a) - \ln(1-az)\right] = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{1-az}(-a) =$

$= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{a}{z}} + a\frac{1}{1-az} = \frac{1}{z}\left[1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2}\right] + a\left[1+az\right] = \frac{1}{z} + a\left(\frac{1}{z^2}+1\right) + a^2\left(\frac{1}{z^3}+z\right)$

~~$\left|\frac{\partial}{\partial z}\ln O(z)\right|^2 = \left[\frac{1}{z} + a\left(\frac{1}{z^2}+1\right) + a^2\left(\frac{1}{z^3}+z\right)\right]\left[\frac{1}{\bar{z}} + a\left(\frac{1}{\bar{z}^2}+1\right) + a^2\left(\frac{1}{\bar{z}^3}+\bar{z}\right)\right] =$~~

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$$= \frac{1}{|z|^2} + a\left\{\frac{1}{z}\left(\frac{1}{\bar z^2}+1\right)+\frac{1}{\bar z}\left(\frac{1}{z^2}+1\right)\right\} + a^2\left\{\left(\frac{1}{z^2}+1\right)\left(\frac{1}{\bar z^2}+1\right)+\frac{1}{z}\left(\frac{1}{\bar z^3}+\frac{1}{\bar z}\right)+\frac{1}{\bar z}\left(\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{|z|^2} + a\left\{\frac{1}{\bar z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{|z|^2 z}+\frac{1}{|z|^2\bar z}\right\} + a^2\left\{\frac{1}{|z|^4}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{\bar z^2}+1+\frac{1}{|z|^2\bar z^2}+\frac{\bar z}{z}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{z^2|z|^2}+\frac{z}{\bar z}\right\} = \frac{1}{|z|^2}+a\left(\frac{1}{|z|^2}+1\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar z}\right)+a^2\left\{1+\frac{1}{|z|^4}+\frac{\bar z^2}{|z|^4}+\frac{z^2}{|z|^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{z^2}{|z|^6}+\frac{\bar z^2}{|z|^6}+\frac{\bar z^2}{|z|^2}+\frac{z^2}{|z|^2}\right\} = \frac{1}{|z|^2}+a\left(\frac{1}{|z|^2}+1\right)\left(\frac{z+\bar z}{|z|^2}\right)+$$

$$+a^2\left\{1+|z|^4+\frac{1}{|z|^4}(\bar z^2+z^2)+\frac{1}{|z|^6}(z^2+\bar z^2)+\frac{1}{|z|^2}(z^2+\bar z^2)\right\} =$$

$$= \frac{1}{|z|^2}+\frac{a}{|z|^2}\left(\frac{1}{|z|^2}+1\right)(z+\bar z)+a^2\left\{1+\frac{1}{|z|^4}+\frac{(z^2+\bar z^2)}{|z|^2}\left[1+\frac{1}{|z|^2}+\frac{1}{|z|^4}\right]\right\}$$

– выражаем общий энергии бочки «Core». $|z|^2 = x^2+y^2 = (x'+x_0)^2+y'^2$

$z = x+iy = x'+x_0+iy'$, $x_0 \sim a$. $z+\bar z = 2(x'+x_0) = 2\left[\rho'\cos\varphi'+x_0\right]$

$z^2+\bar z^2 = x^2-y^2+2xiy+x^2-y^2-2ixy = 2(x^2-y^2) = 2\left[(x'+x_0)^2-y'^2\right]$

$a^2\{\dots\} = a^2\{\dots\}_{\substack{a=0\\ x'=x}} = a^2\left\{1+\frac{1}{\rho'^4}+\frac{1}{\rho'^2}2(x'^2-y'^2)\left[\frac{1}{\rho'^4}+\frac{1}{\rho'^2}+1\right]\right\}$

$$\to \int ds\, W_{ex} = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{r(a)}^{R'(\varphi')} d\rho'^2 \rho' \left|\frac{\partial}{\partial z}\ln D(z)\right|^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_r^{R'(\varphi')} d\rho' \rho' \frac{1}{|z|^2} + \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_r^{R'} d\rho' \rho' \times$$

$$\times a\,\frac{1}{|z|^2}\left(\frac{1}{|z|^2}+1\right)2\left[\rho'\cos\varphi'+x_0\right] + \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_c^{R} d\rho' \rho'\, a^2\left\{1+\frac{1}{\rho'^4}+2\cos 2\varphi'[\dots]\right\}$$

(I) (II) (III)

(I): $\int d\varphi' \int_r^{R'} d\rho' \rho' \frac{1}{y'^2+(x'+x_0)^2} = \int d\varphi' \int d\rho' \rho' \frac{1}{\rho'^2+2\rho'\cos\varphi' x_0+x_0^2} =$

$$= \int ds' \frac{1}{\rho'^2}\frac{1}{1+2\cos\varphi'\frac{x_0}{\rho'}+\frac{x_0^2}{\rho'^2}} = \int \frac{ds'}{\rho'^2}\left[1-2\cos\varphi'\frac{x_0}{\rho'}-\frac{x_0^2}{\rho'^2}+4\cos^2\varphi'\frac{x_0^2}{\rho'^2}\right]$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_r^{R'(\varphi')} d\rho' \rho' \frac{1}{\rho'^2}\left[1-2\cos\varphi'\frac{x_0}{\rho'}+\frac{x_0^2}{\rho'^2}\left(4\cos^2\varphi'-1\right)\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi' \ln\frac{R'(\varphi')}{r} - 2x_0\int_0^{2\pi} d\varphi'\cos\varphi' \int_r^{R'(\varphi')} d\rho' \frac{1}{\rho'^2} + x_0^2 \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_c^{R\to 1} d\rho' \rho' \frac{1}{\rho'^4}\left(4\cos^2\varphi'-1\right) =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi' \left[\ln\frac{-x_0\cos\varphi'+\sqrt{R^2-x_0^2\sin^2\varphi'}}{r(a)}\right] - 2x_0\int_0^{2\pi} d\varphi'\cos\varphi'\left(-\frac{1}{\rho'}\right)\Big|_r^{R'(\varphi')} +$$

$$+x_0^2\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{\rho'^3}\Big|_c^1\cdot\left[4\cdot\pi-2\pi\right] = \int_0^{2\pi} d\varphi' \ln\left[\sqrt{1-x_0^2\sin^2\varphi'}-x_0\cos\varphi'\right] - 2\pi\ln r(a) +$$

$$+2x_0\int_0^{2\pi} d\varphi'\cos\varphi'\frac{1}{R'(\varphi')} - x_0^2\,2\pi\frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{c^3}\right] - \text{1 раз зделано.}$$

Escaneado con CamScanner

Зависит ли W_{ex} от "a^4 - следующий член разложения"?

Date. 30. 10. Плотность общей энергии вне "сора"

$$\frac{\partial}{\partial z}\ln O(z) = \frac{1}{z-a} + \frac{a}{1-az} = \frac{1-az+a(z-a)}{(z-a)(1-az)} = \frac{1-a^2}{(z-a)(1-az)}$$

$$|(\bar z - a)(1-a\bar z)|^2 = [z-a)(\bar z - a)(1-az)(1-a\bar z) = [|z|^2 - a(z+\bar z) + a^2]\times$$

$$\times[1 - a(z+\bar z) + a^2|z|^2]$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}\ln O(z)\right|^2 = \left|\frac{1-a^2}{(z-a)(1-az)}\right|^2 = \frac{(1-a^2)^2}{[|z|^2 - a(z+\bar z)+a^2][1-a(z+\bar z)+a^2|z|^2]} =$$

$$= \frac{(1-a^2)^2}{|z|^2}\frac{1}{\left[1 - a\frac{z+\bar z}{|z|^2} + \frac{a^2}{|z|^2}\right]\left[1 - a(z+\bar z) + a^2|z|^2\right]} = \frac{(1-a^2)^2}{|z|^2}\left[1 + a\frac{(z+\bar z)}{|z|^2} - \frac{a^2}{|z|^2} + \right.$$

$$\left. + a^2\frac{(z+\bar z)^2}{|z|^4}\right]\left[1 + a(z+\bar z) - a^2|z|^2 + a^2(z+\bar z)^2\right] = \frac{(1-a^2)^2}{|z|^2}\left[1 + a\left\{\frac{(z+\bar z)}{|z|^2} + (z+\bar z)\right\} + \right.$$

$$\left. + a^2\left\{-\frac{1}{|z|^2} + \frac{(z+\bar z)^2}{|z|^4} - |z|^2 + (z+\bar z)^2 + \frac{(z+\bar z)^2}{|z|^2}\right\}\right] = \frac{(1-2a^2)}{|z|^2}\left[1 + a(z+\bar z)\left\{\frac{1}{|z|^2}+1\right\} + \right.$$

$$\left. + a^2\left\{-\frac{1}{|z|^2} - |z|^2 + (z+\bar z)^2\left[\frac{1}{|z|^4} + \frac{1}{|z|^2} + 1\right]\right\}\right] = \frac{1}{|z|^2}\left[1 + a(z+\bar z)\left\{\frac{1}{|z|^2}+1\right\} + \right.$$

$$\left. + a^2\left\{-2 - \frac{1}{|z|^2} - |z|^2 + (z+\bar z)^2\left[\frac{1}{|z|^4} + \frac{1}{|z|^2} + 1\right]\right\}\right]$$ – общий коэф. при "a^2" из предыдущего расчета.

Вне "сора" вихрь комплексный $\vec m$ ($w(z) = i\frac{O(z)}{|O(z)|}$, $O(z) = \frac{z-a}{1-az}$)

сдвинутое вихрей: a – вещественно т.е. сдвиг $\parallel OX$, $\vec a \parallel \vec q$

$$\begin{cases} m_x(\vec\rho) = \dfrac{-\rho\sin\varphi(1-a^2)}{\sqrt{1-2a\rho\cos\varphi+a^2\rho^2}\sqrt{\rho^2-2a\rho\cos\varphi+a^2}} \\ m_y(\vec\rho) = \dfrac{(1+a^2)\rho\cos\varphi - a(1+\rho^2)}{\sqrt{1-2a\rho\cos\varphi+a^2\rho^2}\sqrt{\rho^2-2a\rho\cos\varphi+a^2}} \end{cases}$$

Вне "сора" $\vec m(\vec\rho)$

Граница "сора" вихрей $(x-x_0)^2 + y^2 = r^2$.

$$\sqrt{1-2a\rho\cos\varphi+a^2\rho^2}\sqrt{1-2a\frac{1}{\rho}\cos\varphi+\frac{a^2}{\rho^2}} = \left|\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \dots\right| =$$

$$= \left[1 - a\rho\cos\varphi + \frac{1}{2}a^2\rho^2 + \frac{1}{8}4a^2\rho^2\cos^2\varphi\right]\left[1 - \frac{a}{\rho}\cos\varphi + \frac{1}{2}\frac{a^2}{\rho^2} + \frac{1}{8}4a^2\frac{1}{\rho^2}\cos^2\varphi\right] =$$

$$= 1 - a\cos\varphi\left[\rho + \frac{1}{\rho}\right] + \frac{a^2}{2}\left[\rho^2 + \rho^2\cos^2\varphi + \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\cos^2\varphi + 2\cos^2\varphi\right] =$$

$$= 1 - a\cos\varphi\left[\rho + \frac{1}{\rho}\right] + \frac{a^2}{2}\left[(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} + 2)\cos^2\varphi + \rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1)}\sqrt{(2)}} = \frac{1}{1 - a\cos\varphi\left[\rho+\frac{1}{\rho}\right] + \frac{a^2}{2}[\cdot]} = 1 + a\cos\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) - \frac{a^2}{2}\left[(\rho^2+\frac{1}{\rho^2}+2)\cos^2\varphi + \rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right] +$$

$$+ a^2\cos^2\varphi\,(\rho + 1/\rho)^2 = 1 + a\cos\varphi\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right) + \frac{a^2}{2}\left[\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2\cos^2\varphi - \rho^2 - \frac{1}{\rho^2}\right] =$$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$= 1 + a\cos\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) + \frac{a^2}{2}\left[2\cos^2\varphi - \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)\sin^2\varphi\right]$ — Hessian!

$m_x(\rho^2) = -\rho\sin\varphi(1-a^2)\frac{1}{\rho}\left[1 + a\cos\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) + \frac{a^2}{2}\left[2\cos^2\varphi - \left(\frac{1}{\rho^2} + \rho^2\right)\sin^2\varphi\right]\right] =$

$= -\sin\varphi\left[1 + a\cos\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) + \frac{a^2}{2}\left[2\cos^2\varphi - (\cdot)\sin^2\varphi\right] - a^2\right] =$

$= -\sin\varphi\left[1 + a\cos\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) - \frac{a^2}{2}\sin^2\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2\right]$ fine "core"

$m_y(\rho^2) = \left[\rho\cos\varphi(1+a^2) - a(1+\rho^2)\right]\frac{1}{\rho}\left[1 + a\cos\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) + \frac{a^2}{2}\left[2\cos^2\varphi - \left(\frac{1}{\rho^2} + \rho^2\right)\sin^2\varphi\right]\right]$

$= \cos\varphi + a\left[\cos^2\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) - \left(\frac{1}{\rho} + \rho\right)\right] + a^2\left[\frac{1}{2}\cos\varphi\left[2\cos^2\varphi - \left(\frac{1}{\rho^2} + \rho^2\right)\sin^2\varphi\right]\right.$

$\left. + \cos\varphi - \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2\cos\varphi\right] = \cos\varphi - a\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\sin^2\varphi +$

$+ \frac{a^2}{2}\cos\varphi\left[2\cos^2\varphi - \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)\sin^2\varphi + 2 - 2\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2\right] =$

$= \cos\varphi - a\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\sin^2\varphi - \frac{a^2}{2}\cos\varphi\left[\sin^2\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2 + 2\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)\right]$ fine "core"

$\rightarrow m_\rho(\rho^2) = m_x\cos\varphi + m_y\sin\varphi = -\sin\varphi\cos\varphi\left[1 + a\cos\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) - \frac{a^2}{2}\sin^2\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2\right]$

$+ \sin\varphi\cos\varphi - a\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\sin^2\varphi - \frac{a^2}{2}\cos\varphi\sin\varphi\left[\sin^2(\varphi)\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2 + 2\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)\right] =$

$= -a\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi\left[\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right] - \frac{a^2}{2}\cos\varphi\sin\varphi\left[-\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2\sin^2\varphi + \sin^2\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2 + \right.$

$\left. + 2\left(\rho^2 + 1/\rho^2\right)\right] =$

$= -a\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi - a^2\cos\varphi\cdot\sin\varphi\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right) = -a\sin\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) - \frac{a^2}{2}\sin 2\varphi\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)$

$m_\varphi(\rho^2) = -m_x\sin\varphi + m_y\cos\varphi = \sin^2\varphi\left[1 + a\cos\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) - \frac{a^2}{2}\sin^2\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2\right] +$

$+ \cos^2\varphi - a\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\sin^2\varphi\cos\varphi - \frac{a^2}{2}\cos^2\varphi\left[\sin^2\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2 + 2\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)\right] =$

$= 1 - \frac{a^2}{2}\left[\sin^4\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2 + \cos^2\varphi\sin^2\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2 + 2\cos^2\varphi\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)\right] =$

$= 1 - \frac{a^2}{2}\left[\sin^2\varphi\left(\rho + 1/\rho\right)^2 + 2\cos^2\varphi\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)\right] =$

$= 1 - \frac{a^2}{2}\left[\left(1/\rho + \rho\right)^2 + \cos^2\varphi\left(1/\rho - \rho\right)^2\right]$ — fine "core".

Escaneado con CamScanner

ВОЧУТЕК

Дата. 31. 10.

$m_x^2 + m_y^2 = m_\rho^2 + m_\varphi^2 = a^2 \sin^2\varphi \left(\rho + 1/\rho\right)^2 + 1 - a^2 \left[\sin^2\varphi \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2 + 2\cos^2\varphi \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)\right]$

$1 + O(a^2)$ - не существ. Должно $= 1 + O(a^3)$.

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2a\frac{1}{\rho}\cos\varphi + \frac{a^2}{\rho^2}}} = \left| \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \right| =$$

$$= \left[1 + a\rho\cos\varphi - \frac{1}{2}a^2\rho^2 + \frac{3}{8}4a^2\rho^2\cos^2\varphi\right]\left[1 + a\frac{1}{\rho}\cos\varphi - \frac{1}{2}\frac{a^2}{\rho^2} + \frac{3}{8}4a^2\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}\right] =$$

$$= 1 + a\cos\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) + \frac{a^2}{2}\left[-\rho^2 + 3\rho^2\cos^2\varphi - \frac{1}{\rho^2} + 3\cos^2\varphi\frac{1}{\rho^2} + 2\cos^2\varphi\right] =$$

$$= 1 + a\cos\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) + \frac{a^2}{2}\left[\left(3\cos^2\varphi - 1\right)\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right) + 2\cos^2\varphi\right]$$ - достаточно

$\left[3\cos^2\varphi\right]\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right) + 2\cos^2\varphi = \left(2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right) + 2\cos^2\varphi$ ок

$$m_x(\rho^*) = -\rho\sin\varphi\left(1 - a^2\right)\frac{1}{\rho}\left[1 + a\cos\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) + \frac{a^2}{2}\left\{\left(3\cos^2\varphi - 1\right)\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right) + 2\cos^2\varphi\right\}\right] =$$

$$= -\sin\varphi\left[1 + a\cos\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) + \frac{a^2}{2}\{\cdot\} - a^2\right] =$$

$$= -\sin\varphi\left[1 + a\cos\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) + \frac{a^2}{2}\left[2\cos^2\varphi\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right) - \sin^2\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2\right]\right]$$

$$m_y(\rho^*) = \left[\rho\cos\varphi - a\left(1 + \rho^2\right) + a^2\rho\cos\varphi\right]\frac{1}{\rho}\left[1 + a\cos\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) + \frac{a^2}{2}\left\{\left(3\cos^2\varphi - 1\right)\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right) + 2\cos^2\varphi\right\}\right] =$$

$$= \cos\varphi - a\sin^2\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) + a^2\left[\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos\varphi\left\{\left(3\cos^2\varphi - 1\right)\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right) + 2\cos^2\varphi\right\} -\right.$$

$$\left. - a\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2\right] = \cos\varphi - a\sin^2\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{2}a^2\cos\varphi\left[2 + \left(3\cos^2\varphi - 1\right)\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right) + 2\cos^2\varphi -\right.$$

$$\left. - 2\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2\right]$$

$$= \left[2 + \left(3\cos^2\varphi - 1\right)\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2 - 2\left(3\cos^2\varphi - 1\right) + 2\cos^2\varphi - 2\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2\right] =$$

$$= \left[\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2 3\left(\cos^2\varphi - 1\right) - 4\cos^2\varphi + 4\right] = \sin^2\varphi\left[4 - 3\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2\right]$$

$$\begin{cases} m_{y(\rho^*)} = \cos\varphi - a\sin^2\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{2}a^2\cos\varphi\sin^2\varphi\left[4 - 3\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2\right] \\ m_{x(\rho^*)} = -\sin\varphi - a\sin\varphi\cos\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) - \sin\varphi\frac{a^2}{2}\left[\left(3\cos^2\varphi - 1\right)\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2 - 4\cos^2\varphi\right] \end{cases}$$ - вне «core»

$$m_{g(\rho^*)} = -\sin\varphi\cos\varphi - a\sin\varphi\cos^2\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) - \sin\varphi\cos\varphi\frac{a^2}{2}\left[\left(3\cos^2\varphi - 1\right)\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2 - 4\cos^2\varphi\right] +$$

$$+ \sin\varphi\cos\varphi - a\sin^3\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{2}a^2\cos\varphi\sin^3\varphi\left[4 - 3\left(\rho + 1/\rho\right)^2\right] =$$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$$= -a\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi - \frac{a^2}{2}\sin\varphi\cos\varphi\left[(3\cos^2\varphi-1)\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2 - 4\cos^2\varphi - 4\sin^2\varphi + 3\sin^2\varphi\left(\rho+1/\rho\right)^2\right] = -a\sin\varphi\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right) - \frac{a^2}{2}\sin\varphi\cos\varphi\left[-4+2\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2\right] =$$

$$= -a\sin\varphi\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right) - a^2\sin\varphi\cos\varphi\left(\rho^2+\frac{1}{\rho^2}\right)$$

$$m_\varphi(\vec{\rho}) = \sin^2\varphi + a\sin^2\varphi\cos\varphi\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right) + \frac{a^2}{2}\sin^2\varphi\left[(3\cos^2\varphi-1)\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2 - 4\cos^2\varphi\right] + \cos^2\varphi - a\sin^2\varphi\cos\varphi\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{2}a^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\left[4-3\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2\right] =$$

$$= 1 + \frac{a^2}{2}\sin^2\varphi\left[(3\cos^2\varphi-1)\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2 - 4\cos^2\varphi + 4\cos^2\varphi - 3\cos^2\varphi\left(\rho+1/\rho\right)^2\right] =$$

$$= 1 + (-1)\frac{a^2}{2}\sin^2\varphi\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2$$

$$\vec{m}^2 = m_\rho^2 + m_\varphi^2 = a^2\sin^2\varphi\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2 + 1 - a^2\sin^2\varphi\left(\rho+1/\rho\right)^2 = 1 + O(a^3) - \text{верно}$$

$$\begin{cases} m_\rho(\vec{\rho}) = -a\sin\varphi\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right) - a^2\sin\varphi\cos\varphi\left(\rho^2+\frac{1}{\rho^2}\right) \\ m_\varphi(\vec{\rho}) = 1 - \frac{1}{2}a^2\sin^2\varphi\left(\rho+1/\rho\right)^2 \end{cases}$$

– все "core" с членом a^2

~~Теперь~~ Чтобы все "core" с членом a^2 имело $1/\Sigma$ меньше градиентов.

$$\sum_k (\nabla m_k)^2 = \left(\frac{\partial m_\rho}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left[\left(\frac{\partial m_\rho}{\partial\varphi} - m_\varphi\right)^2 + \left(\frac{\partial m_\varphi}{\partial\varphi} + m_\rho\right)^2\right] =$$

$$= a^2\sin^2\varphi\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left[\left\{-a\cos\varphi\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right) - a^2\cos2\varphi\left(\rho^2+\frac{1}{\rho^2}\right) - 1 + \frac{a^2}{2}\sin^2\varphi\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2\right\}^2 + \left\{-\frac{1}{2}a^2\underbrace{\frac{\partial}{\partial\varphi}}_{\text{не дает вклада}}\sin^2\varphi\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2 + m_\rho\right\}^2\right] = a^2\sin^2\varphi\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}a^2\sin^2\varphi\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{\rho^2}\left[a^2\cos^2\varphi\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2 + 1 + 2a\cos\varphi\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right) + 2a^2\cos2\varphi\left(\rho^2+\frac{1}{\rho^2}\right) - a^2\sin^2\varphi\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2\right]$$

$$= a^2\sin^2\varphi\left[\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{\rho^2}\right)^2\right] + \frac{1}{\rho^2}\left[1 + 2a\cos\varphi\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right) + a^2\left\{\left(\rho+1/\rho\right)^2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\left(\rho+1/\rho\right)^2 + 2\cos2\varphi\left(\rho^2+\frac{1}{\rho^2}\right)\right\}\right] =$$

$$= 2a^2\sin^2\varphi\left[1+\frac{1}{\rho^4}\right] + \frac{1}{\rho^2}\left[1 + 2a\cos\varphi\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right) + a^2\cos2\varphi\left\{\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2 + 2\left(\rho^2+\frac{1}{\rho^2}\right)\right\}\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho^2} + 2a\cos\varphi\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho^3}\right) + a^2\left[2\sin^2\varphi\left(1+\frac{1}{\rho^4}\right) + \cos2\varphi\left(3+\frac{3}{\rho^4}+\frac{2}{\rho^2}\right)\right]$$

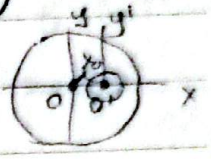
Escaneado con CamScanner

Date.

$$\sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = \frac{1}{\rho^2} + 2a\cos\varphi\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho^3}\right) + a^2\left[\left(1+\frac{1}{\rho^4}\right)(4\cos^2\varphi-1)+\frac{2}{\rho^2}\cos 2\varphi\right]$$

сложно проверить через $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$, ведь тогда достаточно точности "на" в m_x, m_y — нет, не достаточно.

$$\begin{cases} m_x(\vec\rho) = -\frac{y}{\rho} - a\frac{xy}{\rho^2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{y}{\rho} - axy\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho^3}\right) + O(a^2) \\ m_y(\vec\rho) = \frac{x}{\rho} - ay^2\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho^3}\right) + O(a^2) \end{cases}$$



граница "сота" $(x-x_0)^2+y^2=r^2$ или граница дока в $O'(x'y')$ координатах $R'(\varphi') = -x_0\cos\varphi' + \sqrt{1-x_0^2\sin^2\varphi'}$, $R=1$.

$$\int_{\text{"сота"}} ds \sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{r(a)}^{R'(\varphi')} d\rho' \rho' \sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2$$, но $\sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2$ по дока в $O(xy)$-координатах.

Предположим $x_0 < r$ (т.е. центр дока осталася в "сота").

Это эквив. $a\frac{1-c^2}{1-c^2a^2} < c\frac{1-a^2}{1-c^2a^2}$, $a(1-c^2) < c(1-a^2)$, $a>0$,

что выполняется при $0<a<c$. тогда $\int d\rho$ можно в xy-координатах и пределы интеграла по ρ есть $\rho_+(\varphi)$ как 23/X.

$$\int_{\text{"сота"}} ds \sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\rho_+(\varphi)}^1 d\rho\rho \sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\rho_+}^1 \frac{d\rho}{\rho^2} + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\rho_+(\varphi)}^1 d\rho\rho\, 2a\cos\varphi\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho^3}\right) +$$

$$+ a^2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_c^1 d\rho\rho\left[\left(1+\frac{1}{\rho^4}\right)(4\cos^2\varphi-1)+\frac{2}{\rho^2}\cos 2\varphi\right] = \quad \text{— см. с 23/X}$$

$$= (2\pi) - \int_0^{2\pi} d\varphi \ln\rho_+(\varphi) + 2a\int_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi \int_{\rho_+(\varphi)}^1 d\rho\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right) + \pi\int_c^1 d\rho\rho a^2\left[\left(1+\frac{1}{\rho^4}\right)[4\cdot 1 - 2]\right] =$$

$$= -2\pi\left[\ln c + a^2(c^2-1)\right] + 2a\int_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi \int_{\rho_+(\varphi)}^1 d\rho\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right) + 2\pi a^2\int_c^1 d\rho\rho\left(1+\frac{1}{\rho^4}\right)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi \int_{\rho_+(\varphi)}^1 d\rho f(\rho) = \int_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi\left[F(1)-F(\rho_+(\varphi))\right] = -\int_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi F[\rho_+(\varphi)] = \left(\rho_+(\varphi) = c + a(1-c^2)\cos\varphi + O(a^2)\right)$$

$$= -\int d\varphi\cos\varphi\left[F(c) + a(1-c^2)\cos\varphi\left.\frac{dF(\rho)}{d\rho}\right|_{\rho=c}\right] = -\int_0^{2\pi} d\varphi\, a(1-c^2)\cos^2\varphi f(c) =$$

$$= -\pi a(1-c^2)f(c) \text{ до членов } \sim a.$$

$$\int_{\text{"сота"}} ds \sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = -2\pi\ln c - 2\pi a^2(c^2-1) + 2a(-\pi)a(1-c^2)\left(1+\frac{1}{c^2}\right) +$$

$$+ 2\pi a^2\left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}\right]_c^1 = -2\pi\ln c - 2\pi a^2(c^2-1) - 2\pi a^2(1-c^2)\left(1+\frac{1}{c^2}\right) +$$

(этот член неверен из-за $\ln\rho_+$ — неверного)

$$+ 2\pi a^2\left[\frac{c^2}{2} - \frac{1}{2c^2}\right] = -2\pi\ln c - 2\pi a^2(c^2-1) - 3\pi a^2\frac{1}{c^2}(1-c^4) =$$

Это неверно, см. с 23

$$= -2\pi\ln c - \pi a^2\left[\frac{3}{c^2} - 2 - c^2\right]$$ — вот так да! $[\dots] > 0$, т.к. $c \ll 1$.

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$$m_\beta(\vec{r}) = m_x\cos\varphi + m_y\sin\varphi = \frac{-\rho\sin\varphi\cos\varphi(1-a^2) + \rho\sin\varphi\cos\varphi(1+a^2) - a\sin\varphi}{\sqrt{1-2a\rho\cos\varphi+\rho^2a^2}\sqrt{\rho^2-2a\rho\cos\varphi+a^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1)}\sqrt{(2)}}\left[2a^2\rho\sin\varphi\cos\varphi - a\sin\varphi(1+\rho^2)\right] = \frac{a\sin\varphi\left[2\rho a\cos\varphi - (1+\rho^2)\right]}{\sqrt{1-2a\rho\cos\varphi+\rho^2a^2}\sqrt{\rho^2-2a\rho\cos\varphi+a^2}}$$

С точн. до a^2: $m_\beta = \frac{a}{\rho}\sin\varphi\left[2\rho a\cos\varphi - (1+\rho^2)\right]\left[1+a\rho\cos\varphi\right]\left[1+\frac{a}{\rho}\cos\varphi\right] =$

$= a\sin\varphi\left[2a\cos\varphi - (\rho+1/\rho)\right]\left[1+a(\rho+\frac{1}{\rho})\cos\varphi\right] = a\sin\varphi\left[-(\rho+\frac{1}{\rho}) + \right.$

$\left. + 2a\cos\varphi - (\rho+1/\rho)^2 a\cos\varphi\right] = a\sin\varphi\left[-(\rho+\frac{1}{\rho}) - a(\rho^2+\frac{1}{\rho^2})\cos\varphi\right] =$

$= -a\sin\varphi(\rho+\frac{1}{\rho}) - a^2\sin\varphi\cos\varphi(\rho^2+1/\rho^2)$ – верно.

→ Т. е. компоненты m_β, m_φ на ∂_ρ сф. верны с точностью до a^2.

$\ln\rho_+(\varphi) = \ln\left[c+\dots\right]$. Была ошибка в $\rho_+(\varphi)$ от 23/X. Исправим.

Надо $\bar{r}^2(a) = \frac{c^2-a^2}{1-c^2a^2} = (c^2-a^2)(1+c^2a^2) = c^2-a^2+a^2c^4 = c^2+a^2(c^4-1)$

$$\bar{r} = \sqrt{c^2+a^2(c^4-1)} = c\sqrt{1+\frac{a^2}{c^2}(c^4-1)} = c\left\{1+\frac{a^2}{2c^2}(c^4-1)\right\}$$

$$\rho_+(\varphi) = a(1-c^2)\cos\varphi + c\left\{1+\frac{a^2}{2c^2}(c^4-1)\right\} + a^2\frac{(1-c^2)^2}{2c}\cos^2\varphi =$$

$$= c + a(1-c^2)\cos\varphi + \frac{a^2}{2c}\left[(c^4-1) + (1-c^2)^2\cos^2\varphi\right] =$$

$$= c + a(1-c^2)\cos\varphi + \frac{a^2}{2c}(c^2-1)\left[c^2(1+\cos^2\varphi) + \sin^2\varphi\right]$$

$$\ln\rho_+(\varphi) = \ln c + \ln\left[1+\frac{a}{c}(1-c^2)\cos\varphi + \frac{a^2}{2c^2}(c^2-1)\left\{c^2(1+\cos^2\varphi)+\sin^2\varphi\right\}\right] =$$

$$= \ln c + \frac{a}{c}(1-c^2)\cos\varphi + \frac{a^2}{2c^2}(c^2-1)\left\{c^2(1+\cos^2\varphi)+\sin^2\varphi\right\} -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{a^2}{c^2}(1-c^2)^2\cos^2\varphi = \ln c + \frac{a}{c}(1-c^2)\cos\varphi + \frac{a^2}{2c^2}\left[c^4-1+(1-c^2)\cos^2\varphi - (1-c^2)^2\right.$$

$$= \ln c + \frac{a}{c}(1-c^2)\cos\varphi + \frac{1}{2}\frac{a^2}{c^2}(c^4-1)$$

$\int_0^{2\pi}$. Далее $\rho_+(\varphi)$ зависимость в a^2-поправке только явно на $\partial\rho$ $\ln\rho_+(\varphi)$

Верно: $-\int_0^{2\pi} d\varphi \ln\rho_+(\varphi) = -2\pi\ln c - \pi a^2\frac{1}{c^2}(c^4-1)$

→ $\int dS \sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = -2\pi\ln c - \pi a^2\frac{1}{c^2}(c^4-1) - 2\pi a^2\frac{(1-c^4)}{c^2} - \pi a^2\frac{1}{c^2}(c^4-1) =$

(вне „core")

$= -2\pi\ln c + O(a^4)$, т. е. W_{ex} (вне „core") не изменяется при $\frac{z-a}{1-az} = \Phi(z)$ преобразовании „вихря" с точностью до членов $\sim a^2$.

К членам с помощью МАТН поправки, W_{ex} („core") также не изменяется с точн. до a^2 и W_{ex} (вне „core") и W_{ex} („core") не изменяются с точностью до a^4.

Escaneado con CamScanner

Date.

Расчет W_{ex} (core"). Ошибка предыдущего расчета 21-23/Ż не только в использовании неверного $\rho_{+}(\omega)$ (как вне core", а с ее другими) но и недостаточности линейного по a^4 разложения комплекса m^2 или $W(z)$ - функции.

Для сферы „core": $W(z) = \frac{i}{c}\frac{z-a}{1-az}$; $\overline{W(z)} = -\frac{i}{c}\frac{\bar{z}-a}{1-a\bar{z}}$

$\frac{\partial W(z)}{\partial z} = \frac{i}{c}\frac{(1-az)-(z-a)(-a)}{(1-az)^2} = \frac{i}{c}\frac{(1-a^2)}{(1-az)^2}$; $\frac{\partial \overline{W}}{\partial \bar{z}} = -\frac{i}{c}\frac{(1-a^2)}{(1-a\bar{z})^2}$

Метрика Фи. Ун.

$$\frac{1}{\omega^2_{0L}} W_{ex} = \frac{1}{(1+|w|^2)^2}\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial \overline{w}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{(1+|w|^2)^2}\frac{1}{c^2}\frac{(1-a^2)^2}{(1-az)^2(1-a\bar{z})^2} =$$

$$= \frac{(1-a^2)^2}{c^2}\frac{1}{(1+|w|^2)^2}\frac{1}{\left[1-a(z+\bar{z})+a^2|z|^2\right]^2} = \frac{(1-a^2)^2}{c^2}\frac{1}{(1+|w|^2)^2},$$

$$\cdot\left[1+2a(z+\bar{z})-2a^2|z|^2+3a^2(z+\bar{z})^2\right] = \frac{(1-a^2)^2}{c^2}\frac{1}{(1+|w|^2)^2}\cdot$$

$$\cdot\left[1+2a(z+\bar{z})+4a^2|z|^2+3a^2(z^2+\bar{z}^2)\right]$$

Более двумя членами отмеч. ф-ле расчета 24/Ż.

См. 28/Ż, а показан из общих соображений, что $W_{ex} \neq f(a)$ (только для Conform. mode (self-to-self анализ. $z'=0(z)$))

Date. 01. 11. 2000

План работы на ближайшее время (см. 5/IX):

1) Переделать и написать ст. по Ка в Phys. Lett. A
2) Подготовить статью с Усовым по s-d и inhom dots
3) Подготовить ст. со Славяновым в PRB по SW в двух
4) Написать ст. APL с поправками по Y, Нан-vortex
5) Начать расчет SW на основе vortex state и колебания вортекс (с поправками и Сидоровым)
6) Рассчитать по-Усовски $(\delta-1)$ vortex states в рамках двух связ. МО
7) Подготовить ст. с Новосадом (и Ивановым) по rigid-vortex model
8) Продвинуть ст. с Лобанским по NMO of vortex dots
9) Узнать о конференции в KIAS, создать Res. Proposal and Res. Fund, известить о возвр. мед. страховки и пенс. взносов
10) Попытаться открыть Visa в USA и купить кораблик Билеам
11) Известить и пробивать ситуацию с CFP, Порто.
12) Написать функцию APL по MnAs.
13) Отправить ге сигу. Копии Visa и подгот. доклад на семинар по „Vortex" и
14) Послать тех для MMM и решить с П., Ю., А. travel и квартиры

2-7/XI переделка статьи Ph. lett. A. по inhom. dots. Письмо редактору.

7/XI Написание теор.-эксп. статьи с Новосадом по „vortex" и в тех. поле для APL. File Nov-MMM.

$$I_m(s) = 2\int_0^{\pi} d\varphi \frac{\sin\varphi \sin m\varphi}{\sqrt{1-2s\cos\varphi+s^2}} = ?$$ вычислить

$$1-2s\cos\varphi+s^2 = 1-2s\left[1-2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]+s^2 = (1-s)^2+4s\sin^2\frac{\varphi}{2} = (1+s)^2-4s\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$1-2s\cos\varphi+s^2 = 2s\left(\frac{1+s^2}{2s}-\cos\varphi\right) = \left|s=e^{-t},\ t\geq 0\right| = 2s(\operatorname{ch}t-\cos\varphi)$$

$$2\sin\varphi\sin m\varphi = \cos(m-1)\varphi - \cos(m+1)\varphi, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-2s\cos\varphi+s^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P_k(\cos\varphi),\ s<1$$

Vortex annihilation field

$$I_n(s) = 2\int_0^{\pi} d\varphi \sin\varphi \sum_{n=0}^{m} s^n P_n(\cos\varphi) = 2\sum_{n=0}^{m} s^n \int_0^{\pi} d\varphi \sin\varphi P_n(\cos\varphi)$$

$$\int_0^{\pi} d\varphi \sin\varphi P_n(\cos\varphi), \quad m = p+1$$

Han - Vortex

Дно-нение к расчету h_{an} of vortex on ПВК

Целевая функция дана в нач. поле:

$$W(s) = F_1(s) - h F_2(s), \quad \frac{\partial W(s)}{\partial s} = F_1'(s) - h F_2'(s) = 0$$

необходимое условие min дает $h = \frac{F_1'(s)}{F_2'(s)}$ — зависимость равновесия $s_0 = s_0(h)$

$\left.\frac{\partial^2 W(s)}{\partial s^2}\right|_{s=s_0} > 0$ $W_{ss}''(s_0(h)) = 0$ есть уравнение на которое устанавливается решение $s_0 = s_0(h)$.

$$W_{ss}'' = \frac{\partial^2 W(s)}{\partial s^2} = F_1''(s) - h F_2''(s) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} h = \frac{F_1'(s)}{F_2'(s)} \\ h = \frac{F_1''(s)}{F_2''(s)} \end{array} \right\} \text{ — Система}$$

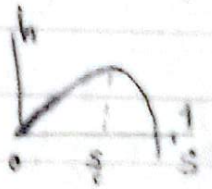
$(s = s_0(h)$ здесь$)$

Условия $\frac{\partial W}{\partial s} = 0$, $\left.\frac{\partial^2 W}{\partial s^2}\right|_{s_0(h)} = 0$ для определения точки соответствующей вихрю (h_{an}).

Исчисление и программирование APL-vortex стали с Новгорода. 8-3/XI

$$W(s) = F_1(s) - h F_2(s), \text{ тогда } h(s) = \frac{F_1'(s)}{F_2'(s)} \quad 10/XI$$

(расчет)

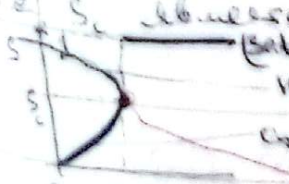


Условие $\frac{F_1'(s)}{F_2'(s)} = \frac{F_1''(s)}{F_2''(s)}$ или $F_1'(s)F_2''(s) - F_2'(s)F_1''(s) = 0$

Определяет s_c. Тогда $h(s_c) = h_c$ — и есть граница существования вихря.

$h(s) = \frac{F_1'(s)}{F_2'(s)}$, $\frac{dh(s)}{ds} = \frac{[F_1''(s)F_2'(s) - F_1'(s)F_2''(s)]}{[F_2'(s)]^2}$, т.е. $h'(s_0) = 0$,

где s_c является точкой экстремума (max) функции $h(s)$.



(saturation)

неотр. часть зависимости $s_0(h)$ — равновесное состояние

Вихря не н.р.

наиболее полно (граница) существует вихрь.

$s_0(h)$ — (нотация) состояние поля интерференции $= h(s)$

Для вихря

L:	(10)	(20)	L = 15 mm (30)	(8)	(60)
K	0,1	0,05	0,033	0,2	0,15
h (расч)	0,067	0,040	0,029	0,111	0,091
s:	0,52	0,515	0,515	0,510	0,510

Date. 12 · 11 ·

χ_{in} - conformal model и h_{an} - conf. model

12/XI В обозначениях расчета с к. магнитным ($S \to a$, $\beta \to g$) ($H \parallel -0_y$, $a>0$ h_0):

$W(a,g,h) = E(a,g) + M_y(a)h$ - полная энергия $W(h=0)$, см. 11/IV

$h_{an}(g) = -\left.\frac{(dE(a,g)/da)}{(dM_y/da)}\right|_{a=a_c(g)}$, $a_c(g)$ из ур. на max $h(a,g)$ из $\frac{dh(a,g)}{da}=0$

поле потери стабильности неприводимого ($a \neq 1$, vortex cleavage) решения

Насыщение (hem. dot) Соответствует $a=1$ (FD state)

Поле равенства энергий h_0 опр. из $W(a,g,h) = W(1,g,h)$, где

$a = a_0(g,h)$ - равновесное значение a из ур. $\frac{\partial W(a,g,h)}{\partial a} = 0$

$a_0(g,h)$ - расщ. функция h.

h_0 (поле равенства энергий vortex и hem. dot) $< h_{an}$ при том же g.

$a_0(g,h)$ опред. из $h = -\frac{\partial E(a,g)/\partial a}{\partial M_y/\partial a} = F(a,g)$



$a_0(g,h_0) < a_c(g) \approx 0{,}51 \div 0{,}52$ ($h_0 < h_{an}$) - можно даже квадратичное приближение по a" может оказаться разумным для нахожд. h_0

Ур. на h_0: $E(a_0,g) + M_y(a_0)h = E(1,g) - h$, т.к. $M_y(a=1) = -1$ (насыщение)

Построим $W(a,g,h_1(a))$ и сравним с $W(1,g,h_1(a))$.

Корень a_{c0} ур-я $W(a,g,h_1(a)) = W(1,g,h_1(a))$ и дает $h_0 = h_1(a_{c0})$.

В квадратичном приближении (см. 11/IV кв. прибл. для rigid vortex):

Vortex $W(a_0,g,h) = W(a=0,g,h) - \frac{1}{2}\chi h^2 = E(0,g) - \frac{\alpha}{2}h^2$, χ - наклон биссектрисы

Нить $W(1,g,h) = E(1,g) - h$. $\Delta = W_{2\,нить}(h=0) - W_{2\,vort}(h=0) = E(1,g) - E(0,g)$

поле равенства энергий фаз h_0 из ур.: $E(0) - \frac{1}{2}\chi h^2 = E(1) - h$

$\frac{1}{2}\chi h^2 - h + \Delta = 0 \to h_0 = \frac{1}{\chi}\left[1 - \sqrt{1 - 2\chi\Delta}\right]$, $\Delta = 0$ задает $R_c(L)$.

$(\chi/\chi) = 0$ задает предел R - диам. нити

дальше h_0 и χ.

Это уравнение я получил с $\chi = \frac{1}{2a(\beta,R)}$ еще 11/IV и вычитал в ст. с Новосадом (мини и APL).

нужно $\Delta = E(1,g) - E(0,g)$. $\frac{1}{4\pi h_1^2 V_d} W(a) = w(0) + \frac{1}{2}w''(0)a^2 - \left(\frac{4}{3}\right)ah$, $h = H/\sigma M_s$

$E(a,g) = E(0,g) + 2a^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(\beta k) J_1^2(k)$ - в главном приближении квадратичная объемная и поверхностная энергии

$w''(0) = 4\int \frac{dk}{k} f(\beta k) J_1^2(k) = 4N_x(\beta)$

$\chi = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{1}{w''(0)} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{1}{4N_x} = \left(\frac{4}{3}\right)\frac{1}{N_x}$ - в модели с к. магнитным (conformal model)

Или $\chi^{нет} = \frac{4}{3}\chi^{rigid\,v.}$ - наклон биссектрисы

Финиш. Все в модели "rigid vortex" $\chi = \frac{4\sqrt{3}}{2\alpha(\beta,R)} \frac{1}{\left[N_x(\beta) - \frac{1}{4\pi}\left(\frac{R\cdot\sigma}{K}\right)^2\right]} \approx \frac{1}{N_x}$ для $K \gg R\cdot\sigma$

Escaneado con CamScanner

$W_m(a)$ – conform. model

Date.

$h_0 = \frac{5}{6}\cdot 0{,}120$ – после h_0 равновесная энергия а-частицы = ном. эрг.

(0,67)	(10)	(15)	(20)	(25)	(30)	(40)	(50)	(2,5) (4)
0,15	0,1	0,067	0,05	0,04	0,033	0,025	0,020	0,4 0,25
(0,198)	0,157	0,141	0,128	0,121	0,114	0,108	0,100	0,28 0,09
0,033 (0,048)	0,028	0,023	0,019	0,016	0,014	0,011	$9{,}5\cdot10^{-3}$	0,018 0,0

это сеть с мет.-кривой по к Сеть $W(h=0)$ частота отсчета в эр на h_0.

$\Delta = W_{hom}(h=0) - W_{vort}(h=0)$ на пред. стр. записана неверно

ведь $W_m\left(\begin{smallmatrix}a=0\\h=0\end{smallmatrix}\right) \neq 0$. $\frac{1}{4\pi M_s^2 V_d} W_m(h) = \frac{c^3}{\beta}\left[g_4(0) - g_4\left(\frac{\beta}{c}\right)\right]$

$\frac{1}{4\pi M_s^2 V_d} W^{Mer}(a_0, h) = W_{Mer}(h=0) - \frac{1}{2}\chi h^2$, $\chi = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{1}{4N_x}$ – в Мет. модели, с $h = H/4\pi M_s$

$\frac{1}{M_s^2 V_d} W(a_0, h') = w(h'=0) - \frac{1}{2}\chi_{in} h'^2$, $h' = H/M_s$ – в rigid v. – модели

$\frac{1}{M_s^2 V_d} W^{Mer}(a_0, h) = w(h'=0) - \frac{1}{2}\left[\frac{16}{9}\frac{1}{4N_x}\right]\cdot 4\pi \frac{H^2}{(4\pi)^2 M_s^2} = (\dots) - \frac{1}{2}\left[\frac{4}{9}\frac{1}{4\pi N_x}\right]\left(\frac{H}{M_s}\right)^2$

$\frac{1}{M_s^2 V_d} W_{rigid}(a_0, h) = w(h'=0) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4\pi N_x - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2}\right]\frac{H^2}{M_s^2} = (\dots) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4\pi N_x - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2}\right]\left(\frac{H}{M_s}\right)^2$

Нормальные $\chi = \frac{\partial M}{\partial H}$; $\frac{1}{4\pi N_x - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2}$ для rigid vort. и $\left(\frac{4}{9}\right)\frac{1}{4\pi N_x}$ – для модели с мет. кривой) разных моделей.

Выходит $\chi^{Mer} < \chi^{rigid v.}$ и в малых H ($H \ll M_s$) в квадрат. модели равновесная энергия rigid – модел сильно меньше (<) энергии Мет. – модел. (?)

Мет. модель $a_0 = \frac{4}{3}\frac{1}{w''(0)} h$, rigid mode $S_0 = \frac{1}{2a(\beta R)} h' = \frac{1}{4\pi N_x - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2}\left(\frac{H}{M_s}\right)$

$a_0 = \frac{4}{3}\frac{1}{4N_x}\frac{H}{4\pi M_s} = \frac{1}{3}\frac{1}{4\pi N_x}\left(\frac{H}{M_s}\right)$ и при одинаковых (H/M_s)

$a_0 \approx \frac{1}{3} S_0$ – вихрь модели Мет. сильно меньше, чем rigid модел.

$\frac{1}{V_d M_s^2} W_m^{бок} = (4\pi) a^2 2N_x(\beta)$ при $a \ll 1$ квадратич. приближение.

А вообще $E(a,g) = \frac{1}{4\pi M_s^2 V_d} W_m^{бок} = \frac{1}{2}\left[a^2(2-a^2)^2 I_1(g) + (1-a^2)^2 \sum_{\mu=2} a^{2\mu} I_\mu(g)\right]$

где $I_\mu(g) = \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(kg) J_\mu^2(k)$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x}(1-e^{-x})$

Предыдущ. козф. при a^2 в разложении $E(a,g) = E(0) + \frac{1}{2} 2^2 I_1(g) a^2$.

Поверхн. заряды согласно 31/I $(\vec{m}\cdot\vec{n})|_{\rho=R} = -a\sin\varphi\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\Big|_{\rho=1} + O(a^2) = \underline{-2a\sin\varphi} + O(a^2)$

Тогда как в модели rigid v. согласно 7/IV (в корд. цилиндр.) $(\vec{m}\cdot\vec{n}) = \frac{s\cdot\sin\varphi}{\sqrt{1+2s\cos\varphi+s^2}} = \underline{s\cdot\sin\varphi} + O(s^2)$

Энергия бок. зарядов $\sim (\vec{m}\cdot\vec{n})^2$ для Мет. модели $\frac{s^2}{R^2}$ – выходит в $2^2 = 4$ раза больше.

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$$\frac{1}{4\pi M_s^2 V_a} W(a,h) = \frac{1}{4\pi M_s^2 V_a} W(a=0) + E(a,g) - \frac{4}{3} a h, \quad h = H/(4\pi M_s)$$

Энергия системы (энергия Гиббса) $\frac{1}{4\pi M_s^2 V_a} W(a=0) = w_{vol}(h,R) = \frac{c^3}{\beta}\left[g_u(0) - g_u(\beta/c)\right] + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \left[2 - \ln\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\right]$

$c = b/R$ – приведенный радиус. R_m, R_0 – радиусы от β – сферическая

$c = \frac{b}{R} = \beta\xi$, $\xi = \frac{b}{L}$. $c = \left(\frac{R_0}{R}\right)\left(\frac{b}{R_0}\right) = \left(\frac{R_0}{R}\right)\delta$, $\delta = b/R_0$ найдено 26/Σ.

$$\frac{1}{4\pi M_s^2 V_a} W(a=0) = \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 \delta^3 \frac{1}{\beta}\left[g_u(0) - g_u\left(\beta \frac{R}{R_0}\delta\right)\right] + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \left[2 - \ln\left(\frac{R_0}{R}\delta\right)\right]$$

Ткач Хобоскар и Schneider h/m $L = const$ и R изменяющиеся.

Так что будем искать $\xi = b/L$ как $2b/\Sigma$:

$$\frac{1}{4\pi M_s^2 V_a} W(a=0) = \beta^2 \left\{ \xi^3 \left[g_u(0) - g_u(1/\xi)\right] - \frac{1}{4\pi}\left(\frac{R_0}{L}\right)^2 \ln \xi \right\} + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \left[2 - \ln\beta\right]$$

Работа $\xi = F(b/R_0)$ найдена 26/Σ. $L/R_0 = const$ и $\xi = const$ h/m $L = const$ (удобно).

$$\left(R_0/R\right) = \frac{R_0 L}{L R} = \beta \frac{R_0}{L} \rightarrow \frac{1}{(\cdot)} W(a=0) = \beta^2 \xi^3 [\cdot] + \frac{\beta^2}{4\pi}\left[-\left(\frac{R_0}{L}\right)^2 \ln \xi + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{R_0}{L}\right)^2 [2 - \ln\beta]\right] = \beta^2 \left[\xi^3 [\cdot] + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{R_0}{L}\right)^2 \left\{2 - \ln(\beta\xi)\right\}\right]$$

$$\frac{1}{4\pi M_s^2 V_a} W(a=0) = \beta^2 \left[\xi^3 \left[g_u(0) - g_u(1/\xi)\right] + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{R_0}{L}\right)^2 \left\{2 - \ln(\beta\xi)\right\}\right] = W_{вол}(h=0)$$

– энергия несжимаемого вихря Ткач в удобных переменных.

1) $\frac{L}{R_0} = \frac{15\,nm}{18\,nm} = \frac{5}{6}$ для Schneider; 2) $\frac{L}{R_0} = \frac{20}{18}, \frac{40}{18}, \frac{60}{18}$ для ткач. Хобоскар.

$$W_{hom}(h=0) = \frac{1}{2} N_x(\beta) \quad . \quad \frac{1}{4\pi M_s^2 V_a} W_{hom}(h) = \frac{1}{2} N_x(\beta) - h$$

Получаем вторые $\Delta = W_{hom}(h=0) - W_{вол}(h=0) = \Delta(\beta)$ h/m $L = const$ – зависит лишь от $\beta = L/R$.

→ Для ткач. Schneider $\frac{L}{R_0} = 5/6$ и $\xi = 0{,}920$.

$$\frac{1}{4\pi M_s^2 V_a} W(a,h) = W_{вол}(h=0) + E(a,g) + M_y(a)/h \quad \text{сравн. с } W_{hom}(h) = \frac{1}{2} N_x(\beta) - h$$

$E(1,\beta) = \frac{1}{2} N_x(\beta)$

Ур-е на h_0: $W_{вол}(h=0) + E(a,g) + M_y(a)/h = E(1,\beta) - h$, где $a = a_0(\beta,h)$ – равновесн. Сильно

→ метод его решения как на пред. странице (2).

Рассчитан h_0 в табл. на пред. странице.

Для сравнения $h_0(g)$ с другими теоретическими кривыми $\frac{L}{R_0}$ и ξ б

$g = \beta$ $W_{вол}(h=0)$ – энергия несжимаемого вихря

W_m Conformal model

Date. 13.11.

13/XI

Рассмотрим W^{box}_m модель с "мягкими" (conf. model)

$(\vec{m}\cdot\vec{n}) = m_\rho = m_x\cos\varphi + m_y\sin\varphi$, $m_x + i m_y = W(z)$ - для "core"

$(\vec{m}\cdot\vec{n})$ - проекция в центре дома

для "core" $W(z) = \dfrac{i}{|\Theta(z)|}\dfrac{(z-a)}{1-az}$ и $m_y = \operatorname{Im} W(z)$, $m_x = \operatorname{Re} W(z)$

$\Theta(z) = \dfrac{z-a}{1-az}$

$$W(z) = \frac{i}{|\Theta(z)|}\frac{(z-a)(1-a\bar z)}{(1-az)(1-a\bar z)} = i\frac{1}{\sqrt{\frac{(z-a)(\bar z-a)}{(1-az)(1-a\bar z)}}}\frac{(z-a)(1-a\bar z)}{(1-az)(1-a\bar z)} =$$

$$= i\frac{(z-a)(1-a\bar z)}{\sqrt{(z-a)(\bar z-a)}\sqrt{(1-az)(1-a\bar z)}} = i\frac{(z-a-a|z|^2+a^2\bar z)}{\sqrt{|z|^2-a(z+\bar z)+a^2}\sqrt{1-a(z+\bar z)+a^2|z|^2}} =$$

$$= i\frac{(x+iy-a+a^2(x-iy)-a\rho^2)}{\sqrt{(1)}\sqrt{(2)}} = \frac{ix-ia+ia^2x-ia\rho^2-y+a^2y}{\sqrt{(1)}\sqrt{(2)}}$$

$$\begin{cases} m_x = \operatorname{Re} W(z) = \dfrac{y(a^2-1)}{\sqrt{(1)}\sqrt{(2)}} \\ m_y = \operatorname{Im} W(z) = \dfrac{x-a+a^2x-a\rho^2}{\sqrt{(1)}\sqrt{(2)}} = \dfrac{(1+a^2)x-a(1+\rho^2)}{\sqrt{(1)}\sqrt{(2)}} \end{cases} \quad \begin{matrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{matrix}$$

это совпадает с $m_{x,y}$ на 35/X

На границе дома $\sqrt{(1)}\sqrt{(2)} = \sqrt{\rho^2-2a\rho\cos\varphi+a^2}\sqrt{1-2a\rho\cos\varphi+a^2\rho^2} =$

$= \left|\begin{matrix}\rho=R\\ \rho=1\end{matrix}\text{ в безразм. перем.}\right| = \sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2} = 1-2a\cos\varphi+a^2$ -

- знаменатель (в отличие от случая "rigid" vortex model) упрощается, это позволяет взять $\int d\varphi'(\dots)$ в виде разложения по a^n.

$$(\vec{m}\cdot\vec{n}) = m_\rho = \frac{1}{\sqrt{(1)}\sqrt{2}}\left[(a^2-1)\rho\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\left((1+a^2)\rho\cos\varphi - a(1+\rho^2)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1)}\sqrt{(2)}}\left[2a^2\rho\sin\varphi\cos\varphi - a\sin\varphi(1+\rho^2)\right] = \frac{a\sin\varphi\left[-(1+\rho^2)+2a\rho\cos\varphi\right]}{\sqrt{(1)}\sqrt{(2)}}$$

$$(\vec{m}\cdot\vec{n})_{\text{на пов. дома}} = m_\rho\Big|_{\rho=1} = \frac{2a\sin\varphi\,[a\cos\varphi-1]}{1-2a\cos\varphi+a^2}$$ — в мех.-модели. ($\vec{n}\,\|\,\vec{y}$, a - безразм.)

При $a=1$ $(\vec{m}\cdot\vec{n}) = \dfrac{2a\sin\varphi\,[\cos\varphi-1]}{2-2\cos\varphi} = -\sin\varphi$ - совпад. с hom. дом.

В модели "rigid" vortex $(\vec{m}\cdot\vec{n})_{\rho=R} = \dfrac{-S\cdot\sin\varphi}{\sqrt{1-2S\cos\varphi+S^2}}$ $\left(\begin{matrix}\text{для удобства}\\ S\to -S\\ \text{на графике с 7/X}\end{matrix}\right)$ - выглядит сложнее чем $\sqrt{(\cdot)}$.

$S_{max} = \frac{1}{R}(R-B) = 1-\frac{B}{R}$, при больших S "core" выходит на поверхность дома и расчет $(\vec{m}\cdot\vec{n})$ надо изменить.

Если бы же $S\to 1$, то $(\vec{m}\cdot\vec{n})_{\rho=R} \to \dfrac{-\sin\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\varphi)}} = -\cos\frac{\varphi}{2}$, что сильно отличается от hom. дома.

~~Т.о. возможно, "rigid" vortex может существовать при $S<1$ (ест. $a_c = 0.52$) и по энергии сравнится с hom. dot при еще меньших S. Т. е. $S\to 1$ может не наблюдаться~~

W_{ex} - rigid vortex и H_{an}

Date. . .

Новая аннигиляция в рамках "rigid" vortex model

В рамках "rigid" vortex model $\frac{H_{an}(\beta R)}{M_s} = 4\pi F_1(\beta) - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2$

$\frac{R_0}{R} = \frac{L}{R}\left(\frac{R_0}{L}\right) = \beta\left(\frac{R_0}{L}\right)$, $h_{an}(\beta) = \frac{H_{an}(\beta)}{(4\pi M_s)} = N_x(\beta) - \frac{1}{4\pi}\beta^2\left(\frac{R_0}{L}\right)^2$

$\beta = \frac{R_0}{L}$	(5)	(6,67)	(10)	(15)	(20)	(25)	(30)	(40)	(50)
	0,2	0,15	0,1		0,05	0,04	0,033	0,025	0,020
$h_{an} = \frac{H_{an}}{4\pi M_s}$	0,096	0,080	0,060	0,044	0,036	0,030	0,025	0,020	0,017

Видим $\frac{L}{R_0} = \frac{5}{6}$ как в ПК Schneider-APL'00. Данные вычисления vortex, немного меньше Mag.-model расчет на 10%

Любопытно, что квадратичная приближение "rigid" V. model описывает эксперимент by Schneider'00 et al. лучше, чем кривая $h_{an}(s)$ Mag.-model

→ Построим h_{an} в "rigid" vortex model более точно, до любых порядков по "s", которые отсутствуют расчету h_{an} в Mag.-модели.

$W(s) = F_1(s) - hF_2(s)$, $h(s) = \frac{F_1'(s)}{F_2'(s)}$ и $\max h(s)$ дает h_{an} и s_{max}.

Аппроксим $F_1(s)$ и $F_2(s) = m_y(s)$, а по MCAD недостающие считаем.

$$\ln\left[s\cos\varphi + \sqrt{1-s^2\sin^2\varphi}\right] = \ln\left[s\cos\varphi + \sqrt{(1-s^2)+s^2\cos^2\varphi}\right] =$$

$$= \ln\left[\sqrt{1-s^2}\left[\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\cos\varphi + \sqrt{1+\frac{s^2}{1-s^2}\cos^2\varphi}\right]\right] = \ln\sqrt{1-s^2} + \ln\left[\frac{s\cos\varphi}{\sqrt{1-s^2}} + \sqrt{1+\frac{s^2\cos^2\varphi}{1-s^2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1-s^2) + \operatorname{Arsh}\left(\frac{s\cos\varphi}{\sqrt{1-s^2}}\right)$$

$$W_{ex}(s) = W_{ex}(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \ln\left[s\cos\varphi + \sqrt{1-s^2\sin^2\varphi}\right]\cdot\left(\frac{R_0}{R}\right)^2$$

→ $\int_0^{2\pi} d\varphi \ln\left[s\cos\varphi + \sqrt{1-s^2\sin^2\varphi}\right] = \pi\ln(1-s^2) + \int_0^{2\pi} d\varphi \operatorname{Arsh}\left(\frac{s\cos\varphi}{\sqrt{1-s^2}}\right)$

$$\operatorname{Arsh}(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)}x^{2k+1}$$

— такое разложение проходит при $x^2 = \frac{s^2}{1-s^2}\cos^2\varphi \le 1$

$\frac{s^2}{1-s^2} \le 1$, $s \le \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$. Ибо $\operatorname{Arsh}\left(\frac{s\cos\varphi}{\sqrt{1-s^2}}\right) = \operatorname{Arth}\left(\frac{s\cos\varphi}{\sqrt{1-s^2\sin^2\varphi}}\right) = \sum_{k=0}\frac{1}{(2k+1)}\left(\frac{s\cos\varphi}{\sqrt{1-s^2}}\right)^{2k+1}$

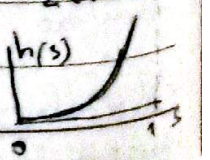
Т.к. нас интересует, что $s_{max} < 0,7$, то разложение применимо $\forall s$ рассматриваемых

Но $\int_0^{2\pi}\cos^{2k+1}\varphi\, d\varphi = 0$ и

$$W_{ex}(s) = W_{ex}(0) + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\pi\ln(1-s^2) = W_{ex}(0) + \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\ln(1-s^2),$$

при $s \ll 1$ $\ln(1-s^2) = -s^2$ это дает рез. убыл $W_{ex}(s) = W_{ex}(0) - \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 s^2$,

→ MCAD дает, что $h(s) = \frac{F_1'(s)}{F_2'(s)}$ ($\beta = 0,1$ минимум) монотонно растет



и экстремумов не имеет, т.е. "rigid" мода не дает устойчивости при росте

Escaneado con CamScanner

Escaneado con CamScanner

Date. . .



$I_\mu(\varphi_0) = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos\varphi e^{i\mu\varphi}}{\sqrt{1+\sin^2\varphi_0 + 2\sin\varphi_0 \sin\varphi}}$, $\left(\vec{m}\cdot\vec{n}\right)_{\rho=R} = -\frac{l\cos\varphi}{\sqrt{R^2+l^2+2lR\sin\varphi}}$, $l = \frac{R}{\sin\varphi_0}$ (в пол. коорд. с центром в центре диска)

При $\varphi_0 \to 0$ $l/R \to \infty$ $\left(\vec{m}\cdot\vec{n}\right)_{\rho=R} \approx -\cos\varphi$ так же s.d. с $\vec{n} \parallel -0x$ - верно.

Заменим $\varphi \to \varphi + \pi/2$, $\cos\varphi \to \cos(\varphi+\frac{\pi}{2}) = -\sin\varphi$, $\sin\varphi \to \sin(\varphi+\frac{\pi}{2}) = \cos\varphi$, а пределы можно не менять, т.к. интеграл по периоду от период. функции от пределов не зависит.

$$\to I_\mu(\sin\varphi_0) = -\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\sin\varphi\, e^{i\mu\varphi} e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{1+2\sin\varphi_0\cos\varphi+\sin^2\varphi_0}} = -i\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\sin\varphi\cdot\sin\mu\varphi}{\sqrt{1+2\sin\varphi_0\cos\varphi+\sin^2\varphi_0}} =$$

$$= -2i\int_0^{\pi} d\varphi \frac{\sin\varphi\,\sin\mu\varphi}{\sqrt{1+2\sin\varphi_0\cos\varphi+\sin^2\varphi_0}}$$ - это $I_\mu(s)$ shifted v. model при $s = \sin\varphi_0$ (смотр. до этого, не имеющего значения)

$I_\mu(s) \underset{\substack{s\to 0\\ \varphi_0\to 0}}{=} \pi\delta_{\mu 1}$ $(\mu>0)$ $\quad W^{bd}(\varphi_0\to 0) = \frac{2}{\pi}\sum_{\mu>0} F_\mu(\beta)\pi^2\delta_{\mu 1} - h = 2\pi F_1(\beta) - h = W^{hom}(\beta,h)$

$$\to W_m^{bd}(\varphi_0) = \frac{2}{\pi}\sum_{\mu>0} F_\mu(\beta) I_\mu^2(\sin\varphi_0)$$ похожа на $W_m^{v.d.}(s) = \frac{2}{\pi}s^2\sum_{\mu>0} F_\mu(\beta) I_\mu^2(s)$

где роль "s" играет $\sin\varphi_0 = \frac{R}{l} = \frac{1}{s}$. Знак φ_0 значения не имеет. Различие в мн. s^2.

Для b.d. $\left(\vec{m}\cdot\vec{n}\right)_{\rho=R} = +\frac{l\sin\varphi}{\sqrt{R^2+l^2+2Rl\cos\varphi}}$ похожа на s.d. $\left(\vec{m}\cdot\vec{n}\right)_{\rho=R} = \frac{s\sin\varphi}{\sqrt{1+s^2+2s\cos\varphi}}$,

но только $s' = \frac{l}{R} = \frac{1}{\sin\varphi_0}$. $s' \to \frac{1}{s}$. $\mathcal{Z}(\varphi, s) = \frac{s\cdot\sin\varphi}{\sqrt{1+s^2+2s\cos\varphi}}$

$$\mathcal{Z}(\varphi, \tfrac{1}{s}) = \frac{\frac{1}{s}\sin\varphi}{\sqrt{1+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}\cos\varphi}} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+s^2+2s\cos\varphi}}$$ совпад $\mathcal{Z}_{b.d.}(\varphi, s') = \frac{s'\sin\varphi}{\sqrt{1+s'^2+2s'\cos\varphi}}$

$\mathcal{Z}_{b.d.}(\varphi, \frac{1}{s}) = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+s^2+2s\cos\varphi}}$. Не связано ли это с преобразованием инверсии $O(z) = \frac{1}{z}$?

$\mathcal{Z}_{b.d.}(\varphi, s) = \mathcal{Z}_{v.d.}(\varphi, \frac{1}{s})$, $s = \sin\varphi_0$

$$\to \frac{1}{n_s^2 V_d} W_H^{b.d.} = W_H^{b.d.} = -\frac{4}{\pi} h \frac{1}{\sin^2\varphi_0} J(\varphi_0), \quad J(\varphi_0) = \int_0^{\varphi_0} d\varphi \cos^2\varphi \sqrt{\sin^2\varphi_0 - \sin^2\varphi}$$

$J(\varphi_0 \to 0) = \frac{\pi}{4}\sin^2\varphi_0\left[1 - \frac{1}{8}\sin^2\varphi_0\right]$ и дает предел $W_H^{b.d.} = -h \to$ s.dot.

$W_H^{v.d.}(s) = -h\frac{s}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2\varphi \sqrt{1-s^2\sin^2\varphi}$, $W_H^{v.d.}(\frac{1}{s}) = -\frac{h}{\pi}\frac{1}{s^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2\varphi \sqrt{s^2-\sin^2\varphi}$

- похоже на $W_H^{b.d.}(s = \sin\varphi_0)$, но все же не то. $\varphi_0 \to \frac{\pi}{2} - 0$ при $l \to R + 0$.

$$J(\varphi_0) = \int_0^{\varphi_0} d\varphi \cos^2\varphi \sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2\varphi_0} = \int_0^{\sin\varphi_0} dx \sqrt{1-x^2}\sqrt{\sin^2\varphi_0 - x^2}$$

Очень $h(\varphi_0) = \frac{\partial F_1(\varphi)/\partial\varphi_0}{\partial F_2(\varphi_0)/\partial\varphi_0}$ не имеет экстремумов (?), т.е. не дает полезн.

И выходит $W_m(\varphi_0)$ растет с φ_0, тогда как согласно 31/III она должна убывать хотя при малых φ_0.

Escaneado con CamScanner

Date. 16. 11.

Если $W_{sd}(\beta_0)$ растет с β_0^{11}, то т.к. $W_{v_1}(\beta_0)$ и $W_{v_2}(\beta_0)$ растут, то вторая была бы $\beta_0=0$ (s.d.) v.h. А это не так. Вопросы.

Отметим, что "rigid" v. model сейчас немного может объяснить как h_0 - равновесная энергия vortex и s.d. - ряд. Вязь сделана в мех.-модели $a_{c0}=0,02-0,16$ для $\beta=0,1-0,3$ - $a^*(\beta^*)$ достаточно мала. Так что "rigid" vortex модели может хватить даже в квадратичном приближении (см. расчет 12/XI).

→ Надо построить $h_0(\beta)$ и $h_{an}(\beta)$ "rigid" v. model в квадратичном приближении для разных $l=\frac{L}{R_0}$. А также построить $h_0(\beta)$ в "rigid" v. model - уточнение, отказавшись от квадратичного приближения.

Построение кривой $h_0(g)$ в мех.-модели. 15/XI

Написание APL - vortex сходно с предыдущим. 16/XI

→ В квадратичн. прибл. "rigid v. model": $h_{an}(\beta)=4\pi F_1(\beta)-\beta^2\frac{1}{l^2}$, $l=\frac{L}{R_0}=\text{const}$.

$$h_0(\beta)=2a(\beta,R)\left[1-\sqrt{1-\frac{\Delta(\beta)}{a(\beta,R)}}\right],\quad \Delta(\beta)=W_{\substack{hom\\(s.d)}}(\beta)-W_{v.d.}(\beta,R)$$

$$W_{s.d}(\beta)=2\pi F_1(\beta)=a(\beta,R)+\frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2=a(\beta,l)+\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{l^2}.$$

$$1-\frac{\Delta(\beta,R)}{a(\beta,R)}=1-\frac{1}{a(\beta,R)}\left[a(\beta,R)+\frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2-W_{v.d.}(\beta,R)\right]=$$

$$=\frac{1}{a(\beta,R)}\left[W_{v.d}(\beta,R)-\frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\right],\quad W_{v.d.}(\beta,R)=\beta^2\left[4\pi\xi^3\left[g_u(0)-g_u\left(\tfrac{\xi}{3}\right)\right]+\left(\frac{R_0}{L}\right)^2\left(2-\ln\beta\xi\right)\right],$$

где $\xi=\frac{\delta}{L}$, $l=\frac{L}{R_0}$.

$$[\dots]=W_{v.d.}(\beta,R)-\frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2=\beta^2[\dots]-\frac{1}{2}\beta^2\frac{1}{l^2}=$$

$$=\beta^2\left[4\pi\xi^3\left[g_u(0)-g_u\left(\tfrac{1}{3}\right)\right]+\frac{1}{l^2}\left\{2-\ln\beta\xi\right\}\right]-\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{l^2}$$

$$h_0(\beta,l)=2a(\beta,l)\left[1-\sqrt{\frac{W_{v.d.}(\beta,l)-\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{l^2}}{a(\beta,l)}}\right],\quad a(\beta,l)=2\pi F_1(\beta)-\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{l^2},$$

- можно рассчитать s.d. и v.d. в кв. "rigid v. model".

$$W_{v.d.}(\beta,l)=\beta^2\left[4\pi\xi^3\left[g_u(0)-g_u(1/3)\right]+\frac{1}{l^2}\left\{2-\ln\beta\xi\right\}\right],\quad \xi=f(l)$$ - определено 25/X.

Тогда как $h_{an}(\beta,l)=2a(\beta,l)$.

→ Можно еще построить $h_n(\beta,l)$ в разных мех.-моделях Кнеллера координат и сравнить с $h_0(\beta,l)=4\pi\left[F_1(\beta)-F_2(\beta)-\frac{1}{2\pi}\frac{\beta^2}{l^2}\right]$ - "rigid" vortex model.

Vb. $h_0(\beta,l)$ на точке с уменьшением β.

→ h_0 - rigid v. model дает на точке в квадратич. приближении при $\beta=0,2$ [$h_0(0,2,5/6)=0,405$ и $a_0=0,283$] - точное и кв. $h_0(0,2,\frac{5}{6})=0,505$

Conformal model – W_m :

Date. . . до сих пор боковых зарядов

→ Возвращаемся к связи с Маслобоем и оцениваем насколько важны vol - заряды смещенного вихря.

$$\frac{1}{4\pi M_s^2 V_d} W_m^{бок} = 2a^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(\beta k) J_1^2(k)$$

$$\frac{1}{4\pi M_s^2 V_d} W_m^{vol} = a^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(\beta k) \left[\int_0^1 d\rho\rho\, J_1(k\rho) F(\rho, c) \right]^2 , \quad c - \text{радиус сош.} \quad c = \frac{b}{R}$$

→ $c = \frac{b}{R} = \frac{L}{R}\frac{b}{L} = \beta\xi$. $F(\rho,c) = \begin{cases} \frac{4c^3\rho}{(c^2+\rho^2)^2} = \frac{4\beta^3\xi^3\rho}{(\beta^2\xi^2+\rho^2)^2}, & \rho < \beta\xi \\ 1, & \rho > \beta\xi \end{cases}$

$$B(k,\beta\xi) = \int_0^1 d\rho\rho\, J_1(k\rho) F(\rho,c) = \int_0^{\beta\xi} d\rho\rho\, J_1(k\rho) \frac{4(\beta\xi)^3\rho}{(\beta^2\xi^2+\rho^2)^2} + \int_{\beta\xi}^1 d\rho\rho\, J_1(k\rho)$$

Типичное $\beta\xi$ найдем. Для экс. Schneider $\frac{L}{R_0} = \frac{5}{6}$ и $\xi = \frac{b}{L} = 0{,}92$.

Тип. $\beta = \frac{1}{5} \div \frac{1}{30}$, $1/g = 5 \div 30$. Т.е. $\beta\xi \ll 1$ и $J_1(k\rho)$ можно разложить. Но $k\beta\xi$ может быть > 1, поэтому не будем раскладывать, а сравним коэф. при $a^2 \int \frac{dk}{k} f(\beta k)$: $2J_1^2(k)$ и $B^2(k, \beta\xi)$.

$B^2(k,\beta\xi)$ дает в max $< 0{,}1$ от $2J_1^2(k)$.

Отношение $\left(\frac{W_m^{vol}}{W_m^{бок}}\right)_{max} < 0{,}002$ для $\beta = g$ в инт. $[0{,}03, 0{,}3]$ $1/g \in [3, 30]$

и типичное это отношение $< 0{,}001$.

→ Вывод: объемными зарядами можно пренебречь по сравнению с боковыми.

Это строго при $a \ll 1$ в квадратич. приближении, но оно правдоподобно и для $a \approx 0{,}1-0{,}2$ (поле h_0) и $a \approx 0{,}5$ (h_{an}).

→ Что касается торцевых зарядов, то они $\sim \frac{c^5}{\beta} = \beta^4\xi^5 \ll 1$, (коэф. при a^2)

т.к. $\beta = \frac{1}{5} \div \frac{1}{30}$, $\xi < 1$. Зависимость торц. зарядов от a^2 пренебрежимо мала.

17/XI Посчитаем h_{an}, h_0, h_n в рамках "rigid" v-model:

Крит. наш. "Rigid vortex" model

$L = 20$ нм $\quad \xi_0 = b/L = 0{,}734$ File Vortex - rigid.mcd

β	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38	0,40
h_{an}/M_s	0,212	0,345	0,516	0,664	0,761	0,97	1,064	1,153	1,237	1,317	1,391	1,46	1,53	1,60	1,66	1,71	1,77	1,82	1,87	0,448
h_0/M_s	0,133	302	394	467	526	574	612	643	668	686	699	707	711	711	708	701	691	679	663	0,646
h_n/M_s	0,026	0,048	0,068	0,086	0,1	0,112	121	128	131	132	130	126	118	108	0,095	0,079	0,06	0,038	0,014	= 0,013
$\frac{R}{L} = 1/\beta$	50	25	16,67	12,5	10	8,33	7,14	6,25	5,56	5	4,55	4,17	3,85	3,57	3,33	3,13	2,94	2,78	2,63	2,5

Escaneado con CamScanner

"Rigid" V. model — h_{an}, h_n, h_o

Date. • • • "разрез «core»"

Дано $L = 40$ nm $\quad \beta_0 = \frac{b}{L} = 0{,}435$, са дадени $L = 60$ nm, $\beta_0 = 0{,}325$.

$L = 40$ nm, $\beta_0 = 0{,}435$

$1/\beta$	25	12,5	8,33	6,25	5	4,17	3,57	3,13	2,78	2,5	35
S_0	1667	10	7,14	5,56	4,55	3,85	3,33	2,94	2,63	20	0,2
	576	648	878	1,080	1,26	1,43	1,58	1,72	1,85	1,97	0,2
h_{an}	0212	519	767	982	1,17	1,35	1,50	1,65	1,79	1,91	0,449
	338	554	642	721	855	965	1,06	1,13	1,20	1,25	1,29 0,26
h_o	0,191	454	101	791	913	1,01	1,10	1,17	1,22	1,27	0,378
	052	101	147	190	229	266	298	327	353	375	0,057
h_n	0,027	077	124	169	210	248	282	313	341	365	0,065

$L = 60$ nm, $\beta_0 = 0{,}325$

	776	649	879	1,08	1,27	1,43	1,59	1,73	1,86	1,99	0,286
h_{an}	0,212	519	768	984	1,18	1,35	1,51	1,66	1,80	1,93	0,449
	350	584	771	528	1,06	1,18	1,28	1,37	1,45	1,52	0,289
h_o	0,202	475	682	853	997	1,12	1,23	1,33	1,41	1,48	0,415
	053	104	154	201	247	291	333	371	411	0,447	0,038
h_n	0,027	078	129	178	225	270	313	354	393	0,430	0,066

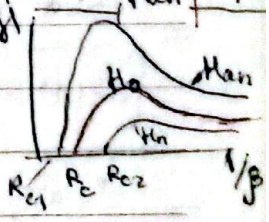
Видимо, надо рассм. още бъдещите β точки $h_{an}(\beta)$, $h_o(\beta)$ клонят $\to 0$. Но $\beta > \beta_{c1} = 1{,}81$ нелеза, т.к. $\| \to \perp$?

$h_{an} = 0$ при $R = R_{c1}$, $h_o = 0$ при $R = R_c$ - очаквано.

$R_{c1} < R_c$. $h_n = 0$ при $R = R_{c2}$ - нарече сраб. s.d. фазов (сп. 14/XI).

$L = 20$ nm

β	0,425	0,450	0,475	0,500	0,55	0,65	0,75	0,8	0,95	1,1	1,2	1,4	1,6	$\beta_{c2}=1{,}81$ 2,2
h_{an}	1,93	1,99	2,04	2,09	2,17	2,31	2,44	2,49	2,46	2,40	2,22	1,93	1,08	
h_o		0,592		0,527	0,452	0,277	0078							0,53
$1/\beta$	2,35	2,22	2,11	2,00	1,82	1,54	1,33	1,25	1,05	0,91	0,83	0,71	0,63	0,5 0,46



Дано $L = 20$ nm $\quad \beta_{c1} = \frac{L}{R_{c1}} = 2{,}37$, $\beta_c = \frac{L}{R_c} = 0{,}787$, $\beta_{c2} = \frac{L}{R_{c2}} = 0{,}390$

$1/\beta_{c1} = 0{,}422$; $1/\beta_c = 1{,}27$; $1/\beta_{c2} = 2{,}56$

Проверка энергии точечных зарядов of Net.-model. 19/XI

$m_z = \frac{1 - |w|^2}{1 + |w|^2}$, вътрешно „core" $w'(z) = \frac{i}{c}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, $z = x + iy$.

$|W(z)|^2 = W(z)\cdot\overline{W(z)} = \frac{1}{c^2}\frac{(z-a)(\bar{z}-a)}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})} = \frac{1}{c^2}\frac{\{|z|^2 - a(z+\bar{z}) + a^2\}}{[1 - a(z+\bar{z}) + a^2|z|^2]}$

$m_z = \frac{c^2[1 - a(z+\bar{z}) + a^2|z|^2] - \{|z|^2 - a(z+\bar{z}) + a^2\}}{c^2[1 - a(z+\bar{z}) + a^2|z|^2] + \{|z|^2 - a(z+\bar{z}) + a^2\}} =$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$$= \frac{c^2-a^2 - a(z+\bar z)(c^2-1) + |z|^2(c^2a^2-1)}{c^2+a^2 - a(z+\bar z)(c^2+1) + |z|^2(c^2a^2+1)}$$. Радиус дуги окружности $R = c\frac{1-a^2}{1-c^2a^2}$

$$m_z(\rho,\varphi) = \frac{c^2-a^2 - 2a\rho\cos\varphi(c^2-1) + \rho^2(c^2a^2-1)}{c^2+a^2 - 2a\rho\cos\varphi(c^2+1) + \rho^2(c^2a^2+1)}$$, где ρ,φ в системе координат с центром в центре круга.



переходим к $(x'y')$ или $\rho'\varphi'$ координатам с центром в центре внутри $\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y \end{cases}$. Тогда ур. границы круга $x'^2+y'^2 = r^2$.

$x = \rho\cos\varphi = x' + x_0 = \rho'\cos\varphi' + x_0$, $\rho^2 = x^2+y^2 = (x'+x_0)^2 + y'^2 = x'^2 + 2x'x_0 + x_0^2 + y'^2 =$

$$m_z(\rho',\varphi') = \frac{c^2-a^2 - 2a(c^2-1)(\rho'\cos\varphi'+x_0) + (c^2a^2-1)[\rho'^2 + 2\rho'\cos\varphi' x_0 + x_0^2]}{c^2+a^2 - 2a(c^2+1)(\rho'\cos\varphi'+x_0) + (c^2a^2+1)[\rho'^2+2\rho'\cos\varphi' x_0 + x_0^2]} =$$

$$= \frac{c^2-a^2 - 2a(c^2-1)x_0 + (c^2a^2-1)x_0^2 + 2\rho'\cos\varphi'\left[-a(c^2-1) + x_0(c^2a^2-1)\right] + (c^2a^2-1)\rho'^2}{c^2+a^2 - 2a(c^2+1)x_0 + (c^2a^2+1)x_0^2 + 2\rho'\cos\varphi'\left[-a(c^2+1) + (c^2a^2+1)x_0\right] + (c^2a^2+1)\rho'^2} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x_0 = a\dfrac{(1-c^2)}{1-c^2a^2} \\ x_0 = r\dfrac{a}{c}\dfrac{(1-c^2)}{(1-a^2)} \end{array} \right| = \frac{c^2-a^2 - 2a(c^2-1)\frac{a}{c}\frac{(1-c^2)}{(1-a^2)}r + a^2\frac{(1-c^2)^2}{(1-c^2a^2)}(-1) + (c^2a^2-1)^2\rho'^2}{\left[c^2+a^2 - 2a(c^2+1)\frac{a}{c}\frac{(1-c^2)}{(1-a^2)}r + 2\rho'\cos\varphi'\left[-a(c^2+1) + (c^2a^2+1)a\frac{(1-c^2)}{(1-c^2a^2)}\right] + (c^2a^2+1)x_0^2\right] + (c^2a^2+1)\rho'^2}$$

$$= \left| \begin{array}{l} \rho = \rho'/r \\ \varphi' \to \varphi \end{array} \right| = \frac{c^2-a^2 - 2a(c^2-1)a\frac{(1-c^2)}{(1-c^2a^2)} + (c^2a^2-1)\left[\rho^2 + \frac{a^2}{c^2}\frac{(1-c^2)^2}{(1-a^2)^2}\right]r^2}{\left[c^2+a^2 - 2a(c^2+1)a\frac{(1-c^2)}{(1-c^2a^2)} + 2\rho r\cos\varphi\frac{}{(1-c^2a^2)}\left[-a(c^2+1)(1-c^2a^2) + a(1-c^2)(c^2a^2+1)\right] + \right.$$
$$\left. + (c^2a^2+1)\left[\rho^2 + \frac{a^2}{c^2}\frac{(1-c^2)^2}{(1-a^2)^2}\right]r^2\right]}$$

$$= \frac{c^2-a^2 + 2a^2\frac{(1-c^2)^2}{(1-c^2a^2)} + (c^2a^2-1)\rho^2r^2 + (c^2a^2-1)a^2\frac{(1-c^2)^2}{(1-c^2a^2)^2}}{\left[c^2+a^2 - 2a^2\frac{(1-c^4)}{(1-c^2a^2)} + a\frac{2\rho r\cos\varphi}{(1-c^2a^2)}\left[c^2 - 1 + c^4a^2 + c^2a^2 + 1 - c^2 + c^2a^2 - c^4a^2\right] + (c^2a^2+1)\rho^2r^2 + (c^2a^2+1)\right.}$$

$$= \frac{c^2-a^2 + a^2\frac{(1-c^2)^2}{(1-c^2a^2)} + (c^2a^2-1)\rho^2r^2}{\left[c^2+a^2 - 2a^2\frac{(1-c^4)}{(1-c^2a^2)} + \frac{2a\rho r\cos\varphi}{(1-c^2a^2)}\left[a^2-1\right]2c^2 + r^2(c^2a^2+1)\rho^2 + a^2(c^2a^2+1)\frac{(1-c^2)^2}{(1-c^2a^2)^2}\right]}$$

$$= \frac{\left[\frac{c^2(1-a^2)^2}{(1-c^2a^2)} + (c^2a^2-1)\rho^2r^2\right](1-c^2a^2)}{\left[(c^2+a^2)(1-c^2a^2) - 2a^2(1-c^4) - 4ac^2\rho r\cos\varphi(1-a^2) + a^2(c^2a^2+1)\frac{(1-c^2)^2}{(1-c^2a^2)} + (c^2a^2+1)\rho^2r^2\right]\times(1-c^2a^2)}$$

$$= \frac{\left[r^2(1-c^2a^2) + (c^2a^2-1)\rho^2r^2\right](1-c^2a^2)}{\left[(c^2-a^2)(1+a^2c^2) - 4ac^2(1-a^2)r\rho\cos\varphi + a^2(c^2a^2+1)\frac{(1-c^2)^2}{(1-c^2a^2)} + (c^2a^2+1)\rho^2r^2\right]\times(1-c^2a^2)}$$

$$= \frac{r^2(1-c^2a^2)^2\left[1-\rho^2\right]}{\left[\frac{(1+a^2c^2)}{(1-a^2c^2)}c^2(1-a^2)^2 - 4ac^2(1-a^2)r\rho\cos\varphi + (c^2a^2-1)\rho^2r^2\right]}$$

↑ умножили

Date. Software model: Математическое моделирование процессов сбора и передачи данных в беспроводных сетях. Лек. – модели

$$m_2(\rho,\varphi) = \frac{r^2(1-c^2a^2)^2(1-\rho^2)}{\left[(1-a^4c^4)r^2 - 4\rho\cos\varphi\, a r^2 c(1-c^2a^2) + (c^2a^2+1)\rho^2 r^2 + (1-c^2a^2)\right]}$$

$$= \frac{(1-c^2a^2)^2(1-\rho^2)}{\left[(1-a^4c^4) - 4\rho\cos\varphi(1-c^2a^2)r + (1-a^4c^4)\rho^2\right]} = \left|\begin{array}{l}\text{проверить значения,}\\ \text{видимо опечатка}\\ \text{Найти и исправить}\end{array}\right| =$$

$$= \frac{(1-c^2a^2)(1-\rho^2)}{\left[(1+c^2a^2) - 4\rho\cos\varphi ac + (c^2a^2+1)\cdot\rho^2\right]} = \left(\frac{1-c^2a^2}{1+c^2a^2}\right)\frac{(1-\rho^2)}{1+\rho^2 - 4\frac{ac}{1+a^2c^2}\rho\cos\varphi} \quad (!)$$

Найдем еще раз!

$$\left[\text{знам.}\right] = c^2+a^2 - 2a(c^2+1)(\rho'\cos\varphi' + x_0) + (1+c^2a^2)\left[\rho'^2 + 2\rho'\cos\varphi' x_0 + x_0^2\right]$$

Коэф. значение при $(\rho')^0$: $c^2+a^2 - 2a(c^2+1)x_0 + (1+c^2a^2)x_0^2 =$

$$= \frac{1}{(c^2a^2-1)^2}\left[\underset{(1)}{(c^2+a^2)(1-a^2c^2)^2} - \underset{(2)}{2a^2(c^2+1)(1-a^2c^2)(1-c^2)} + \underset{(3)}{(1+c^2a^2)a^2(1-c^2)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{(1-a^2c^2)^2}\left[(1) + a^2\left\{-2(1+c^2)(1-a^2c^2) + (1+a^2c^2)(1-c^2)\right\}(1-c^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{(\cdot)}\left[(1) + a^2(1-c^2)\left\{-2-2c^2+2a^2c^2+2a^2c^4+1-c^2+a^2c^2-a^2c^4\right\}\right] =$$

$$= \frac{1}{(\cdot)}\left[(1) + a^2(1-c^2)\left\{-1-3c^2+3a^2c^2+a^2c^4\right\}\right] =$$

$$= \frac{1}{(\cdot)}\left[(c^2+a^2)(1-a^2c^2)^2 + a^2(1-c^2)\left\{3a^2c^2+a^2c^4-3c^2-1\right\}\right] =$$

$$= \frac{1}{(\cdot)}\left[(c^2+a^2)(1-2a^2c^2+a^4c^4) + a^2(1-c^2)\left\{a^2c^4+3a^2c^2-3c^2-1\right\}\right] =$$

$$= \frac{1}{(\cdot)}\left[c^2\left(1-2a^2c^2+a^4c^4-a^4c^4-3a^4c^2+3c^2a^2+a^2\right) +\right.$$

$$\left. + a^2\left(1-2a^2c^2+a^4c^4+a^2c^4+3a^2c^2-3c^2-1\right)\right] = \frac{1}{(\cdot)}\left[c^2\left(1+a^2+a^2c^2-3a^4c^2\right) +\right.$$

$$\left. + a^2\left(a^2c^2+a^4c^4+a^2c^4-3c^2\right)\right] = \frac{c^2}{(\cdot)}\left[1+a^2+a^2c^2-3a^4c^2+a^4+c^2a^6+c^2a^4-3a^2\right] =$$

$$= \frac{c^2}{(\cdot)}\left[(1-a^2)^2 + c^2a^2\left(1-3a^2+a^4+a^2\right)\right] = \frac{c^2}{(\cdot)}\left[(1-a^2)^2 + c^2a^2(1-a^2)^2\right] =$$

$$= \frac{c^2}{(1-a^2c^2)^2}(1-a^2)^2(1+c^2a^2) = r^2(1+a^2c^2) \quad (!)$$

Коэф. значение при $1\rho'\cos\varphi'$: $-a(c^2+1) + (c^2a^2+1)x_0 =$

$$= -a(c^2+1) + (c^2a^2+1)\frac{a(1-c^2)}{(1-c^2a^2)} = \frac{a}{1-c^2a^2}\left[-(c^2+1)(1-c^2a^2) + (c^2a^2+1)(1-c^2)\right] =$$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$$= \frac{a}{(1-c^2a^2)}\left[-c^2 - 1 + c^4a^2 + c^2a^2 + c^2a^2 + 1 - c^4a^2 - c^2\right] = \frac{2ac^2}{(1-c^2a^2)}(a^2-1) =$$

$$= -2ac^2$$

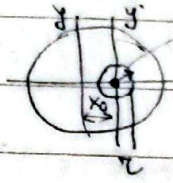
– conform. model

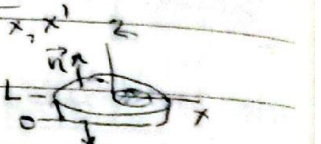
$$m_z(\rho,\varphi) = \frac{1-c^2a^2}{1+c^2a^2}\,\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-4\frac{ac}{1+a^2c^2}\rho\cos\varphi}$$

– в системе координат с центром в центре, где $\rho = \rho'/r$, z – радиус

Если ввести как Коссия м. $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = ac$, $\sin\delta = \frac{2ac}{1+a^2c^2}$, $\cos\delta = \frac{1-a^2c^2}{1+a^2c^2}$, то

$$m_z(\rho,\varphi) = \cos\delta\,\frac{(1-\rho^2)}{1+\rho^2-2\sin\delta\rho\cos\varphi}$$





$$\beta(\vec\rho) = (\vec M\cdot\vec n) = \begin{cases} m_z, & z=L \\ -m_z, & z=0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{M_s^2}W_m^{\text{торц}} = \frac{1}{2}\int_{z=0}^{}dS\int_{z'=0}^{}dS'\,\frac{\beta(\vec\rho)\beta(\vec\rho')}{|r-r'|} + \frac{1}{2}\int_{z=L}^{}dS\int_{z'=L}^{}dS'\,\frac{\beta(\vec\rho)\beta(\vec\rho')}{|r-r'|} + \int_{z=0}^{}dS\int_{z'=L}^{}dS\,\frac{\beta(\vec\rho)\beta(\vec\rho')}{|r-r'|}$$

$$\frac{1}{|r-r'|} = \int_0^\infty dk\,e^{-k|z-z'|}J_0(k|\vec\rho-\vec\rho'|) = \sum_\mu\int dk\,e^{-k|z-z'|}e^{i\mu(\varphi-\varphi')}J_\mu(k\rho)J_\mu(k\rho')$$

– однажды

$$\frac{1}{M_s^2}W_m^{\text{торц}} = \int_{z=z'}dS\int dS'\,\beta(\vec\rho)\beta(\vec\rho')\sum_\mu e^{i\mu(\varphi-\varphi')}\int dk\,J_\mu(\cdot)\,J_\mu(\cdot) + \int_{z\neq z',\,|z-z'|=L}dS\int dS'\,\beta(\cdot)\beta(\cdot)\left[\ldots e^{-kL}\right]$$

$$= \left|\beta(\rho)\beta(\rho') = -m_z(\rho)m_z(\rho')\right| = \int_0^{r(a)}d\rho\rho\int_0^{r(a)}d\rho'\rho'\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}d\varphi'\sum_\mu e^{i\mu(\varphi-\varphi')}\times$$

$$\times\int_0^\infty dk\left[1-e^{-kL}\right]\cdot J_\mu(k\rho)J_\mu(k\rho')\,m_z(\vec\rho)\,m_z(\vec\rho') =$$

$$= \sum_\mu\int_0^\infty dk\left[1-e^{-kL}\right]\int d\rho\rho\int d\varphi\,e^{i\mu\varphi}m_z(\vec\rho)J_\mu(k\rho)\cdot\int d\rho'\rho'\int d\varphi' e^{-i\mu\varphi'}m_z(\vec\rho')J_\mu(k\rho') =$$

$$= \sum_\mu\int dk\left[1-e^{-kL}\right]\left|\int_0^{r(a)}d\rho\rho\int d\varphi\,e^{i\mu\varphi}m_z(\vec\rho)J_\mu(k\rho)\right|^2$$

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\,m_z(\vec\rho')e^{i\mu\varphi} = \int_0^{2\pi}d\varphi e^{i\mu\varphi}\cos\delta\,\frac{r^2-\rho^2}{r^2+\rho^2-2r\rho\sin\delta\cos\varphi}$$ т.к. в $m_z(\vec\rho)$ $\rho = \frac{\rho'}{r(a)}$ безразмерно

$$J_\mu(k) = \int_0^{r(a)}d\rho\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\,e^{i\mu\varphi}J_\mu(k\rho)m_z(\vec\rho)\,,\quad e^{i\mu\varphi}\to\cos\mu\varphi \text{ в силу чет. мод.}$$

$$J_\mu(k) = \int_0^{r(a)}d\rho\rho\,J_\mu(k\rho)\int_0^{2\pi}d\varphi\cos\mu\varphi\cos\delta\,\frac{r^2-\rho^2}{r^2+\rho^2-2r\rho\sin\delta\cos\varphi} = \left|\rho = x\cdot r\right| =$$

$$= r^2\int_0^1 dx\,x\,J_\mu(kxr)\int_0^{2\pi}d\varphi\cos\mu\varphi\cos\delta\,\frac{1-x^2}{1+x^2-2x\sin\delta\cos\varphi}\,,\quad m_z(x,\varphi) = \cos\delta\,\frac{1-x^2}{1+x^2-2x\sin\delta\cos\varphi}$$

Date. 20 · 11 ·

$$W_m^{\text{торм}} = \sum_\mu \int_0^\infty dk \left[1 - e^{-kL}\right] r^4 \left[\int_0^1 dx\, x \int_0^{2\pi} d\varphi\, J_\mu(kxr)\cos\mu\varphi\, m_z(x,\varphi)\right]^2 = \text{20/XI}$$

$$\left|\begin{array}{l} kR = \varkappa,\ \frac{L}{R} = \beta \text{ — кол., тогда } kr = z,\ k = \frac{z}{r} \\ kx = (kR)\frac{x}{R} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} kL = z\frac{L}{r},\ z \to \varkappa \end{array} \Bigg| = r^4 \sum_\mu \int_0^\infty \frac{dz}{r}\left[1 - e^{-z\left(\frac{L}{r}\right)}\right] \cdot [\,\cdot\,]^2$$

$$\frac{1}{M_s^2 V_d} W_m^{\text{торм}} = \frac{r^3}{\pi R^2 L} \sum_\mu \int_0^\infty d\varkappa \left(1 - e^{-\varkappa\frac{L}{r}}\right)\left[\int_0^1 dx\, x \int_0^{2\pi} d\varphi\, J_\mu(\varkappa x)\cos\mu\varphi\, m_z(x,\varphi)\right]^2$$

$$\frac{1}{4\pi M_s^2 V_d} W_m^{\text{торм}} = \frac{r^3}{(2\pi)^2 R^2 L} \sum_\mu \int d\varkappa \left(1 - e^{-\varkappa\frac{L}{r}}\right)\left[\int_0^1 dx\, x \int_0^{2\pi} d\varphi\, J_\mu(\varkappa x)\cos\mu\varphi\, m_z(x,\varphi)\right]^2$$

Если ввести снова $\mathcal{J}_\mu(\varkappa) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 dx\, x \int_0^{2\pi} d\varphi\, J_\mu(\varkappa x)\cos\mu\varphi\, m_z(x,\varphi)$, то

$$\frac{1}{4\pi M_s^2 V_d} W_m^{\text{торм}} = \frac{r^3}{R^2 L} \sum_\mu \int_0^\infty d\varkappa \left[1 - e^{-\varkappa\frac{L}{r}}\right] \mathcal{J}_\mu^2(\varkappa)$$ — энергия торм. дрейфа смещённого vortex в маг.-модели.

$$G(\delta, z) = \sum_\mu \int_0^\infty d\varkappa\, e^{-\varkappa z}\, \mathcal{J}_\mu^2(\delta, \varkappa), \quad W_m^{\text{торм.}} = \frac{r^3}{R^2 L}\left[G(\delta, 0) - G\left(\delta, \frac{L}{r}\right)\right] -$$ совпадает с ф. (3) методов.

$$J_\mu(\delta, x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 dx\, x \int_0^{2\pi} d\varphi\, J_\mu(\varkappa x)\cos\mu\varphi\, \cos\delta\, \frac{(1-x^2)}{1 + x^2 - 2x\sin\delta\cos\varphi},$$

где $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = ac$ или в разн. порядок. $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{lB}{R^2} = \left(\frac{l}{R}\right)\left(\frac{B}{R}\right)$, $a = \frac{l}{R}$, $c = \frac{B}{R}$,

l - смещение, B - радиус кол. при $H = 0$.

$a = \frac{l}{R}$ может быть ~ 1, но $\left(\frac{B}{R}\right) \ll 1$, кроме неск. случаев (для пятнист. доков)

Выразим к кривой однородности $R_c(L)$ или кривой стабильности $R_{c1}(L)$ (vortex)

$$r = r(a) = c\,\frac{1 - a^2}{1 - c^2 a^2}\cdot R, \quad \frac{r^3}{R^2 L} = \left(\frac{r}{R}\right)^3 \frac{R}{L} = \left(\frac{r}{R}\right)^3 \frac{1}{\beta}$$

$$W_m^{\text{торм}}(a) = \frac{1}{4\pi M_s^2 V_d} W_m^{\text{торм.}} = \left(\frac{r}{R}\right)^3 \frac{1}{\beta}\left[G(\delta, 0) - G\left(\delta, \frac{L}{r}\right)\right] \qquad (*)$$

Т.к. $G(\delta, z)\Big|_{\delta=0} = \sum_\mu \int_0^\infty d\varkappa\, e^{-\varkappa z}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^1 dx\, x \int d\varphi\, J_\mu(\varkappa x)\cos\mu\varphi\, \frac{1-x^2}{1+x^2}\right]^2 = \left|\int d\varphi(\cdot) = 2\pi\delta_{\mu 0}\right| =$

$$= \int_0^\infty d\varkappa\, e^{-\varkappa z}\left[\int_0^1 dx\, x\, J_0(\varkappa x)\,\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]^2 = G_{\text{usav}}(z), \quad \operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = ca \ll 1 \text{ обычно.}$$

Чтобы ф. (*) представляла смысл $r = cR\,\frac{1-a^2}{1-c^2a^2} \approx cR(1-a^2)$ и положить $\delta = 0$ в ф. (*), т.е. (считать малым параметром $\varepsilon = ca^2 \ll 1$. Но если $c \lesssim 1$, то Конечно рабочие работают лишь при $a^2 \ll 1$, а это может нарушаться, например в области кривой $R_{c1}(L)$ — потери стабильности vortex (случай Нан).

Date. . .

Косание приближенно сводится к замене $b \to b(1-a^2)$ или смещению вортекса в W_m точек. Для Но-расчета где нужно значение a_{co} равенства энергий V.d. и S.d. ур (12/XI) дает $a_{co} = 0{,}1 \div 0{,}2$ для всех β, а замена практически не влияет на результат.

Как и $\frac{1}{1-e^2a^2} \approx 1$ - замена.

Но для Нан $c \leq 1$ и $a_c \sim 0{,}5$ расчет в „0" приближении по (ca) может быть недостаточно точным.

Конкретно: $J_\mu(\delta, x) = \frac{\cos\delta}{(2\pi)} \int_0^1 dx\, x\, J_\mu(xx) \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\mu\varphi \frac{1-x^2}{1+x^2-2x\sin\delta\cdot\cos\varphi}$

$$J_\mu(x) = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos\mu\varphi}{1+x^2-2x\sin\delta\cos\varphi} = \left| \lambda = \frac{2x\sin\delta}{1+x^2} \right| = \frac{1}{(1+x^2)} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos\mu\varphi}{1-\lambda\cos\varphi} =$$

$0 < \lambda < 1$ если $\delta \leq \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{1}{(1+x^2)} 2 \int_0^{\pi} d\varphi \frac{\cos\mu\varphi}{1-\lambda\cos\varphi} = \frac{2}{1+x^2} \frac{\pi}{\sqrt{1-\lambda^2}} \left(\frac{\sqrt{1-\lambda^2}-1}{\lambda} \right)^\mu (-1)^\mu$$

$$J_\mu(\delta, x) = \frac{\cos\delta}{2\pi} \int_0^1 dx\, x\, J_\mu(xx)(1-x^2) \frac{2\pi}{(1+x^2)} \frac{(-1)^\mu}{\sqrt{1-\lambda^2}} \left(\frac{\sqrt{1-\lambda^2}-1}{\lambda} \right)^\mu$$

$$1-\lambda^2 = 1 - \frac{4x^2\sin^2\delta}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{(1+x^2)^2}\left[(1+x^2)^2 - 4x^2\sin^2\delta \right] =$$

$$= \frac{1}{(\cdot)^2}\left[1 + 2x^2 + x^4 - 4x^2 + 4x^2(1-\sin^2\delta) \right] = \frac{1}{(\cdot)^2}\left[(1-x^2)^2 + 4x^2\cos^2\delta \right]$$

Дальше ТВ: $\sqrt{1-\lambda^2} = 1 - \frac{\lambda^2}{2}$, $\frac{\sqrt{1-\lambda^2}-1}{\lambda} = \frac{1-\lambda^2/2-1}{\lambda} = -\frac{1}{2}\lambda$, $\lambda = \frac{2x}{1+x^2}\sin\delta \ll 1$

$$J_\mu(\delta, x) = \cos\delta \int_0^1 dx\, x\, J_\mu(xx) \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) \frac{(-1)^\mu}{\sqrt{1-\lambda^2}} \frac{(-1)^\mu}{2^\mu} \lambda^\mu =$$

$$= \frac{\cos\delta}{2^\mu} \int_0^1 dx\, x\, J_\mu(xx) \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) \frac{\lambda^\mu}{\sqrt{1-\lambda^2}} = \frac{\cos\delta}{2^\mu} \int_0^1 dx\, x\, J_\mu(xx) \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) \lambda^\mu \left[1 + \frac{\lambda^2}{2} \right]$$

$\lambda = \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) \sin\delta \ll 1$, поэтому глав. вклад от $\mu = 0$.

$$\frac{c}{R} = c\frac{1-a^2}{1-e^2a^2} = c(1-a^2)\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\delta}{2}} = c(1-a^2)\left(\frac{1+\cos\delta}{2\cos\delta} \right), \quad \operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = ca$$

$$J_0(\delta, x) = \cos\delta \int_0^1 dx\, x\, J_0(xx) \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) \left[1 + \frac{\lambda^2}{2} \right] \approx \cos\delta \int_0^1 dx\, x\, J_0(xx) \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$$

мин. по λ приближ., но $\lambda \neq 0$, $\delta \neq 0$

$$J_1(\delta, x) = \frac{1}{2}\cos\delta \int_0^1 dx\, x\, J_1(xx) \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) \lambda \cong \sin\delta \int_0^1 dx\, x\, J_1(xx) \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) \left(\frac{x}{1+x^2} \right)$$

мин. по $\lambda \sim \delta$

$$J_2(\delta, x) = \frac{1}{4}\cos\delta \int dx\, x\, J_2(\cdot)(\cdot)\, \lambda^2 = \frac{1}{4}\sin^2\delta \int dx\, x\, J_2(xx) \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}$$

$\cos\delta = \frac{1-a^2c^2}{1+a^2c^2} = 1 - 2a^2c^2$, при $(ac) \ll 1$, но $\sin\delta = \frac{2ac}{1+a^2c^2} \approx 2ac$

$$\sum_\mu J_\mu^2(\delta, x) = \sum_\mu \left[\cos\delta \sin^\mu\delta \int_0^1 dx\, x\, J_\mu(\cdot) \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) \frac{x^\mu}{(1+x^2)^\mu} \left\{ 1 + \frac{1}{2}\frac{4x^2\sin^2\delta}{(1+x^2)^2} \right\} \right]^2 =$$

Escaneado con CamScanner

Date.

$= (\text{само } \mu=0) + 2\,(\text{само } \mu=1 \text{ т.н. } \mu \text{ се появяват само по двойки}) = \cos^2\delta\,[\,\cdot\,] + \dots$, които ще зачетем с точно до (a^2c^2).

$$J_0(\delta,x) = \cos\delta \int dx\, x\, J_{\mu=0}\cdot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\left[1+\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}\sin^2\delta\right] = \left|\varepsilon = a^2c^2\right| =$$

$$= \cos\delta \int dx\, x\, J_{\mu=0}(\cdot) + \int dx\, x\, J_0\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}\sin^2\delta = \left|\begin{array}{l}\cos\delta = 1-2\varepsilon \\ \sin^2\delta = 4a^2c^2 = 4\varepsilon \\ \sin\delta \sim \lambda \sim \sqrt{\varepsilon}\end{array}\right| =$$

$$= (1-2\varepsilon)\int dx\, x\, J_0\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + 8\varepsilon \int dx\, x\, J_0\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\frac{x^2}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \int dx\, x\, J_0(\cdot)\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + 2\varepsilon \int dx\, x\, J_0(\cdot)\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\left[\frac{4x^2}{(1+x^2)^2} - 1\right] =$$

$$= \int dx\, x\, J_0(\cdot)\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - 2\varepsilon \int dx\, x\, J_0(\cdot)\frac{(1-x^2)^3}{(1+x^2)^3} = A - 2\varepsilon B$$

$$J_1(\delta,x) = \underset{\sim\sqrt{\varepsilon}}{\sin\delta} \int dx\, x\, J_1(\cdot)\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\frac{x}{1+x^2} + O(\varepsilon)$$

$$\sum_\mu J_\mu^2(\delta,x) = J_0^2(\delta,x) + 2J_1^2(\delta,x) = \left[\int dx\, x\, J_0\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right]^2 -$$

$$-4\varepsilon\left[\int dx\, x\, J_0\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right]\left[\int dx\, x\, J_0\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^3\right] + 2\cdot 4\varepsilon\cdot\left[\int dx\, x\, J_1\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\frac{x}{1+x^2}\right]^2 =$$

$$= \left[\int dx\, x\, J_0(\cdot)\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right]^2 + 4\varepsilon\left\{2\left[\int dx\, x\, J_1(\cdot)\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\frac{x}{1+x^2}\right]^2 - \left[\int dx\, x\, J_0\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right]\cdot\left[\int dx\, x\, J_0(\cdot)(\cdot)^3\right]\right.$$

↑ сами, функции чисто (полправка при $a^2c^2 \neq 0$)

$$G(\delta,z) = \int_0^\infty dx\, e^{-xz}\sum_\mu J_\mu^2(\delta,x) = \int dx\, e^{-xz}\left[(\text{usov}) + 4\varepsilon\{\dots\}\right]$$

$$W_m^{\text{термо}} = \left(\frac{\tau}{R}\right)^3\frac{1}{\beta}\left[G(\delta,0) - G\left(\delta,\frac{L}{\tau}\right)\right] = \left|\frac{\tau}{R} = \underbrace{c(1-a^2)}_{\tau_0}(1+\varepsilon)\right| =$$

$$= \frac{1}{\beta}c^3(1-a^2)^3(1+\varepsilon)^3\int_0^\infty dx\left(1-e^{-x\frac{L}{\tau_0}(1-\varepsilon)}\right)\left[(\text{usov}) + 4\varepsilon\{\dots\}\right] =$$

$$= \frac{c^3}{\beta}(1-a^2)^3(1+3\varepsilon)\int_0^\infty dx\left[1-e^{-x\frac{L}{\tau_0}}\left(1+\frac{xL}{\tau_0}\varepsilon\right)\right]\left[(\text{usov}) + 4\varepsilon\{\dots\}\right]$$

(можело и така, когато x клони $\to\infty$.

$$(1+3\varepsilon)(K_1+K\cdot\varepsilon)\left[us + 4\varepsilon\cdot\{\dots\}\right] = \left[K_1 + \varepsilon(3K_1+K)\right]\left[us + 4\varepsilon\{\dots\}\right] =$$

$$= K_1\cdot us + \varepsilon\left[us\cdot(3K_1+K) + 4K_1\{\dots\}\right]$$

$$W_m^{\text{термо}}(a) = \frac{c^3}{\beta}(1-a^2)^3\left[\int dx\left(1-e^{-x\frac{L}{\tau_0}}\right)(us) + \varepsilon\left[\int dx\left\{3\left(1-e^{-x\frac{L}{\tau_0}}\right) + (-1)\frac{xL}{\tau_0}e^{-x\frac{L}{\tau_0}}\right\}(us) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 4\int dx\left(1-e^{-x\frac{L}{\tau_0}}\right)\{\dots\}\right]\right],$$ нас интересува знака коеф. пред ε.

$\varepsilon = a^2c^2$

Escaneado con CamScanner

Date. 21 · 11 ·

$$(\text{возр. мом. } t) = [\dots] = \int_c^\infty dx \left\{ 3\left(1 - e^{-\frac{x t_1}{\tau_0}}\right) - \frac{x t_1}{\tau_0} e^{-\frac{x t_1}{\tau_0}} \right\} \left[\int_0^1 dx\, x\, J_0(\alpha x) \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \right]^2 +$$

$$+ 4\left(1 - e^{-\frac{x t_1}{\tau_0}}\right) \left\{ 2 \left[\int_0^1 dx\, x\, J_1(\alpha x) \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \frac{x}{1+x^2} \right]^2 - \left[\int_0^1 dx\, x\, J_0(\alpha x) \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \right] \left[\int_0^1 dx\, x\, J_0(\alpha x) \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \right] \right.$$

Не решено по $\xi = c^2 a^2$: $J_\mu(\delta, x) = (-1)^\mu \cos\delta \int_0^1 dx\, x\, J_\mu(\alpha x) \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \left(\frac{\sqrt{1-\lambda^2}-1}{\lambda}\right)^\mu$

где $\lambda = \frac{2x}{1+x^2} \sin\delta$.

$$W_m^{\text{терм}}(a) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{t_1}{R}\right)^3 \int_0^\infty dx \left(1 - e^{-x\frac{t_1}{\tau}}\right) \sum_\mu J_\mu^2(\delta, x), \qquad \tau = \tau(a) = cR\frac{1-a^2}{1-c^2a^2}$$

21/XI Коссе М предлагает ввести из-за температурных зависимостей эф. радиус "Core" $q = \frac{c}{g}(1-a^2) = \frac{b}{L}(1-a^2)$.

Неустойчивость Мат.-модели

Если минимизировать $W_{tot}(q, a)$ по q, то для q получается ур-е Ухва. Только $\xi = \frac{b}{L}$ там надо заменить на $q = \frac{b}{L}(1-a^2)$.

При введении q в кинетическую энергию $W(a)$ появляется член $\lambda^2 g^2 \ln(1-a^2) = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \ln(1-a^2) \approx -\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 a^2$, для $a \ll 1$.

Теперь (см. 12/XI): $\frac{1}{4\pi M_s^2 V_a} W(a) = W(0) + \frac{1}{2} W''(0) a^2 - \frac{4}{3} a h$

$$\frac{1}{2} W''(0) = 2N_x(\beta) - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2, \text{ и } \chi = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{1}{W''(0)} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{1}{2\left[2N_x(\beta) - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2\right]}$$

– начальная восприимчивость возрастает по сравнению с 12/XI.

Линия потери устойчивости вихря $\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 = 2N_x(\beta)$ или

$\left(\frac{R_{c1}}{R_0}\right)^2 = \frac{1}{2N_x(\beta)}$, $\frac{R_{c1}(\beta)}{R_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{N_x(\beta)}}$. Этот $R_{c1} < R_{c1}^{\text{идеал.}} = \frac{R_0}{\sqrt{N_x(\beta)}}$,

т.е. Мат.-модель все же не подходит для описания потери устойчивости вихря без поля. Но для $H_{an}(\beta)$ она дает неплохие результаты. (Или рисовать при $a \ll 1$ надо иначе – см. 5/II стр.)

27-26/XI Подача документов на US-visa, вылеты в top travel (июнь) и ам. посольство. Написание статьи с К. Мотловым, "Vortex in H".

27/XI Вопросы:

- 1) Намагниченность в комплексном представлении (z)
- 2) Доп-во независимости W_{ex} от "φ" при конформ. преобразовании
- 3) Комплексная формулировка модели Вудса-Бака.

Escaneado con CamScanner

Date.

1) Для 2D-задач $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$, т.к.

$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ и $\vec{m} = \vec{m}(x,y)$, $|\vec{m}| = 1$.

$m_x + i m_y = \frac{2W(z)}{1+|W(z)|^2}$, $m_z = \frac{1-|W|^2}{1+|W|^2}$, $W = tg\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}$, $z = x+iy$.

$\vec{m} = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$

Если ввести $m^+ = m_x + i m_y$, то (см. 17/3) $\frac{\partial m^+}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{div}\vec{m} + i(\operatorname{rot}\vec{m})_z\right]$,

т.е. $\operatorname{div}\vec{m} = 2\,\mathrm{Re}\frac{\partial m^+}{\partial z} = 4\,\mathrm{Re}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{W(z)}{1+|W|^2}\right)$

Ур-е для магнитостат. потенциала $\varphi_m(\vec{r})$ $\Delta\varphi_m = -4\pi\operatorname{div}\vec{m}$

преобразуется в-д $4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\varphi_m(z,\bar{z}) = (-4\pi)\,4\,\mathrm{Re}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{W}{1+|W|^2}\right)$ или

$$\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial z\partial\bar{z}} = (-4\pi)\,\mathrm{Re}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{W}{1+|W|^2}\right)$$ – так, если нет зависимости от перп. координаты z, а она есть.

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{W}{1+|W|^2}\right) = \frac{W'(1+|W|^2) - W(W'\bar{W} + W\frac{\partial\bar{W}}{\partial z})}{(1+|W|^2)^2} = \frac{\frac{\partial W}{\partial z} - W^2\frac{\partial\bar{W}}{\partial z}}{(1+|W|^2)^2}$$

Для аналит. функции $\frac{\partial\bar{W}}{\partial z} = 0$, т.к. $W(z) = f(z)$, $\overline{W(z)} = W(\bar{z})$, поэтому

$$\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial z\partial\bar{z}} = (-4\pi)\frac{1}{(1+|W|^2)^2}\,\mathrm{Re}\frac{\partial W}{\partial z}. \quad \vec{H}_m = -\nabla\varphi_m = -\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi_m}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi_m}{\partial z}\vec{k}\right),$$

не все так просто. Ведь $\vec{m}$ не зависит от координаты z, но $\varphi_m(x,y,z)$ и $\vec{H}_m$ по z будут зависеть.

2) Тополог. заряд $Q = \frac{1}{4\pi}\int d\theta\,d\varphi\sin\theta$, $\begin{cases} m_x + i m_y = \sin\theta e^{i\varphi} \\ m_z = \cos\theta \end{cases}$



$\sin^2\theta(x,y) = m_x^2 + m_y^2 = m_\rho^2$ если $m_\rho = 0$.

$\sin\theta(x,y) = \frac{2tg\frac{\theta}{2}}{1+tg^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2|W|}{1+|W|^2}$, $W = W(z)$.

Для внутр. узла ($\vec{v}=1$) $Q = \frac{1}{4\pi}\int d\theta\,d\varphi\sin\theta = \left|\begin{matrix}\varphi = \varphi \text{ по сфер. } y_{i+1} \\ \theta = \theta \\ \text{сферич. углы } \vec{m}\end{matrix}\right| = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{0} d\theta\sin\theta =$

$= \frac{1}{4\pi}\cdot 2\pi\cdot\cos\theta\Big|_{\pi/2}^{0} = \frac{1}{2}\cdot 1 = 1/2$. Можно $\int$ только по "core", т.к. вне core угол $\theta = \pi/2 = \mathrm{const}$

Энергия BP soliton'а $E_\nu^{BP} = 4\pi\alpha M_s^2|p|L$, $w_{ex} = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial\vec{m}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\vec{m}}{\partial x_\beta}$. $W_{ex} = \frac{C}{2}\int dV(\nabla m_\alpha)^2$

Энергия vortex'а Usova $\frac{1}{\nu_4 M_s^2}W_{ex} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2\left[2 + \ln\frac{R}{b}\right]$

(2 – энергия ядра, $\ln\frac{R}{b}$ – энергия "хвоста")

$W_{ex}^{sol} = \pi R^2 L\cdot 2\frac{R_0^2}{R^2} = 2\pi L\frac{C}{M_s^2}$, $\left(C = \alpha M_s^2\right)$.

Date. . .

Очевидно $\frac{1}{M_s^2} E_\nu^{BP} = 4\pi L C |\nu|$ и $\frac{1}{M_s^2} W_{ex}^{sol} = \dots$

$E_\nu^{BP} = 4\pi L C |\nu|$ и $W_{ex}^{sol} = 2\pi L C$, C – обм. константная как у Ward'93.

Т.е. $W_{ex}^{sol} = E_\nu^{BP}$ при $\nu = 1/2$ — солитонная часть обменной энергии vortex изола соответ. топологическому заряду $1/2$ ($Q = \frac{1}{2}$)
или $Q = (1/2)\nu$ – тополог. заряд „сопе" вихря.
Или если считать $\nu = 1$, то $W_{ex}^{sol} = (1/2) E_1^{BP}$.

Заметим, что $\forall \Sigma$ для $\nu = 2$ было $W_{ex} = 4V_d \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \left[1 + \ln \frac{R}{b}\right] = 4\pi L C \left[1 + \ln \frac{R}{b}\right]$

т.е. $W_{ex}^{sol} = 4\pi L C$, что соответствует тополог. заряду $Q = 1$.

Или $W_{ex}^{sol}(\nu) = \frac{1}{2} E_\nu^{BP} = 2\pi L C |\nu|$ – солитонная часть энергии vortex-сопения $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \left(\frac{\rho}{b}\right)^{|\nu|}$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Конф. преобраз. $O(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} = -\frac{1}{\bar{a}} \frac{z-a}{z-\frac{1}{\bar{a}}}$, Согласно Gross'77

$\xi = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{\bar{a}}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \bar{a}^{-1}\right)$ имеет смысл центра инстантона,

а $r = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\bar{a}} - a\right|$ – радиус (радиус) инстантона.

Легко показать из определения тополог. заряда Q:

$Q_{инст} = \frac{1}{\pi} \int \frac{d^2\vec{\rho}}{(1+|w|^2)^2} \left[\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right] = 0$, т.е. что инстон-область дает с вихрей,

где $w(z) = i\frac{z}{|z|} = i\sqrt{\frac{z}{\bar{z}}}$ не вносит вклада в Q ($|w|=1$).

Но вносит вклад в обмен. энергию

$W_{ex}^{инст} = 4LC \int \frac{d^2\vec{\rho}}{(1+|w|^2)^2} \left[\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right] = \left|\begin{array}{l}\text{для инстона} \\ |w|=1\end{array}\right|$

$= 4LC \frac{1}{4} \int d^2\vec{\rho} \left[\left(\frac{i}{2}\frac{1}{|z|}\right)\left(\frac{-i}{2}\frac{1}{|z|}\right) + \left(-\frac{i}{2}\frac{\sqrt{z}}{\bar{z}^{3/2}}\right)\left(\frac{i}{2}\frac{\sqrt{\bar{z}}}{z^{3/2}}\right)\right] =$

$= LC \int_{S_d(\rho>0)} d^2\vec{\rho}\, \frac{1}{2}\frac{1}{|z|^2} = \frac{1}{2} LC \cdot 2\pi \int_b^R d\rho\, \rho \frac{1}{\rho^2} = \pi L C \ln \frac{R}{b}$

$\frac{1}{M_s^2 V_d} W_{ex}^{инст} = \frac{1}{\pi R^2 L M_s^2} \pi L C \ln\left(\frac{R}{b}\right) = \left(\frac{C}{M_s^2}\right)\frac{1}{R^2} \ln \frac{R}{b} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \ln \frac{R}{b}$, $R_0^2 = \frac{C}{M_s^2} = \frac{4}{M_s^2}$

Инстон с $|w|=1$ соответ. области вне „сопе".

Escaneado con CamScanner

Date. 28 • 11 •

Необходимые сведения о комплексе функциях, конформных преобразованиях и "Related things" (Moisa - Feshbach)

Двумерное векторное $\vec{f} = (u, v)$, $f = u + iv$, $g = s + it$, $\bar{f}g = \vec{f}\cdot\vec{g} + i|\vec{f}\times\vec{g}|$

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\bar{\nabla} = 2\frac{\partial}{\partial z}$.

$\bar{\nabla}\vec{g} = \operatorname{div}\vec{g} + i|\operatorname{rot}\vec{g}|$, $\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$.

$w = f(z) = u + iv$, $z = x + iy$. $w = f(z)$ – конформное преобразование, если $f(z)$ аналитическая, т.е. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ (усл. Коши-Римана) Cauchy–Riemann

$\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ для аналитич. функции $f(z)$.

$|f(z)|$ – задает изменение масштаба при конформ. преобразовании.

Преобразование инверсии $w(z) = \frac{a^2}{\bar{z}}$ (внутр. круга радиуса "a" → наружу).

(R. Greene – S Krantz): Рассм. $f_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, $|f(z)| < 1$ если $|z| < 1$.

$f(z)$ is holomorphic если (analytic) $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. $\det \hat{T} = 1\cdot(-\bar{a}) - (-a) = 1\cdot 1 - (-a)(-\bar{a}) = 1 - |a|^2 \geq 0$.

$f_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ is holomorphic (конформное) отображение диска $|z| < 1$ самого на себя.

$|f_a(z)| < 1$ при $|z| < 1$, пусть $f_a(z_1) = z_2$, тогда $|f_a'(z_1)| = \frac{1-|z_2|^2}{1-|z_1|^2}$.

$f_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ с $|z| < 1$ называют преобразованием Möbius (диска в диск)

Если конформ. отображение $w = f(z) = u + iv$, то якобиан преобразования в x, y и $u(x,y), v(x,y)$ $\Rightarrow J = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - v_x u_y = (u_x)^2 + (v_x)^2 = |f'(z)|^2$ в силу ус. Коши-Римана. важная формула.

Конформ. преобразованием можно круг ⊘ отобразить в ⊘ (полуплоскость), что может пригодиться при расш. SW в цилиндре.

Более общее конформ. преобразование: $f_a(z) = \mu\frac{z-a}{R^2-\bar{a}z}$, $|\mu| = R^2$, $|a| < R$ (диска радиуса R в себя)

Date. . .

Потен. Грина сист. $W(z) = \begin{cases} \frac{i}{c} z, & |z| < c \\ i\frac{z}{|z|}, & |z| > c \end{cases}$. Конформ. преобразование: $z \to z' = \Theta(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

Конформ. преобразование дает $W(z,\bar{z}) \to W(z',\bar{z}')$, $\bar{z}' = \frac{\bar{z}-\bar{a}}{1-a\bar{z}}$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W(z',\bar{z}')}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} = \left.\frac{\partial W(z)}{\partial z}\right|_{z=z'} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \Theta(z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right) = \frac{(z-a)(1-\bar{a}z) - (z-a)(-\bar{a})}{(1-\bar{a}z)^2} = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}$$

Якобиан замены переменных (x,y) $z=x+iy$ на (x',y') $z'=x'+iy'$ $J = \left|\frac{\partial \Theta(z)}{\partial z}\right|^2 =$

$$= \left|\frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}\right|^2 = \left|\begin{array}{c}\text{в нуле бейн.} \\ a=\bar{a}\end{array}\right| = (1-a^2)^2\left|\frac{1}{(1-az)^2}\right|^2 = \frac{(1-a^2)^2}{(1-az)^2(1-a\bar{z})^2} =$$

$$= \frac{(1-a^2)^2}{\left[1-a(z+\bar{z})+a^2|z|^2\right]^2} \cdot \quad J_{z\to z'} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$dx\,dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} \end{vmatrix} dx'dy'$. $z' = \Theta(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, $\overline{\Theta(z)} = \bar{z}' = \frac{\bar{z}-a}{1-a\bar{z}}$ функция от $\bar{z}$.

(функция точки z)

$$J_{z'\to z} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial z}{\partial z'}\right|$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W(z',\bar{z}')}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}'}\frac{\partial \bar{z}'}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial z'}\frac{\partial \Theta}{\partial z}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial W(z',\bar{z}')}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial W}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}'}\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial W}{\partial \bar{z}'}\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{z}}$$

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{W}(z',\bar{z}')}{\partial z} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{z}'}\frac{\partial \bar{z}'}{\partial z} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial z'}\frac{\partial \Theta}{\partial z}$$

$$W_{ex} = 4\pi C \int_{S_1} dx\,dy \frac{1}{(1+|w|^2)^2}\left[\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{W}}{\partial z}\right] =$$

$$= 4\pi C \int_{S_1'} dx'dy' J_{z'\to z} \frac{1}{(1+|w|^2)^2}\left[\frac{\partial W}{\partial z'}\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{z}'}\frac{\partial \Theta}{\partial z}\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}'}\frac{\partial \bar{W}}{\partial z'}\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right] =$$

$$= 4\pi C \int_{S_1'} dx'dy' J_{z'\to z} \frac{1}{(1+|w|^2)^2}\left[\frac{\partial W}{\partial z'}\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{z}'} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}'}\frac{\partial \bar{W}}{\partial z'}\right]\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \Theta}{\partial z}$$

Но $\frac{\partial \Theta(z)}{\partial z}\frac{\partial \bar{\Theta}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \Theta}{\partial z}\left(\overline{\frac{\partial \Theta}{\partial z}}\right) = \left|\frac{\partial \Theta(z)}{\partial z}\right|^2 = J_{z\to z'}$

Т.к. конформ. преобразование $z' = \Theta(z)$ $\frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial z'}}$, где $z = \tilde{\Theta}(z')$ обратное преобразование

$$W_{ex} = 4\pi C \int_{S_1'} dx'dy' \frac{1}{(1+|w|^2)^2}\left[\frac{\partial W}{\partial z'}\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{z}'} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}'}\frac{\partial \bar{W}}{\partial z'}\right] J_{z'\to z} J_{z\to z'}$$

$J_{z'\to z} J_{z\to z'} = \left|\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right|^2\left|\frac{\partial z}{\partial z'}\right|^2 = 1$ в конечном итоге $S_1 = S_1'$ т.к. функция преобразования на круг в виде $z' = \Theta(z)$.

self-to-self

Escaneado con CamScanner

W_{ex} для conform. mode of vortex shift

Date.

$$W_{ex} = 4L\mathbb{C}\int_{S_d'} dx'dy' \frac{1}{(1+|w|^2)^2}\left[\frac{\partial w}{\partial z'}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}'} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}'}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z'}\right] =$$

$$= 4L\mathbb{C}\int_{S_d} dx\,dy \frac{1}{(1+|w|^2)^2}\left[\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right]$$ несмотря на конформ. замену $z' = O(z)$.

т.е. обычная энергия, является инвариантом относительно конформ. замены $z \to z' = O(z)$, если $O(z)$ – аналит. функция. Это верно даже для конечной области S_d. И где $S_d = S_d'$ не обязательно(?). Нет, это обязательно

Для vortex „core", где $w(z)$ аналитична, инвариантность W_{ex} относительно $z \to z' = O(z)$ можно связать с сохранением топологич. заряда Q, т.к. $W_{ex} \sim Q$ внутри „core". Но из-за области вне „core" пропорциональность $W_{ex}^{tot} \sim Q$ нарушается. W_{ex} сохраняется только для $z \to z' = O(z)$ self-to-self conf. mapping. 29/XI – 30/XI

Визит в USA – посольство и Carrefour. Fax's.

~~Написание~~ и редактирование статьи с К. Меловым. 1/XII

Сравнение „rigid vortex" с эксп.

→ Построим h_{an}, h_o, h_n в „rigid vortex" model для 2/XII небесада при $L_0 = 40$ nm и 60 nm и сравним с ею экспериментом – см. табл. 17/V и 19/V. Крит. числа рассчитаны ещё 17/XI.

Есть эксперимент по $L = 60$ nm – H_n, H_{an}
$L = 40$ nm – H_{an}; H_n (file Nov-May13.opj) – там сравн. расчёт и exp.

~~Есть ещё~~ $L = 80$ nm, $R = 1$ μm – H_n, H_{an}; $L = 60$ nm, $R = 0{,}4$ μm – H_n, H_{an} ($\frac{3}{2}$ μm) (e-mail от 27.06.00)

Т.к. H_n сравнивался с экспериментом в file Nov-May13.opj, (для $L = 40$ nm) и H_{an} согласуется с H_{an}^{calc} для $L_0 = 40$ nm плохо, но расчёт. $L = 60$ nm.

Надо достать H_{an}, H_o, H_n ($L = 60$ nm) для малых $R/L_0 < 2{,}5$.

R/L_0	2,22	2	1,82	1,67	1,54	1,33	1,05
h_{an}	2,13	2,27	2,39	2,50	2,61	2,81	3,14
h_o	1,59	1,65	1,71	1,75	1,79	1,85	1,89
h_n	0,490	0,528	0,560	0,594	0,623	0,671	0,727

Видно, что для $L_0 = 60$ nm все 4 эксп. точки хорошо согласуются с кривой $h_{an}(R/L_0)$ „rigid vortex" model.

Escaneado con CamScanner

Date. 04. 12. 2D - Vortex of Bryant-Suhl, $m_z=0$ - "core" нет

4/XII 3) лекция 27/XI: Комплексная формулировка модели Bryant-Suhl - первый шаг к численно. представлению магнитных

2D задача ($xy \to \vec{r}$) без объема. $m_z=0$ - "core" нет.

$\vec{m} = (m_x, m_y) = (\sin\theta, -\cos\theta)$

$m^+ = m_x + i m_y = \sin\theta - i\cos\theta = -i\left[\cos\theta + i\sin\theta\right] = -i e^{i\theta(x,y)}$

$m_x + i m_y = \dfrac{2W(z)}{1+|W|^2} = \left|\begin{matrix}\text{core нет}\\ |W|^2=1\end{matrix}\right| = W(z)$,

т.е. $W(z) = e^{i[\theta(x,y) - \pi/2]}$. С другой стороны "the "core":

$W(z) = i\dfrac{\Theta(z)}{|\Theta(z)|} = i\dfrac{f(z)}{|f(z)|}$, где $f(z)=z$ для несжимаемого вихря ($h=0$)

При $h\neq 0$ уравнение на $\Theta(x,y,h)$: $-x\sin\theta + y\cos\theta + \dfrac{h\sin\theta}{\sqrt{1+2h\cos\theta+h^2}} = 0$

Какая $f(z)$ соотв. сжимаемому вихрю при $h\neq 0$?

$$\begin{cases} m_x = \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{(x-h^*)^2+y^2}} \\ m_y = -\cos\theta = -\dfrac{(x-h^*)}{\sqrt{(x-h^*)^2+y^2}} \end{cases}; \quad h^* = \frac{h}{\sqrt{1+h^2+2h\cos\theta}}$$

$\operatorname{tg}\theta(x,y) = \dfrac{y}{(x-h^*)}$



При $h\to 0$ $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi$, $\theta = \varphi$ (намагничена) и $m_x = \sin\varphi$, $m_y = -\cos\varphi$



$\dfrac{f(z)}{|f(z)|} = e^{i(\theta-\pi/2)}$, $\operatorname{Arg}(f(z)) = \theta(x,y) - \pi$, $f(z) = |f(z)| e^{i[\theta(x,y)-\pi]}$

$m^+ = m_x + i m_y = \dfrac{\partial A}{\partial y} + i\left(-\dfrac{\partial A}{\partial x}\right) = \left(\dfrac{\partial}{\partial y} - i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)A = (-i)\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)A = (-i)2\dfrac{\partial}{\partial z}A$

$\vec{m} = \operatorname{rot}\vec{A}$, $\vec{A} = (0,0,A)$. $\quad m^+ = -i\nabla A$, $\nabla = 2\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}$.

$\operatorname{div}\vec{m} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} \equiv 0$. (тех. теорема нет)

$\dfrac{\partial}{\partial z} m^+ = (-i)2\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} A = \left(-\dfrac{i}{2}\right)\Delta A$, $\Delta = \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$

С другой стороны $\dfrac{\partial m^+}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}(m_x, m_y) = \dfrac{1}{2}\operatorname{div}\vec{m} + \dfrac{i}{2}|\operatorname{rot}\vec{m}|$

Сл. 18/I $\dfrac{\partial}{\partial z} m^+ = \dfrac{\partial}{\partial z}\left[m_x + i m_y\right] = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\left[m_x + i m_y\right] = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial m_x}{\partial x} + \dfrac{\partial m_y}{\partial y}\right) + \dfrac{i}{2}\left(\dfrac{\partial m_y}{\partial x} - \dfrac{\partial m_x}{\partial y}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\operatorname{div}\vec{m} + \dfrac{i}{2}(\operatorname{rot}\vec{m})_z$, $\dfrac{\partial m^+}{\partial z} = \dfrac{i}{2}(\operatorname{rot}\vec{m})_z = -\dfrac{i}{2}\Delta A_z$, $\operatorname{rot}\vec{m} = -\Delta\vec{A}$

т.к. A_z не обл. гармонич. функцией, то $\operatorname{rot}\vec{m} \neq 0$.

$A_z(x,y) \overset{(x,y)}{=} A_z(z,\bar{z})$ тогда не будет аналитической.

Итак $\vec{m} = \operatorname{rot}\vec{A}$, $\operatorname{rot}\vec{m} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}\underbrace{\operatorname{div}\vec{A}}_{=0} - \nabla^2\vec{A} = -\Delta\vec{A}$.

На бок. поверхности дома $\rho = R$: $\vartheta = (\vec{m}\cdot\vec{n}) = (\sin\theta, -\cos\theta)(\cos\varphi, \sin\varphi) =$

$= \sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi = \sin(\theta-\varphi)$

Escaneado con CamScanner

Date. 08 . 12 .

Ур-е на $\theta(x,y)$ согласно 1/VII: $\rho \sin(\theta-\varphi) = \frac{h\sin\theta}{\sqrt{1+h^2+2h\cos\theta}}$

$\sin(\theta-\varphi)\big|_{\rho=R} = \sin(\theta-\varphi) = \frac{1}{R}\frac{h\sin\theta}{\sqrt{1+h^2+2h\cos\theta}} \to 0$ если $h \to 0$. Это выполнено

$\operatorname{div}\vec{m} = 2\operatorname{Re}\frac{\partial}{\partial z} m^+(z) = 2\operatorname{Re}\left[\frac{\partial}{\partial z} w(z)\right] = 2\operatorname{Re}\frac{\partial w}{\partial z} = 0$. $\quad w(z) = e^{i[\theta(x,y)-\pi/2]}$

$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) e^{i[\theta(x,y)-\pi/2]} = \frac{1}{2}e^{-i\pi/2}\left[e^{i\theta}\cdot i\frac{\partial\theta}{\partial x} - i e^{i\theta} i\frac{\partial\theta}{\partial y}\right] =$

$= \frac{1}{2}(-i)e^{i\theta}\cdot i\left[\frac{\partial\theta}{\partial x} - i\frac{\partial\theta}{\partial y}\right] = e^{i\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{1}{2}e^{i\theta}\left[\frac{\partial\theta}{\partial x} - i\frac{\partial\theta}{\partial y}\right]$

$0 = 2\operatorname{Re}\frac{\partial w}{\partial z} = 2\operatorname{Re}\ \frac{1}{2}e^{i\theta}\left[\frac{\partial\theta}{\partial x} - i\frac{\partial\theta}{\partial y}\right] = \operatorname{Re}(\cos\theta + i\sin\theta)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} - i\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) =$

$= \operatorname{Re}\left[\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial y} + i(\dots)\right] = \cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0$ — ур-е на $\theta = \theta(x,y)$

или $-m_y\frac{\partial\theta}{\partial x} + m_x\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0$. Можно было $\operatorname{div}\vec{m} = \frac{\partial\sin\theta}{\partial x} - \frac{\partial\cos\theta}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0$

Пусть $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $|f|^2 = \frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}}\cdot\frac{az+b}{cz+d} = \frac{|a|^2|z|^2 + b\bar{a}\bar{z} + \bar{b}az + |b|^2}{|c|^2|z|^2 + d\bar{c}\bar{z} + \bar{d}cz + |d|^2}$

Найти вещ. однозначно лин. преобразования a,b,c,d.

$w(z) = e^{i(\theta-\pi/2)} = \sin\theta - i\cos\theta = u + iv$, $\operatorname{div}\vec{m} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ — условие Коши-Римана,

$\Rightarrow w(z)$ — комплексная.

→ Задача в US — посольство, Итакия, Тонг даетин-фанцуз. 5-7/XII
Редактирование статьи с К. Мелиховой.

→ Б. Иванов прислал письмо с анализом устойчивости 8/XII
Vortex в поле. Разберемся.

1) Радиус "сопла" $\Delta \ll R$. $W_{ex} = \frac{A}{(2)}\int d^3\vec{r}\,(\nabla\varphi)^2$ преобразуем в сопле

Тогда по БАЧ: $W_{ex} = \pi A L \ln\left(\frac{R^2-x^2}{\Delta^2}\right)$, x — смещение центра вихря.

$\frac{1}{V_d}W_{ex} = \frac{\pi A L}{\pi R^2 L}\ln\left(\frac{R^2-x^2}{\Delta^2}\right) = \frac{A}{R^2}\ln\left(\frac{1-(x/R)^2}{(\Delta/R)^2}\right) = \left|A = \frac{C}{2}\right| =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{C}{R^2}\right)\ln\left(\frac{1-\xi^2}{(\Delta/R)^2}\right) = \frac{1}{2}M_s^2\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\left[\ln(1-\xi^2) - 2\ln\frac{\Delta}{R}\right] =$

$= -M_s^2\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\ln\frac{\Delta}{R} + \frac{1}{2}M_s^2\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\ln(1-\xi^2)$, $\left(\xi = x/R\ (\text{мое "S"})\right)$.

$\frac{1}{M_s^2 V_d}W_{ex}(\xi) = -\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\ln\frac{\Delta}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\ln(1-\xi^2)$ — это совпадает с моей $W_{ex}(\xi)$ из заготовки статьи APL с поправкой. $R_0^2 = \frac{C}{M_s^2}$.

Escaneado con CamScanner

Date. 04. 12. 2D - Vortex of Bryant-Suhl, $m_z=0$ - core" нет

4/XII 3) лекция 28/XI: Комплексная формулировка модели Bryant-Suhl - первый шаг к комплексному представлению намагниченности

2D задача ($xy \Rightarrow \vec{r}$) без объема. $m_z=0$ - „core" нет.

$\vec{m} = (m_x, m_y) = (\sin\theta, -\cos\theta)$

$m^+ = m_x + i m_y = \sin\theta - i\cos\theta = -i\left[\cos\theta + i\sin\theta\right] = -ie^{i\theta(x,y)}$

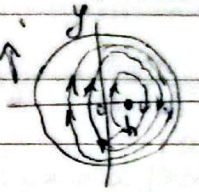
$m_x + i m_y = \frac{2W(z)}{1+|W|^2} = \left|\begin{matrix}\text{core" нет}\\ |W|^2=1\end{matrix}\right| = W(z)$,

т.е. $W(z) = e^{i[\theta(x,y) - \pi/2]}$. С другой стороны "не „core":

$W(z) = i\frac{\Theta(z)}{|\Theta(z)|} = i\frac{f(z)}{|f(z)|}$, где $f(z)=z$ дает несмещенного вихря $h=0$

При $h\neq 0$ уравнение на $\theta(x,y,h)$. $-x\sin\theta + y\cos\theta + \frac{h\sin\theta}{\sqrt{1+2h\cos\theta+h^2}} = 0$

Какая $f(z)$ соотв. смещенному вихрю при $h\neq 0$?



$$\begin{cases} m_x = \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{(x-h^*)^2+y^2}} \\ m_y = -\cos\theta = -\dfrac{(x-h^*)}{\sqrt{(x-h^*)^2+y^2}} \end{cases}; \quad h^* = \frac{h}{\sqrt{1+h^2+2h\cos\theta}}; \quad \operatorname{tg}\theta(x,y) = \frac{y}{(x-h^*)}$$

При $h\to 0$ $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi$, $\theta = \varphi$ (с точностью до π) и $m_x = \sin\varphi$, $m_y = -\cos\varphi$



$i\frac{f(z)}{|f(z)|} = e^{i(\theta - \pi/2)}$, $\operatorname{Arg}(f(z)) = \theta(x,y) - \pi$; $f(z) = |f(z)|e^{i[\theta(x,y)-\pi]}$

$m^+ = m_x + i m_y = \frac{\partial A}{\partial y} + i\left(-\frac{\partial A}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial x}\right)A = (-i)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)A = (-i)2\frac{\partial}{\partial \bar z}A(z)$

$\vec m = \operatorname{rot}\vec A$, $\vec A = (0,0,A)$. $\quad m^+ = -i\nabla A$, $\nabla = 2\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$.

$\operatorname{div}\vec m = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec A \equiv 0$. тождество-теорема нет $\quad \frac{\partial}{\partial z}m^+ = (-i)2\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}A = \left(-\frac{i}{2}\right)\Delta A$, $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

С другой стороны $\frac{\partial m^+}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(m_x, m_y) = \frac{1}{2}\operatorname{div}\vec m + \frac{i}{2}|\operatorname{rot}\vec m|$

Сл. 18/I $\frac{\partial}{\partial z}m^+ = \frac{\partial}{\partial z}\left[m_x + i m_y\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[m_x + i m_y\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial m_y}{\partial x} - \frac{\partial m_x}{\partial y}\right) =$

$= \frac{1}{2}\operatorname{div}\vec m + \frac{i}{2}(\operatorname{rot}\vec m)_z$, $\frac{\partial m^+}{\partial z} = \frac{i}{2}(\operatorname{rot}\vec m)_z = -\frac{1}{2}\Delta A_z$, $\operatorname{rot}\vec m = -\Delta\vec A$

т.к. A_z не аб. гармонич. функция, то $\operatorname{rot}\vec m \neq 0$.

$A_z(x,y) \overset{(x,y)}{=} A_z(z,\bar z)$ тогда не будет аналитической.

Итак $\vec m = \operatorname{rot}\vec A$, $\operatorname{rot}\vec m = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec A = \operatorname{grad}\underbrace{\operatorname{div}\vec A}_{=0} - \nabla^2\vec A = -\Delta\vec A$.

На пов. неферромаг. доме $\rho = R$: $\vartheta = (\vec m\cdot\vec n) = (\sin\theta, -\cos\theta)(\cos\varphi, \sin\varphi) =$

$= \sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi = \sin(\theta - \varphi)$

Escaneado con CamScanner

Date. 08 . 12 .

Ур-е на $\Phi(x,y)$ сводится к $\frac{1}{\sqrt{u}}$: $\rho \sin(\theta-\varphi) = \frac{h\sin\theta}{\sqrt{1+h^2+2h\cos\theta}}$

$\sin(\theta-\varphi)\big|_{\rho=R} = \frac{1}{R}\frac{h\sin\theta}{\sqrt{1+h^2+2h\cos\theta}}$ ⇔ $h=0$. Вне фокальной

$\lim \frac{\partial}{\partial z} m^2(z) = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial z} W(z)\right] = 2\,\mathrm{Re}\frac{\partial w}{\partial z} = 0$. $W(z) = e^{i[\Phi(x,y) - \pi/2]}$

$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) e^{i[\Phi(x,y)-\pi/2]} = \frac{1}{2} e^{-i\pi/2}\left[e^{i\Phi} i\frac{\partial\Phi}{\partial x} - i e^{i\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right] =$

$= \frac{1}{2}(-i) e^{i\Phi} i\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x} - i\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right] = e^{i\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{1}{2} e^{i\Phi}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x} - i\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right]$

$\Rightarrow 2\,\mathrm{Re}\frac{\partial w}{\partial z} = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{2} e^{i\Phi}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x} - i\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right] = \mathrm{Re}\,(\cos\Phi + i\sin\Phi)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - i\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) =$

$= \mathrm{Re}\left[\cos\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \sin\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial y} + i(\dots)\right] = \cos\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \sin\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0$ — ур-е на $\Phi(x,y)$

$\vec{m} = -m_y\frac{\partial\Phi}{\partial x} + m_x\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0$. Нужное обычно $\mathrm{div}\vec{m} = \frac{\partial\sin\Phi}{\partial x} - \frac{\partial\cos\Phi}{\partial y} = \cos\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \sin\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0$

Пусть $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $|f|^2 = \frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}}\cdot\frac{az+b}{cz+d} = |a|^2|z|^2 + ba\bar{z} + b\bar{a}z + |b|^2$

Дальше всегда сводится к произведениям a,b,c,d. $|c|^2|z|^2 + d\bar{c}z + dc\bar{z} + |d|^2$

$W(z) = e^{i\Phi(z)} = \sin\Phi - i\cos\Phi = u + iv$, $\mathrm{div}\vec{m} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ — выполнено для любых $\Phi(z)$ — аналитических.

Задача 6 US - неоднородное, Пласкин, Тонкодисперсные жидкости. 5-9/XII
Результаты обсуждаются с К. Черновой.

Б. Найти в цилиндре вязкого с анизотропией упругости 8/XII
Метод Рэлея-Ритца.

Радиус «сопла» $\Delta \ll R$. $W_{ex} = \frac{A}{2}\int d^3\vec{r}\,(\nabla\Phi)^2$ — энергия «сопла»

Теория из БАЦ: $W_{ex} = \pi A L_1 \ln\left(\frac{R^2-x^2}{\Delta^2}\right)$, x — расстояние центра бисера

$\frac{1}{V_d} W_{ex} = \frac{\pi A L_1}{\pi R^2 L}\ln\left(\frac{R^2-x^2}{\Delta^2}\right) = \frac{A}{R^2}\ln\left(\frac{1-(x/R)^2}{(\Delta/R)^2}\right) = \left|A = \frac{C}{2}\right| =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{C}{R^2}\right)\ln\left(\frac{1-\xi^2}{(\Delta/R)^2}\right) = \frac{1}{2}M_s^2\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\left[\ln(1-\xi^2) - 2\ln\frac{\Delta}{R}\right] =$

$= -M_s^2\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\ln\frac{\Delta}{R} + \frac{1}{2}M_s^2\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\ln(1-\xi^2)$, $\left(\xi = x/R\ (\text{мое } s)\right)$.

$\frac{1}{M_s^2 V_d} W_{ex}(\xi) = -\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\ln\frac{\Delta}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\ln(1-\xi^2)$ — Это совпадает

с $W_{ex}(s)$ из Задачника Сивухина АРК и Ковнеристого. $R_0^2 = \frac{C}{M_s^2}$.

Date. . .

$W(\xi) = \frac{1}{M_s^2 V_0} W(\xi) = W_{0x}(\xi) + W_m(\xi) + W_H(\xi)$

W_m и W_H берем в квадратах. приближении $W_m(\xi) = \frac{1}{2} N_x \xi^2$,

$W_H(\xi) = -h\xi$, а вот $W_{0x}(\xi)$ берем более точно $\sim \ln(1-\xi^2)$.

$$W(\xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \ln(1-\xi^2) + \frac{1}{2} N_x \xi^2 - h\xi$$

$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{1}{1-\xi^2}(-\xi) + N_x \xi - h = 0$ даст $\xi_0(h)$ равновесие.

Если пренебречь членом $\sim \xi^2$, то $\left(N_x - \frac{R_0^2}{R^2}\right)\xi - h = 0$, $\xi_0 = \frac{1}{\left[N_x - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2\right]} h$.

- решение в APL-задании.

$[\dots] = 0$ дает крит. радиус устойчивости вихря "vortex" в рамках "rigid vortex" model $R_c^2 = \frac{R_0^2}{N_x} = \frac{C}{M_s^2 N_x}$. Вихрь устойчив при $R > R_c$.

$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = -\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{(1-\xi^2) - \xi(-2\xi)}{(1-\xi^2)^2} + N_x = 0$

Система ур. для определения h_{an} и ξ_c $\begin{Bmatrix} W'(\xi)=0 \\ W''(\xi)=0 \end{Bmatrix}$:

$$\begin{cases} \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{\xi}{1-\xi^2} = N_x \xi - h \\ \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{1+\xi^2}{(1-\xi^2)^2} = N_x \end{cases}$$

$(R_0/R)^2 = 1/z^2$, $\xi^2 = z$.

$1 + z = N_x z^2 (1-z)^2 = B(1-z)^2$

$1 + z = B(1 - 2z + z^2)$, $B = N_x z^2 = N_x \left(\frac{R}{R_0}\right)^2$

$Bz^2 + z\{-2B - 1\} + (B-1) = 0$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2B}\left[2B+1 \pm \sqrt{(2B+1)^2 - 4B(B-1)}\right] = \frac{1}{2B}\left[2B+1 \pm \sqrt{8B+1}\right]$$

Не сложно берем "-": $\xi_c = \frac{1}{2B}\left[2B+1-\sqrt{8B+1}\right]$, $B = N_x \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = \left(\frac{R}{R_c}\right)$

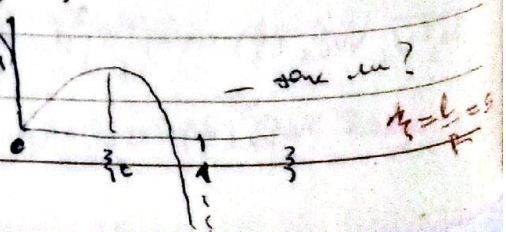
При $R \to R_c = \frac{R_0}{\sqrt{N_x}}$, $B \to 1$ и $\xi_c(R) = \frac{1}{2B}\left[2B+1-\sqrt{8B+1}\right] = \frac{[3-3]}{2} \to 0$.

Или иначе, в духе подхода 7/XI:

$W(\xi) = F_1(\xi) - h F_2(\xi)$, $h(\xi) = \frac{F_1'(\xi)}{F_2'(\xi)}$. Max $h(\xi)$ дает ξ_c, а $h(\xi_c) = h_{an}$.

$F_1(\xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \ln(1-\xi^2) + \frac{1}{2} N_x \xi^2$, $F_2(\xi) = \xi$

$h(\xi) = F_1'(\xi) = -\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{\xi}{1-\xi^2} + N_x \xi$



Действительно, при таком подходе если $\xi_c < 1$ (хотя и не такое как у Б.А.И.).

Escaneado con CamScanner

Date. 10 . 12 .

Однако если учесть следующие по ξ члены в $W_m(\xi)$, то $w_m(\xi)$ будет сильно расти при $\xi \to 1$ и $\max h(\xi)$ может и не быть при $\xi = 1$. Аналогично $W_{0x}(\xi) \sim \ln(1-\xi^2) \to -\infty$ при $\xi \to 1$, но $\xi = S \le 1 - \frac{B}{R} < 1$ и $W_{ex}(\xi)$ тоже не может конкурировать с $W_m(\xi) > 0$.

Т.е. $h(\xi)$ может достигать $\max$, но при ξ несколько ближних к единице ($\xi \approx 1$), где они терпят разрыв. Смысл. Поэтому $\xi_c \approx 1$ (как у меня в APL-диагн.) - разумно

$$\xi_c(B) = \frac{1}{2B}\left[2B+1-\sqrt{8B+1}\right] = 1 + \frac{1}{2B} - \sqrt{\frac{1}{B}+\frac{1}{4B^2}} \Big|_{B=\left(\frac{R}{R_c}\right)^2 \gg 1} \simeq$$

(даже в квадрат. приближении по ξ в $W_m(\xi)$ и $W_H(\xi)$)

$$\simeq 1 - \sqrt{\frac{2}{B}}$$

тоже немного "1" для различного $\frac{R}{R_c}$ (реал. дозв) для которого $B \gg 1$. А при подгонке $W_m(\xi)$ и $W_H(\xi)$ в рамках "rigid vortex" model, ξ_c будет еще ближе к "1".

2) Точное решение по Б.А.Ч., минимизирующее 10/XII
строго (каждую? общепринятую?) vortex при условии $\left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial n}\right)_{S_{ext}} = 0$.

$\vec{m} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) = \left|\text{вне "core"}\ \theta = \pi/2\right| = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) = (m_x, m_y, 0)$

Решение задачи (эксперимент. выкрут.): $\varphi = \frac{\pi}{2} + \varphi_{\text{номер. угол}}$, $\vec{m} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$
вне "core"

Б.А.Ч. предлагает $\varphi_B(x,y) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x-\ell} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x-R^2/\ell}$

где ℓ - смещение центра вихря. ~~$\ell < R$, $s = \xi = \ell/R < 1$~~.

При $\ell \to 0$ не ясно.

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x-\ell}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x-\frac{R^2}{\ell}}\right) = \operatorname{arctg}\left[\frac{\frac{y}{x-\ell} - \frac{y}{x-R^2/\ell}}{1 + \frac{y}{x-\ell}\frac{y}{x-R^2/\ell}}\right] =$$

$$= \operatorname{arctg}\left[\frac{y\left\{x - R^2/\ell - (x-\ell)\right\}}{(x-\ell)(x-\frac{R^2}{\ell}) + y^2}\right] = \operatorname{arctg}\left[-y\,\frac{\left\{R^2/\ell - \ell\right\}}{(x-\ell)(x-\frac{R^2}{\ell}) + y^2}\right] =$$

$$= \operatorname{arctg}\left[-y\,\frac{\{R^2 - \ell^2\}}{(x-\ell)(x\ell - R^2) + y^2\ell}\right]. \quad \ell \to 0 \quad \operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(2) =$$

$$= \operatorname{arctg}\left[-y\,\frac{R^2}{-xR^2}\right] = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$ - верно.

$\vec{m} = (m_x, m_y, m_z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ - вне "core"

$\frac{\partial m_x}{\partial n} = \vec{\nabla} m_x \cdot \vec{n} = \left(\frac{\partial m_x}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{n}\right) = -\sin\varphi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}}\right)\cdot\vec{n} = -\sin\varphi\,(\nabla\varphi\cdot\vec{n})$

$\frac{\partial m_y}{\partial n} = \vec{\nabla} m_y \cdot \vec{n} = \cos\varphi\,(\nabla\varphi\cdot\vec{n})$

Escaneado con CamScanner

$W_{ex} \sim \mu^2 \int [(\nabla\Phi)^2 + \sin^2\theta (\nabla\Phi)^2]$

"з вне...ядра"

Date. . .

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{(x-\ell)^2}} \cdot y\left(-\frac{1}{(x-\ell)^2}\right)\cdot(1) - \frac{1}{1+\frac{y^2}{(x-R^2/\ell)^2}} \cdot y \frac{(-1)}{(x-R^2/\ell)^2} =$$

$$= \frac{-y}{(x-\ell)^2+y^2} + \frac{y}{(x-\frac{R^2}{\ell})^2+y^2}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{(x-\ell)^2}} \cdot \frac{1}{x-\ell} - \frac{1}{1+\frac{y^2}{(x-R^2/\ell)^2}} \cdot \frac{1}{x-\frac{R^2}{\ell}}$$

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j} = \vec{i}\, y\left[\frac{1}{(x-\frac{R^2}{\ell})^2+y^2} - \frac{1}{(x-\ell)^2+y^2}\right] + \vec{j}\left[\frac{x-\ell}{(x-\ell)^2+y^2} - \frac{(x-R^2/\ell)}{(x-\frac{R^2}{\ell})^2+y^2}\right]$$

$$= (x\vec{j} - y\vec{i})\left[\frac{1}{(x-\ell)^2+y^2} - \frac{1}{(x-\frac{R^2}{\ell})^2+y^2}\right] + \vec{j}\left[\frac{-\ell}{(x-\ell)^2+y^2} + \frac{R^2/\ell}{(x-\frac{R^2}{\ell})^2+y^2}\right]$$

$$\nabla\Phi = (-y\vec{i} + x\vec{j})\left[\frac{1}{(x-\ell)^2+y^2} - \frac{1}{(x-\frac{R^2}{\ell})^2+y^2}\right] + \vec{j}\,\frac{(\rho^2-R^2)(R^2/\ell-\ell)}{\left[(x-\ell)^2+y^2\right]\left[(x-\frac{R^2}{\ell})^2+y^2\right]} =$$

$$= \frac{(R^2/\ell-\ell)}{\left[(x-\ell)^2+y^2\right]\left[(x-\frac{R^2}{\ell})^2+y^2\right]}\left\{(-y\vec{i}+x\vec{j})\left(\frac{R^2}{\ell}+\ell-2x\right) + \vec{j}(\rho^2-R^2)\right\}$$

$s = \frac{\ell}{R} = a$, $\nabla\Phi \sim (R^2-\ell^2)$, т.е. при $s=\frac{\ell}{R}=1$ $\nabla\Phi \equiv 0$ и $W_{ex} \sim \int ds (\nabla\Phi)^2 = 0$.

— предел "hom. dot (!)".

$$\nabla\Phi = F(x,y)\left\{(-y\vec{i}+x\vec{j})\left(\frac{R^2}{\ell}+\ell-2x\right) + \vec{j}(\rho^2-R^2)\right\}$$

$$(\nabla\Phi\cdot\vec{n}) = \nabla\Phi\cdot(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) = \nabla\Phi\cdot\left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, 0\right) = (\nabla\Phi)_x\frac{x}{\rho} + (\nabla\Phi)_y\frac{y}{\rho} =$$

$$= \frac{x}{\rho}(-y)F\cdot\left(\frac{R^2}{\ell}+\ell-2x\right) + \frac{y}{\rho}(x)F\cdot\left(\frac{R^2}{\ell}+\ell-2x\right) + \frac{y}{\rho}F\cdot(\rho^2-R^2) = \frac{y}{\rho}(\rho^2-R^2)F(x,y)$$

xy - б сумме вектор. с центром в центре шара, т.е. очевидно

$(\nabla\Phi\cdot\vec{n})_{\rho=R} \equiv 0$ (!) и $\left(\frac{\partial\vec{m}}{\partial n}\right)_S = 0$ при $\rho = R$. $\frac{\partial\vec{m}}{\partial n} \sim (\nabla\Phi\cdot\vec{n})$

→ Т.е. $\Phi_0(x,y)$ описывает смещение на ℓ ($\parallel Ox$) вихря для которого выполняется $\left(\frac{\partial\vec{m}}{\partial n}\right)_{\rho=R} = 0$.

$$\Phi_0(x,y) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x-\ell} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x-\frac{R^2}{\ell}} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left[\frac{y(\ell^2-R^2)}{(x-\ell)(x\ell-R^2)+y^2\ell}\right]$$

Еще 1 вихрь для выполнения условия "...ядра" $W(z) = i\frac{\Omega(z)}{|\Omega(z)|} = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\Phi(z)}$, где

$$\Phi(z) = \operatorname{arctg}\left[\frac{\rho\sin\varphi\,(1-a^2)}{(1+a^2)\rho\cos\varphi - a(1+\rho^2)}\right]$$, где x, y, a в ед. R.

$$(x-\ell)(x\ell-R^2) + y^2\ell = x^2\ell - R^2x - x\ell^2 + \ell R^2 + y^2\ell = \ell\rho^2 + \ell R^2 - x(R^2+\ell^2) =$$

$$= R^3\left[\frac{\ell}{R}\left(\frac{\rho^2}{R^2}+1\right) - \frac{x}{R}\left(1+\frac{\ell^2}{R^2}\right)\right] = R^3\left[a(\rho^2+1) - x(1+a^2)\right]$$

Escaneado con CamScanner

Date.

Т.е. видно что $\Phi(x,y)$ БАЧ. $\Phi_B(x,y) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left[\frac{y(1-a^2)}{x(1+a^2) - a(1+\rho^2)}\right]$ в

предыдущ. координатах $x \to x/R$, $y \to y/R$, $a = \varrho/R$.

Вот это да! $\Phi_B(x,y) = \frac{\pi}{2} + \Phi(z)$ и $w(z) = e^{i[\pi/2 + \Phi(z)]} = e^{i\Phi_B(x,y)}$ вне „ядра".

вне „ядра" $m_x + i m_y = w(z) = e^{i\Phi_B(z)} = \cos\Phi_B + i\sin\Phi_B$, т.е

$\vec{m} = (m_x, m_y) = (\cos\Phi_B, \sin\Phi_B)$, где Φ_B – средний угол $\vec{m}$.

Функция (угол) $\Phi_B(x,y)$ Б. Шапиро для сдвинутого вихря Жуковского-Чаплыгина контура: преобразование $z \to \frac{z-a}{1-az}$ переводит вихрь в точку $z=a$ с модулем Γ

но $\Phi_B(x,y)$ приводит к $\left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial n}\right)_{s=R} = 0$, т.е. и контур ядра с $\theta(z) = \frac{z-a}{1-az}$ удовлетворяет $\left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial n}\right)_S = 0$.

Вихрь Чоаба ($a=0$) вне „ядра" $m_x = -\sin\varphi$, $m_y = \cos\varphi$, $(\vec{m}\cdot\vec{n}) = 0$

$\frac{\partial m_x}{\partial n} = \nabla m_x \cdot \vec{n}$, $\nabla m_x = \frac{\partial m_x}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial m_x}{\partial y}\vec{j} = \left| \begin{matrix} m_x = -\frac{y}{\rho} \\ \partial\rho/\partial x = \frac{x}{\rho} \end{matrix} \right|$

$\frac{\partial m_x}{\partial x} = +\frac{y}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{yx}{\rho^3}$, $\frac{\partial m_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} - y\frac{(-1)}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} + \frac{y}{\rho^2}\frac{y}{\rho}$

$\vec{\nabla} m_x = \vec{i}\frac{yx}{\rho^3} + \vec{j}\left[-\frac{1}{\rho} + \frac{y^2}{\rho^3}\right]$, $\frac{\partial m_x}{\partial n} = (\nabla m_x \cdot \vec{n}) = \frac{yx}{\rho^3}\frac{x}{\rho} + \left(-\frac{1}{\rho} + \frac{y^2}{\rho^3}\right)\frac{y}{\rho} =$

$= \frac{y}{\rho^4}\left[x^2 - \rho^2 + y^2\right] = \frac{y}{\rho^4}\cdot 0 = 0$

$\frac{\partial m_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho} + x\left(-\frac{1}{\rho^2}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3}$, $\frac{\partial m_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\rho}\right) = x\left(-\frac{1}{\rho^2}\right)\frac{y}{\rho}$

$(\vec{\nabla} m_y \cdot \vec{n}) = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3}\right)\frac{x}{\rho} + (-1)\frac{xy}{\rho^3}\cdot\frac{y}{\rho} = \frac{x}{\rho^4}\left[\rho^2 - x^2 - y^2\right] = 0$,

т.е. $\left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial n}\right)_S = 0$ для вихря Чоаба (смещенного вортекса) и $(\vec{m}\cdot\vec{n})_S = 0$.

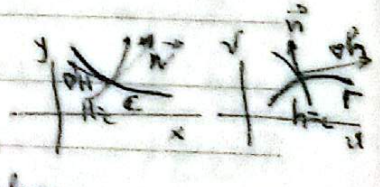
$\frac{\partial w(z)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{div}\vec{m} + i(\operatorname{rot}\vec{m})_z\right]$, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

$\vec{m}^* = \nabla w(z,\bar{z}) = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} i\sqrt{\frac{z}{\bar{z}}} = 2i\sqrt{z}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\bar{z}^{3/2}} = -\frac{i}{\bar{z}}\sqrt{\frac{z}{\bar{z}}} = -\frac{i}{|z|}\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{i}{|z|}\frac{z^2}{|z|^2} =$

$= -\frac{i}{|z|^3}z^2 = -\frac{i}{|z|^3}(x^2 - y^2 + 2ixy) = \frac{1}{|z|^3}\left[2xy - i(x^2 - y^2)\right] = \frac{1}{|z|^3}(2xy, y^2 - x^2)$

$(\vec{m}^*\cdot\vec{n}) = \frac{1}{|z|^3}(2xy, y^2 - x^2)\cdot\frac{1}{|z|}(x,y) = \frac{1}{|z|^4}\left[2x^2y + y(y^2 - x^2)\right] = \frac{y}{|z|^2}$ – ?

Общая теорема (Brown – Churchill, 1976):



Пусть преобразование $w(z) = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ конформно вдоль кривой C и Γ есть образ C в плоскости (u,v). Если вдоль Γ $h(u,v)$ удовлетв. условию $h = h_0$ (const) или $\frac{\partial h}{\partial n} = 0$, то вдоль C выполняется $H(x,y) = h[u(x,y), v(x,y)] = h_0$

или $\frac{\partial H}{\partial N} = 0$ $\vec{n}, \vec{N}$ – нормали.

Escaneado con CamScanner

Date. . .

У вихря условие $\frac{\partial m}{\partial n}=0$ вдоль окружности – граница дома $\rho=R$, $\Rightarrow$ у конформ. модуля с заменой $z'=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ тоже будет $\frac{\partial m}{\partial n}=0$ вдоль окружности $\rho=R$. Ведь граница дома → грн. дом

[и кроме того $|\nabla H(x,y)| = |\nabla h(u,v)|\,|f'(z)|$]

Пусть $|z|=1$ (граница дома), тогда $|z'| = \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| = \frac{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})}$

$\left|\frac{a-(x_0+iy_0)}{\text{не это}}\right| = \frac{|z|^2-a(z+\bar{z})+a^2}{1-a(z+\bar{z})+a|z|^2} = |z|=1| = 1$. $|z|=1 \to |z'|=1$ –

– граница дома отобразилась в границу дома.

Вывод: конформная мода смещения вихря $z'=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ хороша не потому, что сохраняет W_{ex}, а потому, что сохраняет грн. условие $\left(\frac{\partial m}{\partial n}\right)_S=0$ на бок. поверхности дома $\rho=R$ ($|z|=1$).

$O(z)=\frac{z-a}{1-\bar{a}z} = -\frac{1}{a}\frac{z-a}{z-\frac{1}{a}} = -\frac{1}{a}(z-a)\frac{1}{\left(z-\frac{1}{a}\right)}$ соответствует конформ. преобразование вихрю с центром в т. a и "анти-вихрю" $\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$ с центром в т. $z=\frac{1}{a}$.

– а" расчет, vortex и antivortex сближаются и аннигилируют (ham!)

$W(z) = i\frac{O(z)}{|O(z)|} = e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{(z-a)}{|z-a|}\frac{|z-1/a|}{\left(z-\frac{1}{a}\right)} = e^{i\Phi_B}$,

$\Phi_B(x,y) = \frac{\pi}{2} + \arg(z-a) - \arg\left(z-\frac{1}{a}\right) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x-a} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x-\frac{1}{a}}$

– а это и есть в безразмер. переменных функция $\Phi_B(x,y)$ Б.А.Ч.

11/XII Работа над статьей с Метловым и переписка в Taiwan с Новгорода.

12/XII Для "rigid" vortex model вне "core" в сист. координат $x'y'z'$ с центром в центре дома

$$\begin{cases} m_{x'} = -\dfrac{y'}{\sqrt{(x'-s)^2+y'^2}} \\ m_{y'} = \dfrac{x'-s}{\sqrt{(x'-s)^2+y'^2}} \end{cases}, \quad s \geq 0$$

Тогда $\sigma = (\vec{m}\cdot\vec{n})_{\text{бок}} = -\dfrac{s\cdot\sin\varphi'}{\sqrt{1+s^2-2s\cos\varphi'}}$

$x'Oy'$ – центр. в центре дома

С другой стороны $\vec{m} = (\cos\Phi, \sin\Phi, 0)$ вне "core".

Тогда в "rigid" vortex model $\operatorname{tg}\Phi = \frac{m_{y'}}{m_{x'}} = -\frac{(x'-s)}{y'}$ или

$\Phi(x',y') = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{y'}{x'-s}$ сравн. с $\Phi_B(x,y) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x-\ell}\right) - \operatorname{arctg}\frac{y}{(x-R^2/\ell)}$

(Conf. mode Metlov)

→ Видно, что "rigid" v. model просто инвариантна второй $\operatorname{arctg}(\cdot)$ в более точном распределении.

$\Phi_B(x,y) = \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x-\ell}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x-\frac{R^2}{\ell}}\right)$

Escaneado con CamScanner

Date.

$$\begin{cases} m_x = -\dfrac{y}{\sqrt{(x-s)^2+y^2}} \\ m_y = \dfrac{x-s}{\sqrt{(x-s)^2+y^2}} \end{cases} \qquad \vec{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi) \text{ для } S_{\text{пов.}}$$

$$\nabla m_x = \vec{i}\frac{\partial m_x}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial m_y}{\partial y}, \quad (\nabla m_x \cdot \vec{n}) = \frac{\partial m_x}{\partial x} n_x + \frac{\partial m_x}{\partial y} n_y =$$

$$= \left(-y\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\left[(x-s)^2+y^2\right]^{3/2}} 2(x-s)\cdot\frac{x}{\rho} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{(-1)}{\sqrt{(\cdot)}} - y\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(\sqrt{\cdot})^{3/2}} 2y\right]\frac{y}{\rho} =$$

$$= \frac{xy(x-s)}{\left[(x-s)^2+y^2\right]^{3/2}}\frac{1}{\rho} - \frac{y}{\rho}\frac{1}{\sqrt{(x-s)^2+y^2}} + \frac{y^3}{\rho\left[(x-s)^2+y^2\right]^{3/2}}$$

$$(\nabla m_x \cdot \vec{n})_{\rho=R} = \frac{y}{\rho\left[(x-s)^2+y^2\right]^{3/2}}\left[x(x-s) + y^2 - \{(x-s)^2+y^2\}\right] =$$

$$= \frac{y}{\rho\left[(x-s)^2+y^2\right]^{3/2}}\left[x(x-s) - (x-s)^2\right] = \frac{y}{\rho\left[(x-s)^2+y^2\right]^{3/2}} s(x-s) \neq 0 \text{ даже при } \rho/R = 1.$$

Если $s \neq 0$.

→ т.е. для "rigid" shift модуль $\left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial n}\right)_S = 0$ не выполняется.

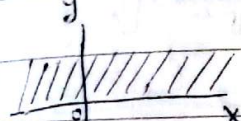
Conformal mappings

(Cayley transform)

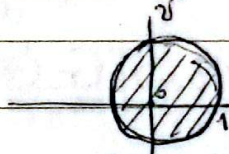
$$w = u + iv = f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

и обратное преобразование

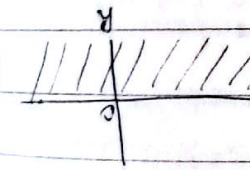
$$z = f(w) = -i\frac{w+1}{w-1}$$

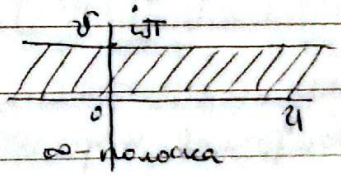
1) 

полуплоскость $y > 0$



круг с $R = 1$

2) 

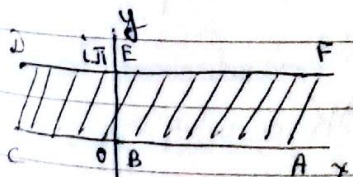


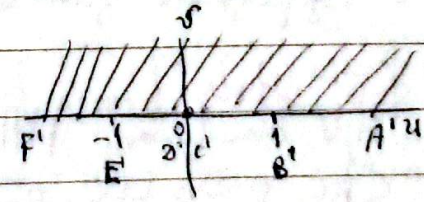
∞-полоска

$$w = f(z) = \ln z$$

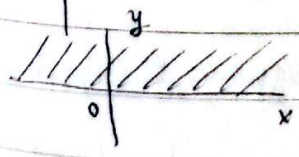
$z = e^w$ - обратное пр.

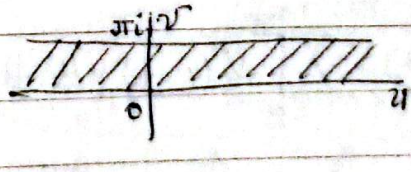
$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z, \quad \operatorname{Arg} z = \varphi \in [0, \pi]$$





$$w = e^z$$

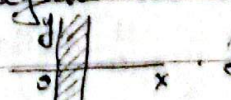
3) 



$$w = \operatorname{Ln}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

$$z = -\operatorname{cth}\frac{w}{2}.$$

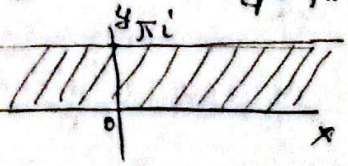
→ Уравнение для намагниченности. Провода заданы на полоске $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ или $x \in [0, 1]$



Заменим $x \to x/\pi$, $x' = y'/\pi$.

$$\lambda m(x) = \frac{2}{\rho}\int_0^1 dx' \ln\left[\frac{(x-x')^2}{(x-x')^2+\rho^2}\right] m(x')$$

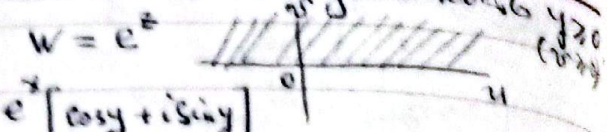
$$\lambda m(y) = \frac{2\pi}{\rho}\int_0^{\pi} dy' \ln\left[\frac{(y-y')^2}{(y-y')^2+\pi^2\rho^2}\right] m(y'), \quad y, y' \geq 0.$$



Escaneado con CamScanner

Date. 13. 12.

Чтобы полосу $0 \le y \le \pi$ преобразовать в полуплоскость $y \ge 0$ можно воспользоваться conformal mapping $w = e^z$



$w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) = e^{x+iy} = e^x[\cos y + i\sin y]$

$v(x,y) = e^x \sin y \qquad \operatorname{tg} y = \frac{v}{u}, \quad y = \operatorname{arctg}\frac{v}{u}$

$u(x,y) = e^x \cos y$

$y - y' = \operatorname{arctg}\frac{v}{u} - \operatorname{arctg}\frac{v'}{u'} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{v}{u} - \frac{v'}{u'}}{1 + \frac{v}{u}\frac{v'}{u'}}\right)$

Пусть $u = u' = 1$. $y = \operatorname{arctg} v$. $dy = \frac{1}{1+v^2}dv$ — не то. Надо $y = \operatorname{arctg} v$ где $v^2 \in [0, \infty]$

$\int_0^{\pi} dy' [\dots] = \int_0^{\infty} \frac{dv' \cdot 2}{1+v'^2} \ln\left[\frac{\cdot}{\cdot}\right] =$ Но это не простая функция переменных. $v = \operatorname{tg}\frac{y}{2}$, $v' = \operatorname{tg}\frac{y'}{2}$.

$= 2\int_0^{\infty} \frac{dv'}{1+v'^2} \ln\left[\frac{\left\{2\operatorname{arctg}\left(\frac{v-v'}{1+vv'}\right)\right\}^2}{\left\{2\operatorname{arctg}\left(\frac{v-v'}{1+vv'}\right)\right\}^2 + \pi^2 p^2}\right] m(v')$

$\lambda m(v) = \frac{4}{\pi p}\int_0^{\infty} \frac{dv'}{1+v'^2} \ln\left[\frac{\operatorname{arctg}^2\left(\frac{v-v'}{1+vv'}\right)}{\operatorname{arctg}^2\left(\frac{v-v'}{1+vv'}\right) + \frac{1}{4}\pi^2 p^2}\right] m(v')$

$\lambda m(v) = \int_0^{\infty} dv' g(v,v') m(v'), \quad g(v,v') = \frac{4}{\pi p}\frac{1}{1+v'^2} \ln\left[\frac{\operatorname{arctg}^2\left(\frac{v-v'}{1+vv'}\right)}{\operatorname{arctg}^2(\cdot) + \frac{1}{4}\pi^2 p^2}\right]$

Введем $f(v) = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} m(v)$, $G(v,v') = \frac{4}{\pi p}\frac{1}{\sqrt{1+v^2}\sqrt{1+v'^2}} \ln\left[\frac{\operatorname{arctg}^2\left(\frac{v-v'}{1+vv'}\right)}{\operatorname{arctg}^2(\cdot) + \frac{1}{4}\pi^2 p^2}\right]$

Тогда $\lambda f(v) = \int_0^{\infty} dv' G(v,v') f(v')$, $G(v,v') = G(v',v)$ — ядро симметрично.

~~Но все это на основе простой замены~~ $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = v$.

Чтобы применить conformal map. надо вернуться к исходной начальной задаче с конечными пределами интегр. брать по x и y (не z - употребляют для комплексных complex variables theory)

SW wires

13/XII A.D Polyanin, A.V. Manzhirov. HANDBOOK of integral equations. 1998. 787p. CRC press LLC, Boca Raton, Florida.

Стр. 317. $y(x) = \lambda\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\,y(t)\,dt$ с чет. ядром $K(x) = K(-x)$

имеет спектр $\lambda_n = \frac{1}{\pi a_n}$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K(x)\cos nx\,dx$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$

СФ: $y_0(x) = 1$, $y_n^{(1)} = \cos nx$ и $y_n^{(2)} = \sin nx$ $(n = 1, 2, \dots)$

Для каждого СЗ λ_n $(n \ne 0)$ есть две линейно-независимые СФ $y_n^{(1)}(x)$ и $y_n^{(2)}(x)$. (Они соотв. разным усл. условиям $\vec{m} = 0$ и $\frac{\partial \vec{m}}{\partial n} = 0$)

Escaneado con CamScanner

Date. $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Ур. для ИВ: $\lambda m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g(x,x') m(x')$, $g(x,x') = g(x-x') = \frac{2}{\rho} \ln\left[\frac{(x-x')^2}{(x-x')^2+\rho^2}\right]$

ядро $g(x) = \frac{2}{\rho} \ln\left[\frac{x^2}{x^2+\rho^2}\right]$, $g(-x) = g(x)$ — четная.

замена $x = \xi/(2\pi)$, $x' = \xi'/2\pi$, $\lambda \to \frac{1}{\lambda}$, $dx' = \frac{1}{2\pi} d\xi'$

$$m(\xi) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} d\xi' g(\xi-\xi') m(\xi') \quad \text{или} \quad m(\xi) = \Lambda \int_{-\pi}^{\pi} d\xi' g(\xi-\xi') m(\xi')$$

Спектр (СЗ): $\Lambda_n = \frac{1}{\pi a_n}$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\xi\, g(\xi) \cos n\xi$, $\Lambda = \frac{1}{2\pi\lambda}$.

$a_n = \frac{1}{\pi} \frac{2}{\rho} \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \cos n\xi \cdot \ln\left[\frac{\xi^2}{\xi^2+\rho^2(2\pi)^2}\right]$. Вот что за (!).

Итог. $\lambda_n = \frac{1}{2\pi\Lambda_n} = \frac{1}{2\pi \frac{1}{\pi a_n}} = \frac{1}{2} a_n = \frac{1}{\pi\rho} \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \ln\left[\frac{\xi^2}{\xi^2+\rho^2(2\pi)^2}\right] \cos n\xi$.

Спектр $\lambda_n = \frac{1}{\pi\rho} \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \ln\left[\frac{\xi^2}{\xi^2+(2\pi\rho)^2}\right] \cos n\xi$, $\frac{\xi}{2\pi} \to x$, $d\xi = 2\pi dx$

$$\lambda_n = \frac{2}{\rho} \int_{-1/2}^{1/2} dx \ln\left[\frac{x^2}{x^2+\rho^2}\right] \cos(2\pi n x), \text{ где } x \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}], \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Есть в Гр.-Р. $\int_0^{\infty} dx \ln\left[\frac{x^2}{x^2+\beta^2}\right] \cos cx = \frac{\pi}{c}\left[e^{-\beta c} - 1\right]$.

$\to \int_0^1 \ln(1+x^2)\, x^{\mu-1} dx = \frac{1}{\mu}\left[\ln 2 - \beta\left(\frac{\mu}{2}+1\right)\right]$, $\mathrm{Re}\,\mu > -2$ (с. 593).

Если λ_n задается, то СВ частоты через $\left(\frac{\omega_n}{\omega_M}\right)^2 = \left[\omega_H + 1 + \frac{\lambda_n}{4\pi}\right]\left[\omega_H - \frac{\lambda_n}{4\pi}\right]$

согласно 11 (VII). $I_s(x) = \int_{-1/2-x}^{1/2} d\xi\, g(\xi) \xi^s$, $g(\xi) = \frac{2}{\rho} \ln\left[\frac{\xi^2}{\xi^2+\rho^2}\right]$.

В частности (см. 17/II) $\lambda_0 = \frac{2}{\rho} \int_{-1/2}^{1/2} dx \ln\left[\frac{x^2}{x^2+\rho^2}\right] = I_0(0) = -\frac{2}{\rho} \ln(1+4\rho^2) - 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{2\rho}$

При $\rho \ll 1$ получим $\lambda_0 = -4\pi + 8\rho$, $-\frac{\lambda_0}{4\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}\rho$, $\rho = \frac{L}{w}$

(это как у Славина PRB '99).

$\to$ СФ: $m_n^{(1)}(x) = \cos(2\pi n x)$ и $m_n^{(2)}(x) = \sin(2\pi n x)$, $n = 1, 2, \ldots$

(можно смещать СФ на $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$) $x \in [-1/2, 1/2]$

На границе ($x = 1/2$): $m_n^{(1)}(1/2) = \cos(\pi n) = (-1)^n$, $m_n^{(2)}(1/2) = 0$.

$$\left(\frac{\partial m_n^{(1)}}{\partial x}\right)_{x=1/2} = 0, \quad \left(\frac{\partial m_n^{(2)}}{\partial x}\right)_{x=1/2} = (2\pi n)(-1)^n \neq 0.$$

(3) λ_n не зависит от выбора СФ $m_n^{(1)}$ или $m_n^{(2)}$. Но с точки зрения кратности надо выбрать $m_n^{(2)}(x) = \sin(2\pi n x)$

$x' = x + 1/2$ $m_n^{(2)}(x') = \sin[2\pi n (x' - 1/2)] = \sin 2\pi n x' \cdot \cos \pi n = (-1)^n \sin(2\pi n x')$, $m_n^{(1)}(x') = (-1)^n \cos(2\pi n x')$

Escaneado con CamScanner

Date. 14. 12.

$m_n(x) = A_n m_n^{(1)}(x) + B_n m_n^{(2)}(x) = A_n \cos(2\pi n x) + B_n \sin(2\pi n x) = C_n \cos(2\pi n x + \varphi_n)$

$m_n(\pm 1/2) = \cos(\pi n + \varphi_n) = (-1)^n \cos\varphi_n$

$\left(\frac{\partial m_n(x)}{\partial x}\right)_{x=\pm 1/2} = -(2\pi n)\sin\left(2\pi n \frac{1}{2} + \varphi_n\right) = -(2\pi n)(-1)^n \sin\varphi_n$

I Если использовать обычн. гран. условие $\left(\frac{\partial m}{\partial n}\right)_S = 0$ (как у Славянова PRB'99), то $\sin\varphi_n = 0$, $\varphi_n = \pi n$ и $m_n(x) = \cos(2\pi n x + \pi n)$

II Треб. $m_n(\pm 1/2) = 0$ даст $\cos\varphi_n = 0$, $\varphi_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}$.

Почему все же $\cos(2\pi n x)$, а не $\cos(\pi n x)$?

а) Если $x \in [-\ell, \ell]$ → разложение по $\cos\frac{2\pi n}{2\ell}x = \cos\frac{\pi n}{\ell}x$ и $\sin\frac{n\pi x}{\ell}$, или $\cos(\frac{\pi n}{\ell}x)$ или $\sin(\frac{\pi n}{\ell}x)$ на $[-\ell,\ell]$ полной системы ф. на ℓ образуют.

б) Если $x \in [0,\ell]$, → разложение или по $\cos\frac{\pi n}{\ell}x$ (четном расширении на $[-\ell,0]$) или по $\sin\frac{n\pi}{\ell}x$. (или нечетным расширениям на $[-\ell,0]$)

При этом и $\cos\frac{\pi n}{\ell}x$ и $\sin\frac{\pi n}{\ell}x$ образуют полную систему функций на $[0,\ell]$.

14/XII $y(x) = \lambda\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)y(t)\,dt$, $y(x)$ ищем $= \frac{a_0}{2} + \sum_n (a_n\cos nx + b_n\sin nx)$, $x \in [-\pi,\pi]$

Но $m_n(-x) = \pm m_n(x)$ – СФ либо четное, либо нечетное.

Ищем $y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_n a_n\cos(nx)$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(t)\cos nt\,dt$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_n a_n\cos nx = \lambda\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\left[\frac{a_0}{2} + \sum_n a_n\cos nt\right]dt = \left|\begin{matrix} t-x=\tau \\ x-t=-\tau \\ t=x+\tau \end{matrix}\right| =$$

$$= \lambda\int_{-\pi-x}^{\pi-x} d\tau\, K(-\tau)\left[\frac{a_0}{2} + \sum_n a_n\cos n(x+\tau)\right] = \lambda\int_{-\pi-x}^{\pi-x} d\tau\, K(\tau)\left[\frac{a_0}{2} + \right.$$

$$\left. + \sum_n a_n\{\cos nx\cos n\tau - \sin nx\sin n\tau\}\right]$$

$\cos nx$: $a_n = \lambda a_n\int_{-\pi-x}^{\pi-x} d\tau\, K(\tau)\cos n\tau$, $\lambda_n^{-1} = \int_{-\pi-x}^{\pi-x} d\tau\, K(\tau)\cos n\tau$ – ?

$\sin nx$: $0 = -\lambda a_n\int_{-\pi-x}^{\pi-x} d\tau\, K(\tau)\sin n\tau$. Все $0, K$, только если $K(\tau)$ – периодическое с $T = 2\pi$.

$y(0) = \lambda\int_{-\pi}^{\pi} K(t)y(t)\,dt$ – итого:

$K(\tau)$ чет.: $K(\tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_n a_n\cos n\tau$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\tau\, K(\tau)\cos n\tau$, $\tau \in [-\pi,\pi]$

$$y(x) = \lambda\int_{-\pi}^{\pi} dt\, y(t)\left[\frac{a_0}{2} + \sum_n a_n\cos n(t-x)\right] = \left|\begin{matrix} \text{аргумент выходит за пределы } [-\pi,\pi] \\ y(x) = \frac{\bar a_0}{2} + \sum_n \bar a_n\cos nx \end{matrix}\right| =$$

$$= \lambda\int_{-\pi}^{\pi} dt\left[\frac{a_0}{2} + \sum_n a_n\cos nt\cos nx + \sum_n a_n\sin nt\sin nx\right]y(t) =$$

Date.

$= \lambda \left[\frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dt\, y(t) + \sum_n a_n \cos nx \int_{-\pi}^{\pi} dt\, y(t) \cos nt + \sum_n a_n \sin nx \int_{-\pi}^{\pi} dt\, y(t) \sin(nt) \right] =$

$\left| \text{пог. } y(t) \right| = \lambda \left[\frac{a_0}{2} \pi \bar{a}_0 + \sum_n a_n \cos nx \cdot \pi \bar{a}_n \right] = \pi\lambda \left[\frac{1}{2} a_0 \bar{a}_0 + \sum_n a_n \bar{a}_n \cos nx \right] =$

$= \frac{\bar{a}_0}{2} + \sum_n \bar{a}_n \cos nx$. Отсюда $\pi\lambda a_0 = 1$ и $\pi\lambda a_n = 1$, т.е. $\lambda_n = \frac{1}{\pi a_n}$,

$\lambda_n = \frac{1}{\pi a_n}$, где $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt\, K(t) \cos nt$. Если $y(t)$ - четная. $\Rightarrow$ док-во аналогично.

$x \in [0,1]$ Если инт. уравнение имеет вид $y(x) = \lambda \int_0^{\pi} K(x-t) y(t)\, dt$, то

$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dt\, K(t) \cos nt$, $K(\tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} a_n \cos n\tau$. $t, \tau \in [0, \pi]$.

$K(\tau) \sim \ln \left[\frac{\tau^2}{\tau^2 + \rho^2} \right]$ и исходные ядра четные 2π-периодические на $[-\pi, 0]$.

$y(x) = \lambda \int_0^{\pi} dt\, y(t) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_n a_n \cos(t-x)n \right] = \lambda \left[\frac{a_0}{2} \int_0^{\pi} y(t)\, dt + \sum_{n \neq 0} a_n \cos nx \int_0^{\pi} dt\, y(t) \cos nt + \right.$

$\left. + \sum_{n \neq 0} a_n \sin nx \int_0^{\pi} dt\, y(t) \sin nt \right]$, $y(x) = \frac{\bar{a}_0}{2} + \sum_n \bar{a}_n \cos nx$, $\bar{a}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y(t) \cos nt\, dt$

$x \in [0,\pi]$ или $y(x) = \sum_n b_n \sin nx$, $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y(t) \sin nt\, dt$.

Пусть $y(x)$ разложена по $\cos nx$. Тогда:

$\frac{\bar{a}_0}{2} + \sum_n \bar{a}_n \cos nx = \lambda \left[\frac{a_0}{2} \frac{\pi}{2} \bar{a}_0 + \sum_n a_n \cos nx \cdot \frac{\pi}{2} \bar{a}_n + \sum_n a_n \sin nx \frac{\pi}{2} \bar{b}_n \right]$

$\frac{\pi}{2} \bar{b}_n = \int_0^{\pi} dt\, y(t) \sin nt = \int_0^{\pi} dt \left[\frac{a_0}{2} + \sum_m \bar{a}_m \cos mt \right] \sin nt$ - всюду $\neq 0$.

$\int_0^{\pi} dt \cos mt \sin nt = \frac{1}{2} \int dt \left[\sin(n-m)t + \sin(n+m)t \right] = \frac{1}{2}(-1) \left[\frac{\cos(n-m)t}{(n-m)} + \frac{\cos(n+m)t}{(n+m)} \right]_0^{\pi}$

$= -\frac{1}{2} \left[\frac{(-1)^{n-m}}{n-m} + \frac{(-1)^{n+m}}{n+m} - \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} \right] =$

$= -\frac{1}{2} \left[(-1)^{n+m} \frac{2n}{n^2-m^2} - \frac{2n}{n^2-m^2} \right] = \frac{n}{n^2-m^2} \left[1 - (-1)^{n+m} \right]$ $\bar{b}_n \neq 0$ - слабое место док-ва.

$\frac{\pi}{2} \bar{b}_n = \frac{\bar{a}_0}{2} \frac{1}{n} \left[1 - (-1)^n \right] + \sum_{m \, (m \neq n)} \bar{a}_m \frac{n}{n^2-m^2} \left[1 - (-1)^{n+m} \right]$, $(n \neq m)$ - ?

$\frac{\pi}{2} \bar{b}_n = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dt\, y(t) \sin nt = 0$ если $y(t)$ исходная на $[-\pi, 0]$ нечетным образом.

$\sin nx$: $1 = \lambda a_0 \frac{\pi}{2}$ и $1 = \lambda a_n \frac{\pi}{2}$, т.е. $\lambda_n = \frac{2}{\pi a_n}$, $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dt\, K(t) \cos nt$,

$\lambda_n^{-1} = \int_0^{\pi} dt\, K(t) \cos nt$. $\Lambda_n^{-1} = \int_0^{\pi} d\xi\, g(\xi) \cos n\xi \rightarrow \left(\lambda_n = \frac{\Lambda_n^{-1}}{\pi} = \int_0^1 dx\, g(x) \cos(\pi n x) \right)$ $n = 0, 1, 2, \ldots$

$\lambda_n^m \varphi_n(x) = \int_0^1 dx'\, g(xx')\, m_n(x')$. Это вытекает от λ_n 13/XII,

Уже всегда (вектор SW $w_n = f(\lambda_n)$ не должен зависеть как мы в wires

Можно использовать вычеты, т.е. выбрали wires $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ или $x \in [0,1]$.

Date. 19 . 12 .

15-16/XII Разбор пар совбой с К. Масловым в PRB.
18/XII Посадка в KIMP и тор travel.

SW-Wires

19/XII Инт. уравнение $y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} dt\, K(x-t)\, y(t)$, с $K(-x) = K(x)$

имеет СЗ (вырожденные дважды, кроме первого)

$\lambda_n^{-1} = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, K(x) \cos nx$ и СФ $y_0(x) = 1$ и $y_n^{(1)}(x) = \cos nx$, $y_n^{(2)}(x) = \sin nx$.

Этому соотв. в обычных обозначениях: $\lambda m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx'\, g(x-x')\, m(x')$

$\lambda_n = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, g(x) \cos(2\pi n x)$, где $g(x) = \frac{2}{p} \ln\left[\frac{x^2}{x^2+p^2}\right]$, $p = L/w$.

и СФ $\cos(2\pi nx)$, $\sin(2\pi$

Частоты SW (of wires): $\omega_n^2 = \left[\omega_H + 1 + \frac{\lambda_n}{4\pi}\right]\left[\omega_H - \frac{\lambda_n}{4\pi}\right]$. Или ω_n Числено (SW-wires,

wires, $p = 9{,}011$) $n = 0, 1, 2 \ldots$

ω_n	0,232	0,281	0,330	0,367	0,398
Аналит. f_n	0,236	0,266	0,297	0,319	0,339
Числ. ω_n	0,215 ($n=0$)	0,268 ($n=1$)	0,320 ($n=2$)	0,359 ($n=3$)	0,391 ($n=4$)

Числ. расчет

и/или увеличить ε до $0{,}5\cdot10^{-10}$

Видно, что только ω_0 (или ω_1) хорошо описывает аналитику, остальные ω_n заметно (выше f_n).

Отметим, что альтернативное (или ω_2) $\lambda_n = \int_0^1 dx\, g(x) \cos(\pi n x)$ (ср 14/XII) дает совсем неверные значения ω_n.

→ Если СФ не зависят от p (что удивительно), то согласно 12/VII и 2

инт. уравнение можно упростить $\Lambda(p) m(x) = (-4) \int_{-1/2}^{1/2} dx' \frac{m(x')}{(x-x')^2+p^2}$,

где $\Lambda(p) = \frac{\partial \lambda}{\partial p} + \frac{\lambda}{p}$ задает дифф. ур. на $\lambda(p)$, $\lambda(p) m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g(xx') m(x$

В стандарт. виде: $m(x) = \left(\frac{-4}{\Lambda}\right) \int_{-1/2}^{1/2} dx' \frac{m(x')}{(x-x')^2+p^2}$,

$2\pi x \to \xi$ ($x = \xi/(2\pi)$) $m(\xi) = \left(\frac{-4}{\Lambda}\right) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\xi'}{2\pi} \frac{m(\xi')}{\frac{1}{(2\pi)^2}(\xi-\xi')^2+p^2} = \mu \int_{-\pi}^{\pi} d\xi'\, G(\xi-\xi')\, m(\xi')$,

$\mu = \left(\frac{-4}{\Lambda}\right) \frac{1}{2\pi}$, $G(\xi-\xi') = \left[\frac{1}{(2\pi)^2}(\xi-\xi')^2 + p^2\right]^{-1}$, $G(x)$ - ядро.

Ядро $\mu_n^{-1} = \int_{-\pi}^{\pi} d\xi\, G(\xi) \cos n\xi = \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \frac{\cos n\xi}{\left(\frac{\xi}{2\pi}\right)^2 + p^2} = 2\pi \int_{-1/2}^{1/2} dx \frac{\cos(2\pi n x)}{x^2+p^2}$

$\left(-\frac{\Lambda_n}{4}\right) 2\pi = 2\pi \int_{-1/2}^{1/2} dx \frac{\cos(2\pi n x)}{x^2+p^2}$ или $\Lambda_n(p) = (-4) \int_{-1/2}^{1/2} dx \frac{\cos(2\pi n x)}{x^2+p^2}$

Только $\Lambda_{n=0}(p)$ можно найти аналитически, но достаточно знать $\Lambda_n(p)$ главное членом при $p \to 0$.

Escaneado con CamScanner

Date. 20. 12.

$2\sin = x$, $\Lambda_n(p) = (-4)\int_{-1/2}^{1/2} dx \frac{1}{x^2+p^2} \sum_{\nu=0} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu}}{(2\nu)!} x^{2\nu} =$ 90/XII

$= \sum_\nu (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} (-4) \int_{-1/2}^{1/2} dx \frac{x^{2\nu}}{x^2+p^2} = (-4)\sum_\nu \frac{(-1)^\nu x^{2\nu}}{(2\nu)!} I_\nu(p)$

$I_\nu(p) = \int_{-1/2}^{1/2} dx \frac{x^{2\nu}}{x^2+p^2} = \left| \begin{matrix} \frac{x}{p} = u \\ x = pu \end{matrix} \right| = \int_{-\frac{1}{2p}}^{1/2p} du \cdot p \frac{p^{2\nu} u^{2\nu}}{p^2(1+u^2)} = p^{2\nu-1} \int_{-\frac{1}{2p}}^{1/2p} du \frac{u^{2\nu}}{1+u^2} =$

$= p^{2\nu-1} \left[\frac{u^{2\nu-1}}{(2\nu-1)} \Big|_{-\frac{1}{2p}}^{1/2p} - \int_{-\frac{1}{2p}}^{1/2p} du \frac{u^{2\nu-2}}{1+u^2} \right] = p^{2\nu-1} \left[\frac{1}{(2\nu-1)} \frac{1\cdot 2}{2^{2\nu-1} p^{2\nu-1}} - \int du \frac{u^{2\nu-2}}{1+u^2} \right] =$

$= p^{2\nu-1} \left[\frac{1}{(2\nu-1)} \frac{4}{2^{2\nu} p^{2\nu-1}} - \frac{u^{2\nu-3}}{(2\nu-3)} \Big| + \int du \frac{u^{2\nu-4}}{1+u^2} \right] =$

$= p^{2\nu-1} \left[\frac{4}{2^{2\nu}(2\nu-1)} \frac{1}{p^{2\nu-1}} - \frac{2}{(2\nu-3)} \frac{1}{2^{2\nu-3} p^{2\nu-3}} + \int du \frac{u^{2\nu-4}}{1+u^2} \right]$, $\nu > 0$.

$I_0(p) = \frac{1}{p} \int_{-1/2p}^{1/2p} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{p} \operatorname{arctg} u \Big|_{-\frac{1}{2p}}^{1/2p} = \frac{2}{p} \operatorname{arctg} \frac{1}{2p}$

$I_1(p) = p \int_{-\frac{1}{2p}} du \frac{u^2}{1+u^2} = p \left[\int du \frac{1+u^2-1}{1+u^2} \right] = p \left[u - \operatorname{arctg} u \right]_{-\frac{1}{2p}}^{1/2p} =$

$= p \left[\frac{1}{2p} \cdot 2 - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2p} \right] = 1 - 2p \operatorname{arctg} \frac{1}{2p}$

$\operatorname{arctg} \frac{1}{2p} \underset{p\to 0}{=} \frac{\pi}{2} - 2p + \frac{1}{3}(2p)^3 + \dots$. В сил. по p^ν и/любым значениям ~~фиксированно~~ коэффициентов в $\Lambda_n(p)$ члены с $\frac{1}{p}$ и p^0.

$I_\nu(p) = \frac{4}{2^{2\nu}(2\nu-1)} - \frac{2}{(2\nu-3)2^{2\nu-3}} p^2 + O(p^4)$, $\nu > 0$.

$I_0(p) \cong 2p^{-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{2p} = 2p^{-1}\left(\frac{\pi}{2} - 2p \right) = \frac{\pi}{p} - 4$. $I_\nu(p) \underset{(\nu>0)}{\approx} \frac{4}{2^{2\nu}(2\nu-1)}$.

$\Lambda_n(p) = (-4)\left[I_0(p) + \sum_{\nu=1} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu}}{(2\nu)!} I_\nu(p) \right] = (-4)\left[\frac{\pi}{p} - 4 + \right.$

$\left. + \sum_{\nu=1} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu}}{(2\nu)!} \frac{4}{2^{2\nu}(2\nu-1)} \right] = (-4)\left[\frac{\pi}{p} - 4 + 4 \sum_{\nu=1} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} \frac{(x/2)^{2\nu}}{(2\nu-1)} \right]$, см. 17/II.

Сумм. 17/II: $\sum_{s=1} (-1)^s \frac{z^{2s}}{(2s)!} \frac{1}{(2s-1)} = 1 - \cos z - z\,\mathrm{Si}(z) =$

$= 1 - \sum_{s=0} (-1)^s \frac{z^{2s}}{(2s)!} - z \sum_{k=1} \frac{(-1)^{k+1} z^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)!} = \sum_{s=1} (-1)^{s+1} \frac{z^{2s}}{(2s)!} - \sum_{s=1} (-1)^{s+1} \frac{z^{2s}}{(2s-1)(2s-1)!} =$

$= \sum_{s=1} (-1)^{s+1} \frac{z^{2s}}{(2s)!} \left[1 - \frac{2s}{(2s-1)} \right] = \sum_{s=1} (-1)^s \frac{z^{2s}}{(2s)!} \frac{1}{(2s-1)}$. Верно.

$\Lambda_n(p) = (-4)\left[\frac{\pi}{p} - 4 + 4 \cdot \left\{ 1 - \cos\frac{x}{2} - \frac{x}{2} \mathrm{Si}\left(\frac{x}{2}\right) \right\} \right] = (-4)\left[\frac{\pi}{p} - 4\cos\frac{x}{2} - 2x\,\mathrm{Si}\left(\frac{x}{2}\right) \right]$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$\Lambda_n(p) = \frac{\partial \lambda_n}{\partial p} + \frac{\lambda_n}{p} = -\frac{4\pi}{p} + B$, $B = 16\cos\frac{x}{2} + 8x\,Si(\frac{x}{2})$

имеем $\lambda_n = a + 6p$, $6 + \frac{1}{p}(a+6p) = \frac{a}{p} + 2B = -\frac{4\pi}{p} + B$, откуда

$a = -4\pi$, $6 = \frac{1}{2}B = 8\cos\frac{x}{2} + 4x\,Si(\frac{x}{2})$, $x = x_n = 2\pi n$.

$$\lambda_n(p) = -4\pi + 8p\left[\cos\frac{x_n}{2} + \frac{x_n}{2}Si\left(\frac{x_n}{2}\right)\right], \quad \lambda_0 = -4\pi + 8p.$$

это в точности как 17/II, но $\frac{\pi m}{2} \to \frac{x_n}{2} = \pi n$. Это именно то, что требовалось, $n = 0, 1, 2$

Отметим, что частоты ω_n' рассчит. по этим λ_n еще хуже согласуются с экспериментом, чем ω_n от 19/XII (на основе λ_n из 13/III).

Видимо метод решения инт. уравнения by Polyanin '98 неточен (см. 13/XII).

Ко ураву $m(\xi) = \mu \int_{-\pi}^{\pi} d\xi'\, G(\xi - \xi')\, m(\xi')$, $G(\xi) = \frac{1}{\frac{\xi^2}{(2\pi)^2} + p^2}$

Значительно изучить уравнение с $g(x) \sim \ln\left[\frac{x^2}{x^2+p^2}\right]$, но оно верно если СФ не зависят от "p".

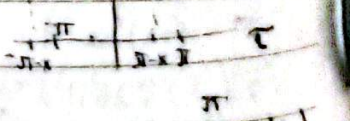
$$\frac{\partial G(\xi)}{\partial \xi} = -\frac{1}{\left[\frac{\xi^2}{(2\pi)^2} + p^2\right]^2} \frac{1}{(2\pi)^2} 2\xi.$$

$$\frac{\partial m(\xi)}{\partial \xi} = -\mu \frac{2}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\xi' \frac{(\xi - \xi')}{\left[\frac{(\xi-\xi')^2}{(2\pi)^2} + p^2\right]^2} m(\xi'),$$ имеются особенности при $\xi = \pm\pi$.

→ Формула (17/II) $\lambda_m(p)$ с СФ $\cos(\pi m x)$, $x \in [0,1]$ описывает экспериментальные данные, чем все $\lambda_n(p)$ от 19 и 20/XII. $m = 0, 1, 2, \ldots$

22/XII → Найдем в чем ошибка решения инт. уравнения 4.9-2 (p. 317) by Polyanin et al. '98. $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ - ширина щели (wire).

$$y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} dt\, K(x-t)\, y(t), \quad K(x) = K(-x).$$



1) Проверим СФ $y_0(x) = 1$ и $\lambda_0^{-1} = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, K(x)$

$$1 = \lambda_0 \int_{-\pi}^{\pi} dt\, K(x-t) = \lambda_0 \int dt\, K(t-x) = \left|t - x = \tau\right| = \lambda_0 \int_{-\pi-x}^{\pi-x} d\tau\, K(\tau) = \lambda_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\tau K(\tau)$$

только если

ядро $K(\tau)$ есть периодическая с периодом 2π.

2) Проверим СФ $y_n^{(1)}(x) = \cos(nx)$ и $\lambda_n^{-1} = \int_{-\pi}^{\pi} K(x)\cos(nx)\,dx$

$$\cos nx = \lambda_n \int_{-\pi}^{\pi} dt\, K(x-t)\cos(nt) = \left|t = \tau + x\right| = \lambda_n \int_{-\pi-x}^{\pi-x} d\tau\, K(\tau)\cos n(\tau + x) =$$

$$= \left|\begin{array}{c}\text{то же если} \\ K(\tau) \text{ период. с периодом } 2\pi\end{array}\right| = \lambda_n \int_{-\pi}^{\pi} d\tau\, K(\tau)\left[\cos n\tau \cos nx + \sin n\tau \sin nx\right] =$$

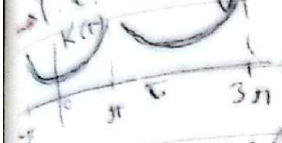
$$= \lambda_n \cos nx \int_{-\pi}^{\pi} d\tau\, K(\tau)\cos(n\tau) = \cos nx$$

Escaneado con CamScanner

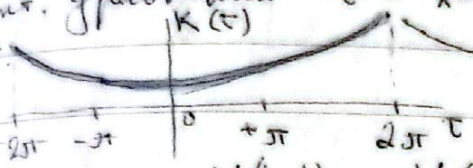
Date. 22 · 12 ·

$K(\tau)$ имеет период 4π, а $y(t)$ — период 2π.
Полагая, что $K(\tau)$ имеет период 2π — ошибка Полякина.

→ Т. е. бо исходят если ядро $K(\tau)$ период. р. с $T = 2\pi$.
$K(\tau)$ с $\tau \in [-\pi, \pi]$ всегда можно периодически продолжить в $\forall \tau$.



→ Т. к. в инт. уравнении $\tau = x - t$ ($или\ t - x$) изменяется от -2π до 2π.



Т. е. $K(\tau)$ можно сделать периодич. лишь с $T = 4\pi$, т. к. τ в $K(\tau) \in [-2\pi, 2\pi]$

Точнее $K(\tau) = K(|\tau|) = K(|t-x|)$, $|t-x|$ изменяется от 0 до 2π.

Надо разложить по $\cos\left(\frac{2\pi}{2L} n\tau\right) \Big|_{2L = 4\pi} = \cos\left(\frac{1}{2} n\tau\right)$ тем, в правильных переменных $\tau = 2\pi x$, $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, по $\cos(2\pi n x)$.

$$K(\tau) = \sum_n K_n \cos\left(\tfrac{1}{2} n\tau\right), \quad K_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} d\tau\, K(\tau)\cos\left(\tfrac{1}{2}n\tau\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\tau\, K(\tau)\cos\left(\tfrac{1}{2}n\tau\right)$$

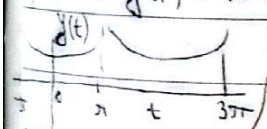
$$y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} dt\, y(t) \sum_n K_n \cos\left(\tfrac{1}{2} n\tau\right)\Big|_{\tau = t-x} = \lambda \int dt\, y(t) \sum_n K_n \left[\cos\tfrac{n}{2}t\cdot\cos\tfrac{n}{2}x + \sin\tfrac{n}{2}t\cdot\sin\tfrac{n}{2}x\right] =$$

$$= \lambda \sum_n K_n \int_{-\pi}^{\pi} dt\, y(t)\left[\cos\tfrac{n}{2}t\cdot\cos\tfrac{n}{2}x + \sin\tfrac{n}{2}t\cdot\sin\tfrac{n}{2}x\right]$$

а) Пусть $y(x)$ — четная, $y(x) = \lambda \sum_n K_n \cos\left(\frac{n}{2}x\right)\cdot\int_{\pi} dt\, y(t)\cos\left(\frac{n}{2}t\right)$ (*)

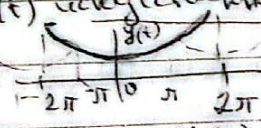
Но $y(t)$, $t \in [-\pi, \pi]$ периодич. с периодом 2π, т. е. $y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1,2,\dots} y_m \cos(mt)$

б) Если $y(x)$ — нечетная, то $y(x) = \lambda \sum_n K_n \sin\left(\frac{n}{2}x\right)\int_{-\pi}^{\pi} dt\, y(t)\sin\left(\frac{n}{2}t\right)$, $y(t) = \sum_m y_m \sin(mt)$.



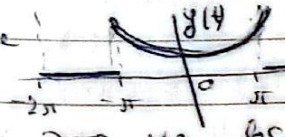
Попытка спасти расчет Полякина увеличением периода СФ (неверная)

а) сделаем $y(t)$ искусственно периодической с $T = 4\pi$



, тогда $t > \pi$ — вне зоны $t < -\pi$ и не играют роли.

Или точнее



$y(t) = 0$ вне $[-\pi, \pi]$ и периодически продолжим это на всю t-ось.

Тогда $y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_m y_m \cos\left(\frac{1}{2}m\tau\right)$, $y_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} y(t)\cos\left(\frac{1}{2}mt\right)dt$

(подставим в (*). $y_m \to a_m$.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_m y_m \cos\left(\tfrac{1}{2}mx\right) = \lambda \sum_n K_n \cos\left(\tfrac{1}{2}nx\right)\int_{-2\pi}^{2\pi} dt\, y(t)\cos\left(\tfrac{n}{2}t\right)$$

т. к. $y(t) = 0$ вне $[-\pi, \pi]$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_n a_n \cos\left(\tfrac{1}{2}nx\right) = \lambda \sum_n K_n \cos\left(\tfrac{1}{2}nx\right)\cdot 2\pi a_n$$

Точнее $K(\tau) = \frac{1}{2}K_0 + \sum_n K_n \cos\left(\frac{1}{2}n\tau\right)$, тогда

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_n a_n \cos\left(\tfrac{1}{2}nx\right) = \lambda\left[\frac{K_0}{2}\cdot 2\pi a_0 + \sum_n K_n \cos\left(\tfrac{1}{2}nx\right)\cdot 2\pi a_n\right]$$

$\lambda_0^{-1} = 2\pi K_0$ и $\lambda_n^{-1} = 2\pi K_n$, т. е. СЗ $\lambda_n^{-1} = \int_{-2\pi}^{2\pi} d\tau\, K(\tau)\cos\left(\frac{1}{2}n\tau\right)$,

а СФ $\cos\left(\frac{1}{2}n\tau\right)$, $n = 1, 2, \dots$ $\tau = 2\pi x$.

Escaneado con CamScanner

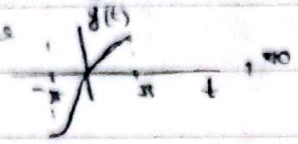
Date.

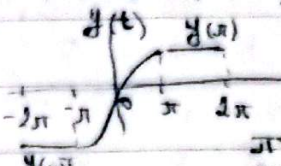
~~рассмотрим интервал~~

Равномерно если $y(t)$ непрер., тогда $y(x)$ непрер.



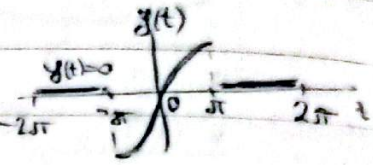
б) А если СФ нечетная.





$$y(x) = \sum_{n>0} a_n \sin\left(\frac{1}{2}nx\right) = \lambda \sum_{n>0} K_n \sin\left(\frac{n}{2}x\right) \int_{-\pi}^{\pi} dt\, y(t) \sin\left(\frac{n}{2}t\right)$$

$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} dt\, y(t) \sin\left(\frac{1}{2}nt\right)$. Все же расширение



a_n (четн.) $= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin\left(\frac{1}{2}nt\right)$, $y(t)=0$ вне $[-\pi,\pi]$.

$$\sum_n a_n \sin\left(\frac{1}{2}nx\right) = \lambda \sum_n K_n \sin\left(\frac{n}{2}x\right) \cdot 2\pi a_n \quad \text{и}$$

СЗ: $\lambda_n^{-1} = 2\pi K_n$, СФ $\sin\left(\frac{1}{2}nx\right)$. $K_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} d\tau K(\tau)\cos\left(\frac{1}{2}n\tau\right)$

$$\lambda_n^{-1} = \int_{-2\pi}^{2\pi} d\tau\, K(\tau)\cos\left(\frac{1}{2}n\tau\right)$$ как и для четных СФ.

Чтобы: $y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} dt\, K(t-x)\, y(t) \to y(x) = \int_{-2\pi}^{2\pi} dt\, K(t-x)\, y(t)$ $y(t)=0$ вне $[-\pi,\pi]$

$$y_n(x) = \cos\left(\frac{1}{2}nx\right) = \lambda_n \int_{2\pi+x}^{\pi} dt\, K(t-x)\cos\left(\frac{1}{2}nt\right)$$

$$y(x) = \lambda \int_{-2\pi-x}^{\pi} d\tau\, K(\tau)\, y(\tau+x) = \left| \begin{array}{l} y(t) - \text{периодич.} \\ c\ T = 4\pi \text{ и } y(\tau+x) - \\ \text{периодич.} \end{array} \right| = \lambda \int_{-2\pi}^{2\pi} d\tau\, K(\tau)\, y(\tau+x)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}nx = \lambda_n \int_{-2\pi}^{2\pi} d\tau\, K(\tau)\cos\tfrac{1}{2}n(\tau+x) = \lambda_n \int_{-2\pi}^{2\pi} d\tau K(\tau)\left[\cos\tfrac{n}{2}\tau\cos\tfrac{n}{2}x + \sin\tfrac{n}{2}\tau\sin\tfrac{n}{2}x\right]$$

$$= \lambda_n \cos\tfrac{n}{2}x \cdot \int_{-2\pi}^{2\pi} dt\, K(t)\cos\left(\frac{1}{2}nt\right) = \lambda_n \cdot 2\pi K_n \cos\tfrac{1}{2}nx \text{ – верно.}$$

Т.е. смысл $\lambda_n^{-1} = \int_{-2\pi}^{2\pi} d\tau\, K(\tau)\cos\left(\frac{1}{2}n\tau\right)$ или в моих обозн.

$\left(\lambda_n^{-1} \to \lambda_n,\ \tau = 2\pi x\right)$

$$\lambda_n = \int_{-1}^{1} dx\, g(x)\cos(\pi n x)$$

СФ – $\cos(\pi n x)$ и $\sin(\pi n x)$, $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

$n = 0, 1, 2 \ldots$ Но СФ $= \left\{ \begin{array}{ll} \cos\pi n x, & x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0, & x \text{ вне } [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{array} \right\} =$

не может быть представ. как ортогональ.

23/III Чтобы тест расчет SW расчет wires по этой формуле. MCAD Онлайн $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-6}$

wires, $\rho = 0,011$

ω_n	0,206 (n=0)	0,236 (n=1)	0,270 (n=2)	0,296 (n=3)	0,320 (n=4)	0,341 (n=5)
эксп f_n	–	0,236	0,266	0,297	0,319	0,339

! ← Эти частоты собств. колебания расслаив. на $\cos(\pi n x)$

→ Сначала хорошее. Если считать, что ном. мода ($n=0$) на периферии не наблюдается или СФ есть $\sin(n\pi x)$ с $\left(\frac{\partial m}{\partial n}\right)_{x=\pm 1/2} = 0$.

$$\lambda m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dt\, g(x-t)\, m(t), \quad g(x)_{x\in[-1,1]} = \sum_n g_n \cos(\pi n x), \quad g_n = \int_{-1}^{1} dx\, g(x)\cos(\pi n x)$$

$$g(x-x') = \sum_n g_n \left[\cos\pi n x \cdot \cos\pi n x' + \sin n\pi x \cdot \sin n\pi x'\right]$$

Escaneado con CamScanner

Date.

$u_m(x) = U_m(x) = \sin(\pi m x)$: $\lambda_m U_m(x) = \int dx' g(x-x') U_m(x')$

$\lambda_m U_m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' \sum_n g_n \left[\cos n\pi x \cdot \cos n\pi x' + \sin n\pi x \cdot \sin n\pi x'\right] \cdot \sin m\pi x'$

$\int_{-1/2}^{1/2} dx' \cos n\pi x' \cdot \sin m\pi x' = \left|2\pi x' = \tau\right| = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\tau}{2\pi} \cos\left(\frac{n}{2}\tau\right) \sin\left(\frac{m}{2}\tau\right) \equiv 0$ как интеграл нечетной функции

$\int_{-1/2}^{1/2} dx' \sin(n\pi x') \sin(m\pi x') = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} dx' \left[\cos(n-m)\pi x' - \cos(n+m)\pi x'\right] =$

$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-m)\pi x'}{(n-m)\pi} - \frac{\sin(n+m)\pi x'}{(n+m)\pi} \right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n-m)\frac{\pi}{2}}{(n-m)} - \frac{\sin(n+m)\frac{\pi}{2}}{(n+m)} \right] \neq 0$ если m, n разной четн.

$I_{mn} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\tau}{2\pi} \sin\left(\frac{m}{2}\tau\right) \sin\left(\frac{n}{2}\tau\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\tau \sin\frac{m}{2}\tau \sin\frac{n}{2}\tau = \left|\tau = 2t\right|$

Другое решение $U_m(x) = \begin{cases} \sin \pi m x, & |x| \le 1/2 \\ 0, & 1 > |x| > 1/2 \end{cases}$, тогда можно расширить интеграл

$\lambda_m U_m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g(x-x') U_m(x) = \int_{-1}^{1} dx' g(x-x') U_m(x')$

$\lambda_m U_m(x) = \int_{-1}^{1} dx' \sum_n g_n \left[\cos n\pi x \cos n\pi x' + \sin n\pi x \cdot \sin n\pi x'\right] \sin m\pi x'$

здесь матрица синусов $\cos = \sin \pi x'$, $x' \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, x произвольно

$I_{mn} = \int_{-1}^{1} dx' \sin n\pi x' \cdot \sin m\pi x' = \delta_{mn}$ и $\lambda_m U_m(x) = \sum_n g_n \sin n\pi x \, \delta_{mn} = g_m U_m(x)$ и

$\lambda_n = g_n = \int_{-1}^{1} dx\, g(x) \cos(\pi n x)$. Сходится.

$U_m(x) \stackrel{?}{=} \sin(\pi m x) = \sum_n a_n \sin(\pi n x)$, $a_n = \int_{-1}^{1} dx\, U_m(x) \sin n\pi x = \left|\begin{matrix} U_m(x) = 0 \text{ при } |x| \le 1/2 \\ U_m(x) = \sin m\pi x \text{ при } |x| \le 1/2 \end{matrix}\right| =$

$= \int_{-1/2}^{1/2} dx \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) = I_{mn} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n-m)\frac{\pi}{2}}{(n-m)} - \frac{\sin(n+m)\frac{\pi}{2}}{(n+m)} \right]$

$U_m(x) = \sum_n I_{mn} \sin(\pi n x)$ — СФ

$\lambda_m U_m(x) = \lambda_m \sum_{n'} I_{mn'} \sin(\pi n' x) = \sum_n \int_{-1/2}^{1/2} dx' g_n \left[\cos\pi n x \cos\pi n x' + \sin n\pi x \sin n\pi x'\right] \times$

$\times \sum_{n'} I_{mn'} \sin(\pi n' x') = \sum_n \int_{-1}^{1} dx' g_n \sin n\pi x \sin n\pi x' \sum_{n'} I_{mn'} \sin(n'\pi x') =$

($\sum_{n'} I_{mn'} \sin(\pi n' x') = U_m(x')$)

$= \sum_{nn'} g_n I_{mn'} \sin n\pi x \int_{-1}^{1} dx' \sin n\pi x' \cdot \sin n'\pi x' = \sum_{n'} g_{n'} I_{mn'} \sin n'\pi x$,

($\int_{-1}^{1} dx' \sin n\pi x' \cdot \sin n'\pi x' = \delta_{nn'}$)

Переобозначим коэф. при $\sin n'\pi x$, получим: $\lambda_m I_{mn'} = g_{n'} I_{mn'}$, $\lambda_m = g_{n'}$?

Итого: $\lambda u(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g(x-x') u(x') = \left|\begin{matrix} u(x') = u(x'), |x| < 1/2 \\ u(x') = 0, |x| > 1/2 \end{matrix}\right| = \int_{-1}^{1} dx' g(x-x') u(x')$

$\lambda u(x) = \sum_n \int_{-1}^{1} dx' g_n \left[\cos\pi n x \cos\pi n x' + \sin n\pi x \cdot \sin\pi n x'\right] u(x')$, где $u(x)$ - некот.

$\lambda u(x) = \sum_n g_n \sin n\pi x \int_{-1}^{1} dx' u(x') \sin n\pi x'$, $u(x) = \sum_{n'} a_{n'} \sin(n'\pi x)$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$$\lambda \sum_{n'} a_{n'} \sin(n'\pi x) = \sum_n g_n \sin n\pi x \int_{-1}^{1} dx' \sin\pi x' n \left(\sum_{n'} a_{n'} \sin n'\pi x'\right).$$

$$= \sum_{nn'} g_n a_{n'} \sin n\pi x \int_{-1}^{1} dx' \sin n\pi x' \cdot \sin n\pi x' = \sum_{n'} g_{n'} a_{n'} \sin(n'\pi x) \quad (n' \to n)$$

$\delta_{nn'}$

$\sin n\pi x$: $\lambda a_n = g_n a_n$, $\lambda = \lambda_n = g_n = \int_{-1}^{1} dx\, g(x) \cos(\pi n x)$.

26/XII - 27/XII Обзор литературы. Письмо - Fax Б. Иванову.
28/XII покупка билетов. Саггефоur.

29/XII SW wires. Продолжение.

Покажем $\int_{-1/2}^{1/2} dx\, f(x, \sqrt{x^2+a^2}) = a\int du\, f(a\,\mathrm{tg}\,u, a\sec u)\sec^2 u$, $\mathrm{tg}\,u = \frac{x}{a}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$.

$\lambda m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} g(x-x')\, m(x')\, dx' = \frac{2}{p}\int dx' \ln\left[\frac{(x-x')^2}{(x-x')^2+p^2}\right] m(x')$ — можно ли здесь $\frac{\partial}{\partial x}$? Ведь ФГ $g(x-x')$ имеет сингулярную $\frac{\partial g}{\partial x}$ при $x = x'$.

Пусть $x=0$, $m(0) \neq 0$ $\lambda m(0) = \int_{-1/2}^{1/2} g(x')\, m(x')\, dx'$ можно рассм. как уравнение Фредгольма 1го рода.

Гр. 243 - Полянин: $\int_a^b f(t)\, y(t)\, dt = B$ имеет решение $x=\alpha, \beta=1$

$y(x) = p\sin\lambda x + q\cos\lambda x$, ефунда!

SW Для цилиндрич. дана ур-е на СФ (3 магнитостат. оператора:

$$S_\mu^z(\rho) = \lambda \int_0^R d\rho'\, g_{zz}^{\mu}(\rho,\rho')\, S_\mu^z(\rho'), \quad g_{zz}^{\mu}(\rho\rho') = \frac{4\pi}{L}\int_0^\infty dk\, (e^{-kL}\cdot I_\mu(k\rho) I_\mu(k$$

Применяется преобразование Ханкеля

$S_\mu(\rho) = \int_0^\infty dk\, k\, J_\mu(k\rho)\, S_\mu(k)$ это ур-е можно переписать в виде

$$S_\mu(k) = \frac{4\pi}{L}\lambda\left(\frac{e^{-kL}-1}{k}\right)\int_0^\infty dk' k' \Lambda_\mu(k,k')\, S_\mu(k')$$ с ∞ - пределами

с ядром $\Lambda_\mu(k,k') = \int_0^R d\rho\, \rho\, J_\mu(k\rho)\, J_\mu(k'\rho)$.

При $\frac{R}{L} \gg 1$ $\Lambda_\mu(k,k') = \frac{2}{\pi}\frac{\sin(k-k')R}{(k^2-k'^2)}$, это в главном по $\frac{L}{R}$ Тихе (27.12.99)

здесь $S_\mu^z(k) = \frac{4\lambda}{L}\left(\frac{e^{-kL}-1}{k}\right)\int_0^\infty dk' \frac{\sin(k-k')R}{(k-k')} S_\mu^z(k')$ — нет зависимости от "μ".

Date. 2001 г.

Подготовка к конф. в San-Antonio и семинару в Oakland. 2-6/I

Поездка в USA: на MMM-Intermag в San Antonio и 2001 г.
в Oakland Univ. и A. Slavin. Познакомился с Prof. Sonia, 7-18/I
с A. Ross (MIT), Grimsditch (Argonne), L. Buda (Q-vortex), менеджером Rid Rite и
сопровождал Prof. Weiss'a.

План работы на ближайшее время (с 1/XI 2000 г.): 20/I

1) Подготовить ст. со Славиным по SW в rectangul. dots в PRB
2) Подгот. ст. со Славиным и Демокритовым по SW в rect. dots и итогов методом СФ магнитост. оператора - PRL
3) Если EMMA статью не будет опубликована, подг. ст. с Усовым по магнитостат. coupling в S.d. и vortex dot arrays
4) Ст. с Метловым по стабилизации vortex state (без поля) и ремейк vortices с $\nu = 2$ и $\nu = -1$ (MFM)
5) Частоты колебаний vortexa (Метлов, Стефанович и/или Иванов)
6) Ст. по "rigid" vortex model с Новосадом и/или Ивановым - в APL
7) Расчет с Любчанским NMO of vortex dots arrays
8) Прояснить ситуацию с Порто (Пономарев) и съездить в португ. кас.
9) Написать рецензию ст. для Shinà и съездить к нему на семинар
10) Решить кварт. вопрос на ближ. месяцы
11) Разослать статьи и письма - appl. по запросам San Antonio конф.
12) Прояснить ситуацию с поездкой в Japan (Tohoku)
13) Посчитать H_{an}, H_n, χ для coupled dots для Новосада
14) Организовать работу по изготовл. дотов (Новосад) и их FMR - измерению (Какадей, Pardavi-Horvath, Grimsditch)
15) ~~Тезисы в Стокгольм и/или Бильбао~~ (Метлов, Новосад) (до фев. 1) (до март. 1)
16) ~~Ответить Japan аспиранту~~ и съездить в Jap. консульство
17) Заняться application в Australia (до 31.03) и Seagate, Singapur (в пред. San Antonio)
18) Написать С.А. Ross о ОФП $11 \to 1$ в ремейке дотов
19) ~~Рецензия для JAP~~

Escaneado con CamScanner

Date. . .

21-24/I Внесение изменений и дополнений в ст. со Славиным по SW в тестах dots и ФГ.

26/I Новые статьи. Письма Иванову и Ковсаду. Рецензия для

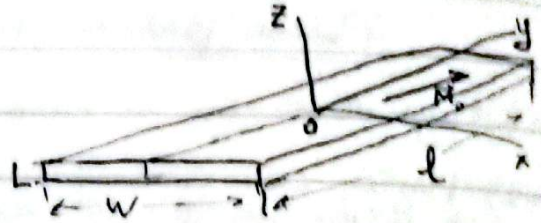
27-29/I Болел.

30/I Вычитывание и правка Abstracts на JEMS с Матловым по

31/I SW rectangular dots.

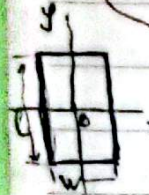
(там x ⇄ y)

Согласно 1/III 001 Y компонента



дип. поле $\parallel \vec{M}_0 \parallel oy$ после усреднения по z если $H_d^y(k^2=k_x^2+k_y^2$

$$H_d^y(x,y) = -\frac{4}{\pi} M_s \int d^2\vec{k}\, f(kL)\, \frac{k_y^2}{k^2} \cdot \frac{\sin(k_x \frac{w}{2})}{k_x} \cdot \frac{\sin(k_y \frac{l}{2})}{k_y} \cdot \cos k_x x \cdot \cos k_y y$$



1) на линии $x=0$ (центр дота), т.е. вдоль осевой линии $\parallel oy$

$$\rightarrow H_d^y(0,y) = -\frac{4}{\pi} M_s \int d^2\vec{k}\, f(kL)\, \frac{k_y^2}{k^2}\, \frac{\sin(k_x \frac{w}{2})}{k_x}\, \frac{\sin(k_y \frac{l}{2})}{k_y} \cos k_y y$$

2) усреднение по x: $\langle H_d^y(x,y)\rangle_x = \frac{1}{w}\int_{-\frac{w}{2}}^{w/2} dx\, H_d^y(x,y)$

$$\frac{1}{w}\int_{-\frac{w}{2}}^{w/2} dx \cos k_x x = \frac{2}{w}\,\frac{\sin(k_x \frac{w}{2})}{k_x}$$ и получим

$$\rightarrow \langle H_d^y(x,y)\rangle_x = -\frac{8}{\pi w} M_s \int d^2\vec{k}\, f(kL)\, \frac{k_y^2}{k^2}\, \frac{\sin^2(k_x \frac{w}{2})}{k_x^2}\, \frac{\sin(k_y \frac{l}{2})}{k_y} \cos k_y y$$

Введем (как 9/I 001) $p = \frac{L}{w}$ и $u = \frac{l}{w}$, т.е. нормировка на ширину дота. $p \ll 1$, а u может > 1.

Замена $k_y w = x_y$

$$\frac{1}{M_s} H_d^y(0,y) = -\frac{4}{\pi} \int d^2\vec{x}\, f(px)\, \frac{x_y^2}{x^2}\, \frac{\sin\frac{x_x}{2}}{x_x}\, \frac{\sin(x_y \frac{u}{2})}{x_y} \cos\left(x_y u \frac{y}{l}\right)$$

$$\frac{1}{M_s}\langle H_d^y(x,y)\rangle_x = -\frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d^2\vec{x}\, f(px)\, \frac{x_y^2}{x^2}\, \frac{\sin^2(\frac{x_x}{2})}{x_x^2}\, \frac{\sin(x_y \frac{u}{2})}{x_y} \cos\left(x_y u \frac{y}{l}\right)$$

$\frac{y}{l}$ изменяется от $-1/2$ до $1/2$. Два параметра дота: p и u.

Escaneado con CamScanner

Date. 01 · 02 ·

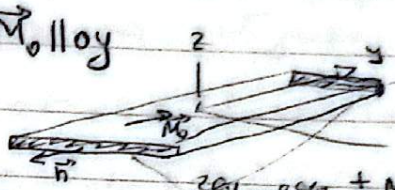
подынтегр. выражение отличается множителем $2\frac{\sin\frac{x_x}{2}}{x_x}$.

$\langle H_d^y(x,y)\rangle_x$ и $H_d^y(y, x=0)$ rectan.dat, $\frac{L}{w}=0{,}035$, $\frac{l}{w}=1{,}75$

y/l	0,01	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
$H_d^y(0,y)/M_s$	-0,042	-0,06	-0,064	-0,079	-0,075	-0,092	-0,125	-0,180	-0,306	-0,653	0,017
$\langle H_d^y(x,y)\rangle_x$			-0,054	-0,027	$2\cdot10^{-4}$	$-3{,}2\cdot10^{-3}$			0,024	-0,133	$-3\cdot10^{-5}$

→ Результат существенно зависит от пределов $\int$ по x_x, x_y, даже если они – 500, 700.

Решение через м. потенциал:



1/π

заряды $\pm M_s$

$$\psi(\vec{r}) = -\int dS' \frac{(\vec{M}\cdot\vec{n})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad S' - \text{сечение доз.}$$

плоскостью $y=\frac{l}{2}$ и пл. $y=-\frac{l}{2}$

$$\psi(\vec{r}) = -M_s\int dx'dz' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\Big|_{y'=l/2} + M_s\int dx'dz' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\Big|_{y'=-l/2} =$$

$$= M_s \int_{-w/2}^{w/2} dx' \int_0^L dz' \left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\Big|_{y'=-l/2} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\Big|_{y'=l/2} \right], \quad \text{См. 23.06.99}$$

$$H_d^y(\vec{r}) = -\frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial y} = M_s \frac{\partial}{\partial y}\int dx' \int dz' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\Big|_{y'=l/2}^{y'=-l/2}, \quad |\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(x-x')^2+\dots}$$

Усреднение по толщине z:

$$H_d^y(x,y) = \frac{1}{L}\int_0^L dz\, H_d^y(\vec{r}) = \frac{M_s}{L}\frac{\partial}{\partial y}\int dx' \int dz dz' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\Big|_{y'=-l/2}^{y'=l/2}$$

Уберем пределы интегр. и найдем $\langle H_d^y(x,y)\rangle_x$ и $H_d^y(y, x=0)$

Rect. dat, $\vec{M}_0 \| oy$, $L/w = 0{,}035$, $l/w = 1{,}75$

y/l	0	0,05	0,1 (кир.)	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
$\langle H_d^y\rangle_x$	-0,066	-0,068	-0,084	-0,084	-0,091	-0,105	-0,166	-0,257	-0,385	-0,665	
$H_d^y(y, x=0)$	-0,091	-0,081	-0,072	-0,097	-0,128	-0,139	-0,166	-0,250	-0,424	-0,780	-1,633

-0,078 (0,35), -0,093 (0,4), -0,090 (0,1 числ.), -0,102 (0,2 числ.), 0,31, y=0,48

→ Пересчитаем для удобства обработки эксп. на внутреннее поле $H_i = H + H_d^y$, $H = 600$ Э, $M_s = 10{,}2$ кОе$/4\pi = 812$ Гс.

Файл ORIGIN H_d-rectan.opj

См. $H_d^y(x,y)$ и H_{mn}^{mn} — конец этой тетради — вставку на 12/ч

Date. . .

2/II Расчет SW root. dats по эвристической ф-ле Славина

$\int dy\, k_y = n\pi$ - Eq (12).

Согласно Eq. (12) из Fax'a Славина

$$\int_{y_{min}(\omega)}^{y_{max}(\omega)} dy\, k_y(H_i, k_x^m, \omega) = n\pi, \quad n - \text{целое}$$

$m = 0$ для осн. моды

Экспериментально для $w = 1\,\mu m$, $l = 1{,}75\,\mu m$, $L = 55\,nm$ - root.dat

Дан. получ. нами резонансную частоту $\omega_0 = 5{,}2\,GHz$, $H = 600\,Oe$, $\vec{H} \parallel Oy$.

Пусть $m = 0$, $k_x^m = 0$. тогда SW - дисперс. Закон (тонкий диэл $\frac{L}{w} \to 0$):

$$\left(\frac{\omega_{on}}{\omega_M}\right)^2 = \left[\frac{\omega_H}{\omega_M} + d' k_{mn}^2 + H_{mn}\right]\left[\frac{\omega_H}{\omega_M} + d' x_{mn}^2 + 1 - f(x_{mn}L) + H_{mn}\right]$$

$$\omega_{on}^2 = \left[\omega_H + H_{mn}\omega_M + d' k_y^2 \omega_M\right]\left[\omega_H + \omega_M H_{mn} + \omega_M d' k_y^2 + \omega_M\{1 - f(k_y L)\}\right]$$

Идея Славина $\omega_H + \omega_M H_{mn}$ заменить на $\omega_{H_i} = \gamma H_i$, где

$H_i = H + H_d^y(x,y)$, $H_d^y(x,y)$ берется при $x = 0$ или $\langle \dots \rangle_x$.

Тогда $$\omega_{on}^2 = \left[\omega_{H_i}(y) + d'\omega_M k_y^2\right]\left[\omega_{H_i}(y) + d'\omega_M k_y^2 + \omega_M\{1 - f(k_y L)\}\right],$$

откуда находится $k_y(y)$. Если обмен выбросить, то

$$\omega_{on}^2 = \omega_{Hi}\left[\omega_{Hi} + \omega_M\{1 - f(k_y L)\}\right], \quad \omega_{on} \to \omega$$

$$\omega^2 - \omega_{Hi}^2 = \omega_{Hi}\omega_M\left[1 - f(k_y L)\right], \quad 1 - f(x) = 1 - \left[1 - \frac{1}{x}(1 - e^{-x})\right] = \frac{1}{x}(1 - e^{-x})$$

$$\frac{1 - e^{-k_y L}}{k_y L} = \frac{\omega^2 - \omega_{Hi}^2}{\omega_{Hi}\omega_M} \quad \text{или} \quad \tilde{f}(k_y L) = \frac{\omega^2 - \omega_{Hi}^2(y)}{\omega_{Hi}(y)\omega_M},$$ если $\tilde{F}(x)$ - функция обратная к $f(x) = \frac{1}{x}(1 - e^{-x})$

то $$k_y(y) = \frac{1}{L}\tilde{F}\left(\frac{\omega^2 - \omega_{Hi}^2(y)}{\omega_{Hi}(y)\omega_M}\right)$$ - задает з-ю $k_y(y)$.

Еще проблема найти y_{min} и y_{max}, которые определяют область локализации SW при данной ω.

Надо построить

$$\rightarrow \omega^2(k_y) = \omega_M^2\left[\frac{\omega_{Hi}}{\omega_M} + d' k_y^2\right]\left[\frac{\omega_{Hi}}{\omega_M} + d' k_y^2 + 1 - f(k_y L)\right]$$

как функцию k_y для разных $\omega_{Hi} = \gamma H_i$. $d' = \frac{d}{4\pi} = 2{,}5 \cdot 10^{-13}\,cm^2$ диэлектр.

Date.

Введем $p = \frac{L}{w}$ и $k_y w = x_y$ – безразмерные.

$\alpha' k_y^2 = \alpha' \frac{1}{w^2} x_y^2 = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-13}\ \text{см}^2}{(1 \cdot 10^{-4}\ \text{см})^2} x_y^2 = 0{,}25\, x_y^2 \cdot 10^{-1}$, $\frac{\alpha'}{w^2} = 0{,}25 \cdot 10^{-1}$, $p = 0{,}035$

1 μm – ошибка 1 μm $= 10^{-4}$ см

$$\frac{\omega^2(k_y)}{\omega_M^2} = \left[\frac{\omega_{Hi}}{\omega_M} + \frac{\alpha'}{w^2} x_y^2\right]\left[\frac{\omega_{Hi}}{\omega_M} + \frac{\alpha'}{w^2} x_y^2 + 1 - f(p x_y)\right]$$

Размаг. факторы rectangular dot. 3/II

Славин в e-mail и Fax почему-то использует $N_{yy} = \frac{2}{\pi}\frac{L}{w}$, который явл. размаг. фактором (неточным) wire || его ширине w". (средняя по сечению $x = 0$)

Размаг ф. Aharoni'98 для записи. размаг. факторов получим соотв. 10/I 2000 г. (oy ∥ M – l, x – w) при $p \to 0$, $u \sim 1$:

(*) $$N_{xx} = -4p \ln \frac{p}{2u}, \quad N_{yy} = -4\frac{p}{u} \ln \frac{p}{2}, \quad N_{zz} = \frac{4p}{u} \ln \frac{p}{2} + 4p \ln \frac{p}{2u} + 4\pi$$

← rect.dot, $p \to 0$, $u \sim 1$, конечно

где $p = L/w$, $u = l/w$.

В частности, для дота Демокритова с $L = 35$ нм, $w = 1$ μm, $l = 1{,}75$ μm $p = 0{,}035$; $u = 1{,}75$ и $N_{yy}(p,u) = -4\frac{0{,}035}{1{,}75} \ln\left(\frac{0{,}035}{2}\right) = 0{,}324$.

$$\langle H_d^y(x,y)\rangle_{x,y} = -M_s N_{yy} = -\frac{16 M_s}{\pi w l} \int d^2\vec{k}\, f(kL) \frac{\sin^2\left(k_x \frac{w}{2}\right)}{k_x^2} \frac{\sin^2\left(k_y \frac{l}{2}\right)}{k_y^2} \frac{k_y^2}{k^2}$$

(**) $$N_{yy}(p,u) = \frac{16}{\pi}\frac{1}{u} \int d^2\vec{x}\, f(px) \frac{\sin^2 \frac{x_x}{2}}{x_x^2} \frac{\sin^2\left(\frac{x_y}{2} u\right)}{x_y^2} \frac{x_y^2}{x^2}$$, $x_d = k_d w$.

вдоль $\vec{M}$, rect. dot, ballistic factor

Очевидно $N_{yy} \to 0$ при $u = l/w \to \infty$ (переход к wire).

→ Поэтому оценка по N_{yy} $\langle H_d^y \rangle_V = -M_s \cdot N_{yy} = -810 \cdot 0{,}324 = -262$ (Э) всего.

и внутреннее поле среднее $\langle H_i \rangle_V = 600$ Э $- 260$ Э $= 340$ Э.

→ Прямой расчет по ф. Aharoni от 10/I дает $N_{yy}(p,u) = 0{,}341$ (SW-prism mod), немного больше, чем по приближен. формулам (*) $N_{yy} = 0{,}324$.

К сожалению расчет по (**) зависит от пределов $\int$ по x_x и чем x_{max} брать слишком большие пределы, т.к. MCAD считает функцию с осцилляциями от величины предела. Оптимально для (**) $x_{max} = 400$, то дает $N_{yy}(p,u) = 0{,}343$.

Escaneado con CamScanner

Date. . .

Подставим из формулы 10/5 (которая выв. ранее в пределе $v \to \infty$ Aharoni '58)
в пределе $u = kv \gg 1$, т.е. WIRES - предел.

$$\lim_{u\to\infty} N_{yy}(p,u) = \frac{4p}{u}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+u^2}-1}{\sqrt{1+u^2}+1}\right) - \ln\frac{p}{2} - u + \frac{1}{2} + \sqrt{u^2-1}\right] =$$

$$= \frac{4p}{u}\left[\sqrt{u^2+1} - u + \frac{1}{2} - \ln\frac{p}{2} - \operatorname{arcth}\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right] =$$

$$= 4p\,\frac{\sqrt{u^2+1}-u}{u} - \frac{4p}{u}\operatorname{arcth}\frac{1}{u} + \frac{4p}{u}\left(\tfrac{1}{2} - \ln\frac{p}{2}\right) =$$

$$= 4p\left[\sqrt{1+\frac{1}{u^2}} - 1\right] - \frac{4p}{u}\cdot\frac{1}{u} + \frac{4p}{u}(\cdot) = \frac{4p}{u}\left(\frac{1}{2} - \ln\frac{p}{2}\right) + O\left(\frac{1}{u^2}\right)$$

($\sqrt{1+\frac{1}{u^2}} - 1 \sim \frac{1}{2u^2}$)

$\to \lim_{u\to\infty} N_{yy}(p,u) = 0$ как размер. фактор || оси wire.

$$\frac{1}{u}N_{xx}(p,u) \underset{u\to\infty}{=} p\ln\frac{2u}{p} + \frac{1}{2}p\ln\left[\frac{\sqrt{u^2+1}-u}{\sqrt{u^2+1}+u}\right] + p\frac{u}{\sqrt{u^2+1}} + \frac{p}{u}\frac{1}{\sqrt{u^2+1}} + \frac{p}{2} - \frac{p}{u} =$$

$$= p\ln\frac{2u}{p} + \frac{1}{2}p\ln\left[\frac{\sqrt{1+1/u^2}-1}{\sqrt{1+1/u^2}+1}\right] + p\frac{\sqrt{u^2+1}}{u} + \frac{p}{2} - \frac{p}{u} =$$

$$= p\ln\frac{2u}{p} + \frac{1}{2}p\ln\left[\frac{1/(2u^2)}{2+\frac{1}{2u^2}}\right] + p\sqrt{1+\frac{1}{u^2}} + \frac{p}{2} - \frac{p}{u} =$$

$$= p\ln\frac{2u}{p} + \frac{1}{2}p\ln\left[\frac{1}{4u^2}\right] + p\left(1+\frac{1}{2u^2}\right) + \frac{p}{2} - \frac{p}{u} = p\left[\ln(2u) - \ln p + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\cdot 2\ln\left(\frac{1}{2u}\right) + \frac{3}{2} - \frac{1}{u}\right] = p\left[-\ln p + \frac{3}{2} - \frac{1}{u} + O(1/u^2)\right]$$

$$\lim_{u\to\infty} N_{xx}(p,u) = 4p\left[\frac{3}{2} - \ln p\right]$$ для wires, а вовсе не $N_{xx} = 4\pi\cdot\frac{2}{\pi}p = 8p$ (славина)

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+u^2}-u}{\sqrt{1+u^2}+u}\right) \overset{(-1)}{=} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}}{1-\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}}\right) = -\operatorname{Arcth}\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$

Вычислим еще $N_{zz}(p,u)$ (см. 10/Доп.):

$$\frac{1}{u}N_{zz}(p,u) = \pi - p\left[2\sqrt{1+\frac{1}{u^2}} - \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{u}\ln\frac{2}{p} + \ln\frac{2u}{p} - \frac{1}{u}\operatorname{Arcth}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+u^2}-u}{\sqrt{1+u^2}+u}\right)\right] = \pi - p\left[2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2u} + \frac{1}{u}\ln\frac{2}{p} + \ln\frac{2u}{p} - \frac{1}{u}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1/2u^2}{2+\frac{1}{2u^2}}\right)\right] = \pi - p\left[\frac{3}{2} + \ln 2u - \ln p + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4u^2}\right)\right] = \pi - p\left[\frac{3}{2} - \ln p\right]$$

$$\lim_{u\to\infty} N_{zz}(p,u) = 4\pi - 4p\left[\frac{3}{2} - \ln p\right]$$ - для wires.

Escaneado con CamScanner

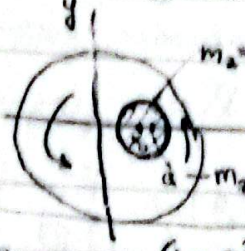
Date. 05.02.

Vortex stability (conformal mob)

Устойчивость вихря в цил. доке (с К.Магновым) S/II (см. χ_{in} - 12/XI 002.) и 21/XI 002.

$c = \frac{b}{R}$ - радиус "сосуда" постоянен. Вихря.

Отображение вихрь на "a" $z \to \frac{z-a}{1-az}$ вдоль $0x$ имеет "сосуд" в виде окружности с центром в точке $x_0 = a\frac{1-c^2}{1-c^2a^2}$ и радиусом $\frac{R_V}{R} = r = c\cdot\frac{(1-a^2)}{1-c^2a^2}$.



$R_c = cR$ - в обозначениях Магнова, $g = \frac{L}{R}$.

$$W(c,a) = W_{ex}(c) + W_m^{face}(c,a) + W_m^{side}(a) + W_m^{vol}(c,a)$$

(энергия стационарного вихря.) — пренебрегаем в 1-м приближении.

при $a=0$ радиус "сосуда" (c) удовл. уравнению Усова

$$\left(\frac{1}{4\pi M_s^2 V_d}\right) W_{us}(b) = \frac{c^3}{g}\left[G_u(0) - G_u\left(\frac{g}{c}\right)\right] + \lambda^2\left[2 - \ln c\right], \quad \lambda^2 = \frac{L_E^2}{4\pi R^2}, \; c = b/R, \; g = L/R, \; L_E = R_0.$$

Только удобнее ввести $\xi = \frac{b}{L} = \frac{b}{R}\frac{R}{L} = \frac{c}{g}$, $g = \text{const}$.

$$(*)\; W_{us}(\xi) = \xi^3 g^2\left[G_u(0) - G_u\left(\tfrac{1}{\xi}\right)\right] + \lambda^2\left[2 - \ln\xi - \ln g\right]$$

$$\frac{\partial W_{us}(\xi)}{\partial \xi} = g^2\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\xi^3\left[G_u(0) - G_u(1/\xi)\right] - \frac{\lambda^2}{g^2}\frac{1}{\xi}\right\} = 0, \quad \frac{\lambda^2}{g^2} = \frac{L_E^2 R^2}{4\pi R^2 L^2} = \frac{L_E^2}{4\pi L^2} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{L_E}{L}\right)^2$$

или $\frac{\partial}{\partial \xi}\xi^3\left[G_u(0) - G_u(1/\xi)\right] = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{L_E}{L}\right)^2\frac{1}{\xi}$, ξ_0 зависит лишь от L/L_E.

Будем считать всю энергию нормировано на $4\pi M_s^2 V_d$.

$$W_{us}(c) = W(c, a=0) = \frac{c^3}{g}\left[G_u(0) - G_u\left(\frac{g}{c}\right)\right] + \lambda^2\left[2 - \ln c\right]$$

$$\frac{\partial W(c,0)}{\partial c} = \frac{3c^2}{g}\left[G_u(0) - G_u\left(\frac{g}{c}\right)\right] + \frac{c^3}{g}(-1)\frac{\partial G_u(x)}{\partial x}\frac{(-g)}{c^2} - \lambda^2\frac{1}{c} = 0$$

$$(*)\quad \frac{\lambda^2}{c} = \frac{3c^2}{g}\left[G_u(0) - G_u\left(\frac{g}{c}\right)\right] + c\left.\frac{\partial G_u(x)}{\partial x}\right|_{x=g/c}, \text{ с учетом } G_u(x) = G(x,0)$$

это в точности Eq. (5) Магнова.

Хотим получить разложение по "a":

$$W(c,a) = W(c,a)\Big|_{a=0} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 W(c,a)}{\partial a^2}\right|_{\substack{c=c_0(a)\\ a=0}} \cdot a^2, \quad \text{где } c_0(a) \text{ равновесное "c" при } a \neq 0.$$

Ведь $\left.\frac{\partial W}{\partial a}\right|_{a=0} = 0$.

Escaneado con CamScanner

Date. . .

Две варьир. переменные: a – сдвиг вортекса и c или R_v. $c = \frac{R_{v(a=0)}}{R}$.

R_v при $a \neq 0$ не нужно определять, просто $\frac{R_v}{R} = c\,\frac{1-a^2}{1-c^2a^2}$, где $c = \frac{b}{R}$ – равновес. радиус «сота» при $a=0$.

Надо разложить $W_m^{face}(c,a)$ по a с узлами $R_v(a)$ и $\delta_{(a)}$

$$W_m^{face}(c,a) = \frac{R_v^3}{LR^2}\left[G(0,\delta) - G\left(\tfrac{L}{R_v},\delta\right)\right], \quad \delta = 2\operatorname{arctg}(ac).$$

$$\left(\frac{R_v}{R}\right)^3 = c^3\left(\frac{1-a^2}{1-c^2a^2}\right)^3 = c^3\left[(1-a^2)(1+c^2a^2)\right]^3 = c^3\left[1+(c^2-1)a^2\right]^3 =$$
$$= c^3\left[1+3(c^2-1)a^2\right] + O(a^4)$$

$$G(0,\delta) = G(0,\delta)\big|_{a=0} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G(0,\delta)}{\partial a^2}\Big|_{a=0}$$

$$\frac{\partial G(0,\delta)}{\partial a} = \frac{\partial G}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial a}, \quad \frac{\partial^2 G(0,\delta)}{\partial a^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial \delta^2}\left(\frac{\partial \delta}{\partial a}\right)^2 + \frac{\partial G}{\partial \delta}\frac{\partial^2 \delta}{\partial a^2}, \quad G = G(0,\delta)$$

$$\frac{\partial G\left(\frac{L}{R_v},\delta\right)}{\partial a} = \frac{\partial G(x,\delta)}{\partial x}\Big|_{x=\frac{L}{R_v}}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial G}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial a}$$

$$\frac{\partial^2 G\left(\frac{L}{R_v},\delta\right)}{\partial a^2} = \frac{\partial^2 G(x,\delta)}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2 + \frac{\partial G(x,\delta)}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 G(x,\delta)}{\partial \delta^2}\left(\frac{\partial \delta}{\partial a}\right)^2 + \frac{\partial G(x,\delta)}{\partial \delta}\frac{\partial^2 \delta}{\partial a^2}$$

Нужны $x = \frac{L}{R_v} = \frac{L}{R}\frac{1}{c}\frac{1-c^2a^2}{1-a^2}$, $\delta(a) = 2\operatorname{arctg}(ac)$

$$W_m^{face}(c,a) = R_v^3[\dots], \quad \frac{\partial W_m^f}{\partial a} = 3R_v^2\frac{\partial R_v}{\partial a}[\dots] + R_v^3\frac{\partial}{\partial a}[\dots]$$

$$\frac{\partial^2 W_m^f}{\partial a^2} = 6R_v\left(\frac{\partial R_v}{\partial a}\right)^2[\dots] + 3R_v^2\frac{\partial^2 R_v}{\partial a^2}[\dots] + 3R_v^2\frac{\partial R_v}{\partial a}\frac{\partial[\dots]}{\partial a} + R_v^3\frac{\partial^2}{\partial a^2}[\dots]$$

$R_v(a) = cR\,\frac{1-a^2}{1-c^2a^2} = cR\left[1+(c^2-1)a^2\right]$. В $\frac{\partial^2 W_m^f}{\partial a^2}$ нужна до a^0.

$$\frac{\partial R_v}{\partial a} = cR(c^2-1)2a, \quad \frac{\partial^2 R_v}{\partial a^2} = 2cR(c^2-1)$$

$$\delta(a) = 2\operatorname{arctg}(ac) = 2\left[ac - \tfrac{1}{3}a^3c^3 + \dots\right], \quad \frac{\partial \delta}{\partial a} = 2c - 2c^3a^2, \quad \frac{\partial^2 \delta}{\partial a^2} = -4c^3a$$

$$\frac{\partial^2 W_m^f}{\partial a^2} = 3R_v^2 \cdot 2cR(c^2-1)\frac{1}{LR^2}\left[G(0,\delta) - G\left(\tfrac{L}{R_v},\delta\right)\right] + R_v^3\frac{1}{LR^2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left[G(0,\delta) - G\left(\tfrac{L}{R_v},\delta\right)\right] =$$

$$= 6\frac{R_v^2}{LR}c(c^2-1)\left[G(0,\delta) - G\left(\tfrac{L}{R_v},\delta\right)\right] + \frac{R_v^3}{LR^2}\left[\frac{\partial^2 G(0,\delta)}{\partial \delta^2}4c^2 - \frac{\partial G(x,\delta)}{\partial x}\frac{2L}{cR}(1-c^2) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 G(x,\delta)}{\partial \delta^2}4c^2\right] = \left|\text{сочл. до } a^0\right| = \left|G(x,\delta)\big|_{\delta=0} = G_u(x)\right| =$$

$$= 6\frac{c^3R^2}{LR}(c^2-1)\left[G_u(0) - G_u\left(\tfrac{1}{c}\right)\right] + \frac{c^3R^3}{LR^2}\left[4c^2\left\{\frac{\partial^2 G(0,\delta)}{\partial \delta^2} - \frac{\partial^2 G(x,\delta)}{\partial \delta^2}\right\} - \frac{2L}{cR}(1-c^2)\frac{\partial G(x,\delta)}{\partial x}\right]$$

Escaneado con CamScanner

Date.

$$x(a) = \frac{L_1}{Rc}\,\frac{1-c^2a^2}{1-a^2} = \frac{L_1}{cR}(1-c^2a^2)(1+a^2) = \frac{L_1}{cR}\left[1+(1-c^2)a^2\right]$$

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{L_1}{cR}(1-c^2)\cdot 2a\,, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} = \frac{L_1}{cR}\,2(1-c^2)$$

$$\frac{\partial^2 W_m^{fast}}{\partial a^2}\Big|_{a=0} = 6\frac{c^3}{g}(c^2-1)\left[G_4(0) - G_4\left(\frac{g}{c}\right)\right] +$$

$$+\frac{c^3}{g}\left[4c^2\frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\left\{G(0,\delta) - G\left(\frac{g}{c},\delta\right)\right\} - \frac{2g}{c}(1-c^2)\frac{\partial G_4(x)}{\partial x}\right]_{x=\frac{g}{c}}$$

Използваме ур-е на c^n при $a=0$: $\frac{\lambda^2}{c} = \frac{3c^2}{g}\left[G_4(0) - G_4\left(\frac{g}{c}\right)\right] + c\,\frac{\partial G_4(x)}{\partial x}\Big|_{x=\frac{g}{c}}$

$$\frac{\partial^2 W_m^f}{\partial a^2} = 2(c^2-1)c\left[\frac{\lambda^2}{c} - c\frac{\partial G_4(x)}{\partial x}\right] + \frac{4c^5}{g}\frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\left\{G(0,\delta) - G\left(\frac{g}{c},\delta\right)\right\} -$$

$$-2c^2(1-c^2)\frac{\partial G_4(x)}{\partial x} = 2(c^2-1)\lambda^2 + \frac{4c^5}{g}\frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\left[G(0,\delta) - G\left(\frac{g}{c},\delta\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2 W_m^{fast}}{\partial a^2} = \frac{2c}{g}\left[-(1-c^2)\frac{g}{c}\lambda^2 + 2c^4\frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\left\{G(0,\delta) - G\left(\frac{g}{c},\delta\right)\right\}_{\delta=0}\right].$$

– в точности съвпада с Eq. (6) от заглавния теоремата, $a \to 0$.

$$G(x,\delta) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\frac{d^2\vec{\rho}_1\,d^2\vec{\rho}_2}{\sqrt{x^2+(\vec{\rho}_1-\vec{\rho}_2)^2}}\,\beta(\vec{\rho}_1,\delta)\,\beta(\vec{\rho}_2,\delta)\,,\ \text{където}$$

$$\beta(\vec{\rho},\delta) = m_z = \cos\delta\,\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\sin\delta\cos\varphi}$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(z-z')^2+(\vec{\rho}-\vec{\rho}')^2}} = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty dk\,e^{-k|z-z'|}J_\mu(k\rho)J_\mu(k\rho')\,e^{i\mu(\varphi-\varphi')} =$$

$$= \int_0^\infty dk\,e^{-k|z-z'|}\left[J_0(k\rho)\,J_0(k\rho') + 2\sum_{\mu=1}^{\infty}J_\mu(k\rho)J_\mu(k\rho')\cos\mu(\varphi-\varphi')\right]$$

$$\frac{\partial^2 G(x,\delta)}{\partial\delta^2} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\frac{d^2\vec{\rho}_1\,d^2\vec{\rho}_2}{\sqrt{x^2+(\vec{\rho}_1-\vec{\rho}_2)^2}}\,\frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\underbrace{\left\{\frac{\cos^2\delta\,(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)}{\left[1+\rho_1^2-2\rho_1\sin\delta\cos\varphi_1\right]\left[1+\rho_2^2-2\rho_2\sin\delta\cos\varphi_2\right]}\right\}}_{\beta(\vec{\rho}_1,\delta)\,\beta(\vec{\rho}_2,\delta)}$$

ρ_1, ρ_2 в единици R.

$$\frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\left[\cos^2\delta\cdot f(\sin\delta)\right] = \cos^2\delta\,\frac{\partial^2 f(\sin\delta)}{\partial\delta^2} + 2\cdot 2\underbrace{\cos\delta(-1)\sin\delta}_{=0\ \text{при}\ \delta=0}\frac{\partial f}{\partial\delta} + f(\sin\delta)\cdot(-2\cos 2\delta)$$

Escaneado con CamScanner

Date. 06.02.

6/II $J^{\mu}_{\rho_1\rho_2} = \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \cos\mu(\varphi_1-\varphi_2) \frac{1}{1+\rho_1^2-2\rho_1\sin\delta\cos\varphi_1} \frac{1}{1+\rho_2^2-2\rho_2\sin\delta\cos\varphi_2} =$

$= \frac{1}{(1+\rho_1^2)(1+\rho_2^2)} \int d\varphi_1 \int d\varphi_2 \left[\cos\mu\varphi_1\cos\mu\varphi_2 + \sin\mu\varphi_1\sin\mu\varphi_2\right] \frac{1}{1+a_1\cos\varphi_1} \frac{1}{1+a_2\cos\varphi_2}$

$= \left| \begin{array}{l} a_1 = -\frac{2\rho_1\sin\delta}{1+\rho_1^2} \\ a_2 = -\frac{2\rho_2\sin\delta}{1+\rho_2^2} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \frac{\sin\mu\varphi}{1+a\cos\varphi} = 0 \\ [0,2\pi] \to [-\pi,\pi] \end{array} \right| = \frac{1}{(1+\rho_1^2)(1+\rho_2^2)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi_1\cos\mu\varphi_1}{1+a_1\cos\varphi_1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi_2\cos\mu\varphi_2}{1+a_2\cos\varphi_2} =$

$= \frac{1\cdot 4}{(1)(2)} \int_0^{\pi} d\varphi_1(\cdot) \int_0^{\pi} d\varphi_2(\cdot) = \frac{4}{(1)(2)}\pi^2 \frac{1}{\sqrt{1-a_1^2}} \left(\frac{\sqrt{1-a_1^2}-1}{a_1}\right)^{\mu} \frac{1}{\sqrt{1-a_2^2}} \left(\frac{\sqrt{1-a_2^2}-1}{a_2}\right)^{\mu}$

Нам нужно $\frac{\partial^2}{\partial\delta^2} J^{\mu}_{\rho_1\rho_2}$ при $\delta\to 0$, т.е. $J_{\rho_1\rho_2}(\delta)$ достаточно разложить до членов $\sim\delta^2$. $a_1, a_2 \sim \delta$.

$\frac{1}{\sqrt{1-a_1^2}} \left(\frac{\sqrt{1-a_1^2}-1}{a_1}\right)^{\mu} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}a_1^2} \left(\frac{1-\frac{1}{2}a_1^2-1}{a_1}\right)^{\mu} = \left(1+\frac{1}{2}a_1^2\right)\frac{1}{2^{\mu}}(-a_1)^{\mu} = \left(1+\frac{1}{2}a_1^2\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{\mu} a_1^{\mu}$

$J^{\mu}_{\rho_1\rho_2}(\delta) = \frac{4\pi^2}{(\rho_1^2+1)(\rho_2^2+1)} \left(1+\frac{1}{2}a_1^2\right)\left(1+\frac{1}{2}a_2^2\right)\left(-\frac{a_1}{2}\right)^{\mu}\left(-\frac{a_2}{2}\right)^{\mu} =$

$= \frac{4\pi^2}{(1+\rho_1^2)(1+\rho_2^2)} \left(1+\frac{1}{2}a_1^2+\frac{1}{2}a_2^2\right) \frac{1}{4^{\mu}} a_1^{\mu} a_2^{\mu}, \qquad \Theta_{\mu} = \begin{cases} 1, \mu=0 \\ 2, \mu>0 \end{cases}$

$\left.\frac{\partial^2 G(x,\delta)}{\partial\delta^2}\right|_{\delta\to 0} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\cos^2\delta \int_0^{\infty} dk\, e^{-k|x|} \int d\rho_1\rho_1 \int d\rho_2\rho_2 \int d\varphi_1 \int d\varphi_2 \times$

$\times (1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2) \sum_{\mu=0} \Theta_{\mu} J_{\mu}(k\rho_1) J_{\mu}(k\rho_2) \cos\mu(\varphi_1-\varphi_2) \frac{1}{1+\rho_1^2-2\rho_1\sin\delta\cos\varphi_1} \frac{1}{1+\rho_2^2-2\rho_2\sin\delta\cos\varphi_2} =$

$= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\cos^2\delta \int_0^{\infty} dk\, e^{-k|x|} \sum_{\mu=0} \Theta_{\mu} \left[J_{\mu}(k\rho_1) J_{\mu}(k\rho_2) d\rho_1\rho_1 d\rho_2\rho_2 (1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2) J^{\mu}_{\rho_1\rho_2}(\delta)\right] =$

$= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\cos^2\delta \int dk e^{-k|x|} \sum_{\mu=0} \Theta_{\mu} \int d\rho_1\rho_1 \int d\rho_2\rho_2 J_{\mu}(k\rho_1) J_{\mu}(k\rho_2) (4\pi^2) \left(\frac{1-\rho_1^2}{1+\rho_1^2}\right)\left(\frac{1-\rho_2^2}{1+\rho_2^2}\right) \times$

$\times \frac{1}{4^{\mu}} \left(1+\frac{a_1^2}{2}+\frac{a_2^2}{2}\right) a_1^{\mu} a_2^{\mu} = \frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\cos^2\delta \int dk e^{-k|x|} \sum_{\mu} \Theta_{\mu} \int d\rho_1\rho_1 \int d\rho_2\rho_2 \times$

$\times \frac{(1-\rho_1^2)}{(1+\rho_1^2)} \frac{(1-\rho_2^2)}{(1+\rho_2^2)} \frac{1}{4^{\mu}} J_{\mu}(k\rho_1) J_{\mu}(k\rho_2) \left(1+\frac{1}{2}a_1^2+\frac{1}{2}a_2^2\right) a_1^{\mu} a_2^{\mu} =$

$= \frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\cos^2\delta \int dk e^{-k|x|} \sum_{\mu=0} \Theta_{\mu} \int d\rho_1 f_{\mu}(k,\rho_1) \int d\rho_2 f_{\mu}(k,\rho_2) \frac{1}{4^{\mu}} \left(1+\frac{1}{2}a_1^2+\frac{1}{2}a_2^2\right) a_1^{\mu} a_2^{\mu}$

Рассм. $P_{\mu}(\delta,\rho_1,\rho_2) = \frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\left[\cos^2\delta \frac{1}{4^{\mu}} \left(1+\frac{a_1^2}{2}+\frac{a_2^2}{2}\right) a_1^{\mu} a_2^{\mu}\right]$

Escaneado con CamScanner

Date. . . $\xi = 0$

Для вероятности $P_\mu(0, \rho_1, \rho_2)$, т.е. достаточно в $[\dots]$ оставить $\sim \delta^2$ δ^0, δ^1 не дадут вклада в $\frac{\partial^2}{\partial \delta^2}$, а $\delta^{n(n>2)}$ дают вклад $\to 0$ $\delta \to 0$.

$A_j = -\frac{2\rho_j}{1+\rho_j^2}\sin\delta = -\frac{2\rho_j}{1+\rho_j^2}\delta$, т.к. δ^3 имеет нулевую вероятность.

$$P_0(\delta) = \frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right)\left[1+\frac{1}{2}\frac{4\rho_1^2}{(1+\rho_1^2)^2}\delta^2+\frac{1}{2}\frac{4\rho_2^2}{(1+\rho_2^2)^2}\delta^2\right] =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{4\rho_1^2}{(1+\rho_1^2)^2}+\frac{1}{2}\frac{4\rho_2^2}{(1+\rho_2^2)^2}\right]\delta^2 = 2\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{4\rho_1^2}{(1+\rho_1^2)^2}+\frac{1}{2}\frac{4\rho_2^2}{(1+\rho_2^2)^2}\right]$$

$$P_1(\delta) = \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\left[\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right)\frac{2\rho_1}{1+\rho_1^2}\frac{2\rho_2}{1+\rho_2^2}\delta^2\right] = 2\frac{\rho_1\rho_2}{(1+\rho_1^2)(1+\rho_2^2)}$$

$$P_2(\delta) = \frac{1}{16}\frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\left[\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right)\underbrace{a_1^2 a_2^2}_{\sim\delta^4}\right] = 0 \quad \text{с точн. до } \delta^2.$$

$$f_\mu(k,\rho) = \int d\rho\,\rho\left(\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\right)J_\mu(k\rho)$$

$$\left.\frac{\partial^2 G(x,\delta)}{\partial\delta^2}\right|_{\delta\to 0} = \int dk\, e^{-k|x|}\sum_{\mu=0}\Theta_\mu\int d\rho_1 f_\mu(k,\rho_1)\int d\rho_2 f_\mu(k,\rho_2)P_\mu(\delta,\rho_1,\rho_2)$$

Дадут вклад только $\mu=0$ и $\mu=1$ в $\left.\frac{\partial^2 G}{\partial\delta^2}\right|_{\delta\to 0}$.

$$\left.\frac{\partial^2 G(x,\delta)}{\partial\delta^2}\right|_{\delta\to 0} = \int dk\, e^{-k|x|}\left[\int d\rho_1 f_0(k,\rho_1)\int d\rho_2 f_0(k,\rho_2)P_0(\delta,\rho_1,\rho_2) + \right.$$

$$\left. + 2\int d\rho_1 f_1\int d\rho_2 f_2 P_1(\delta,\rho_1,\rho_2)\right] = \int dk\, e^{-k|x|}\left[\int d\rho_1\,\rho_1\left(\frac{1-\rho_1^2}{1+\rho_1^2}\right)J_0(k\rho_1)\times\right.$$

$$\times\int d\rho_2\,\rho_2\left(\frac{1-\rho_2^2}{1+\rho_2}\right)J_0(k\rho_2)\cdot 2\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{4\rho_1^2}{(1+\rho_1^2)^2}+\frac{1}{2}\frac{4\rho_2^2}{(1+\rho_2^2)^2}\right] +$$

$$\left. + 2\int d\rho_1\,\rho_1\left(\frac{1-\rho_1^2}{1+\rho_1^2}\right)J_1(k\rho_1)\int d\rho_2\rho_2\left(\frac{1-\rho_2^2}{1+\rho_2^2}\right)J_1(k\rho_2)\cdot 2\frac{\rho_1\rho_2}{(1+\rho_1^2)(1+\rho_2^2)}\right]$$

Зам. $\rho = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, $\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}} = \cos\gamma$, $\frac{2\rho}{1+\rho^2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}} = \sin\gamma$

$$\left.\frac{\partial^2 G(x,\delta)}{\partial\delta^2}\right|_{\delta\to 0} = \int_0^\infty dk\, e^{-k|x|}\left[2\int d\rho_1\rho_1\cos\gamma_1 J_0(k\rho_1)\int d\rho_2\rho_2\cos\gamma_2 J_0(k\rho_2)\times\right.$$

$$\left.\times\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin^2\gamma_1+\frac{1}{2}\sin^2\gamma_2\right] + 2\int d\rho_1\rho_1\cos\gamma_1 J_1(k\rho_1)\int d\rho_2\rho_2\cos\gamma_2 J_1(k\rho_2)\frac{1}{2}\sin\gamma_1\sin\gamma_2\right] =$$

$$= \int dk\, e^{-k|x|}\left[\left[\int_0^\pi d\rho\,\rho\sin\gamma\cos\gamma J_1(k\rho)\right]^2 + \int d\rho_1\rho_1\cos\gamma_1 J_0(k\rho_1)\int d\rho_2\rho_2\cos\gamma_2 J_0(k\rho_2)\times\right.$$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$$\times\left[-1+\frac{1-\cos 2\gamma_1}{2}+\frac{1-\cos 2\gamma_2}{2}\right]\Big] = \Big| I_3(k)=\int_0^1 d\rho\,\rho\sin\gamma\cos\gamma\, J_1(k\rho)\Big| =$$

$$= \int dk\, e^{-k|x|}\left[I_3(k)^2 + \frac{1}{2}\int d\rho_1\rho_1\cos\gamma_1 J_0(k\rho_1)\int d\rho_2\rho_2\cos\gamma_2 J_0(k\rho_2)\left[-\cos 2\gamma_1-\cos 2\gamma_2\right]\right]$$

$$\int d\rho_1\rho_1\cos\gamma_1 J_0(1)\cos 2\gamma_1 \int d\rho_2\rho_2\cos\gamma_2 J_0(2) + \int d\rho_1\rho_1\cos\gamma_1 J_0(1)\int d\rho_2\rho_2\cos\gamma_2\cos 2\gamma_2 J_0(2)$$

$$= \Big|\text{сложение одинаковых}\Big| = 2\left[\int d\rho\,\rho\cos\gamma\cos 2\gamma\, J_0(k\rho)\right]\cdot\left[\int d\rho\,\rho\cos\gamma\, J_0(k\rho)\right] = 2 I_1(k) I_2(k)$$

$$\Rightarrow I_1(k)=\int_0^1 d\rho\,\rho\cos\gamma\cos 2\gamma\, J_0(k\rho)\,,\quad \Rightarrow I_2(k)=\int_0^1 d\rho\,\rho\cos\gamma\, J_0(k\rho)\,,\quad \gamma(\rho)=2\operatorname{arctg}\rho$$

$$Q(x)=\frac{\partial^2 G(x,\delta)}{\partial\delta^2}\Big|_{\delta\to 0} = \int_0^\infty dk\, e^{-k|x|}\left[I_3(k)^2 - I_1(k) I_2(k)\right] \quad \text{— т.е.}$$

Eq. (8) у Мелкова и у меня совпали (!). $I_\mu(k)$ – как выше.

В Eq. (6) у Гасперини $\frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\left[G(0,\delta)-G\left(\frac{g}{c},\delta\right)\right] = Q(0)-Q(x)$ $\quad (x=g/c)$

Типичное $x=\frac{g}{c}=\frac{0{,}1\div 0{,}2}{0{,}05}=0{,}2\cdot 10^2\cdot 0{,}1\simeq 2$, так что $x\gg 1$ не очень хорошо. Чем больше $g=1/R$ может быть и меньше, „g" от $\frac{1}{5}$ до $\frac{1}{30}$ у Гасп.

$$Q(x)=\int_0^\infty dk\, e^{-kx} F(k)\,,\quad x\geq 0$$

найдём при $x\gg 1$. $h(x)=-x$, $h'(x)=-1$, $\Rightarrow x=0$.



$$Q(x)\underset{x\to\infty}{=}\frac{1}{x}F(0)+Q\left(\frac{1}{x^2}\right),\quad F(0)=I_3(0)^2-I_1(0)I_2(0)=-I_1(0)I_2(0)$$

$$I_1(0)=\int_0^1 d\rho\,\rho\left(\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\right)\left[2\left(\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\right)^2-1\right],\quad I_2(0)=\int_0^1 d\rho\,\rho\left(\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\right)$$

$$Q(0)-Q(x)=\int_0^\infty dk\,(1-e^{-kx})F(k)<0$$ у Мелкова, что возможно при $F(k)<0$.

Проверим $Q(x)\underset{x\to\infty}{=}\frac{1}{x}(-1)I_1(0)I_2(0)$, что $I_1(0)<0$ (!?), и $Q(x)\underset{x\to\infty}{\geq}0$

что расходится с Мелковым.

Ньютон $\frac{\partial^2 W_m^{free}}{\partial\alpha^2}=\frac{2c}{g}\left[-(1-c^2)\frac{g}{c}\lambda^2+2c^4\left\{Q(0)-Q\left(\frac{g}{c}\right)\right\}\right]$, $\delta=2\operatorname{arctg}(ac)$.

скобка >0

См. 18/II.

Date. 08 • 02 •

SW Rectang. dot – Joseph – Schlom. part

• Вернемся к более точному расчету $H_d^y(y)$ для rectang. dot. Ведь $\int dk_x dk_y$ очень много сводится к $\int dz dz'$ ...

Два пути: 1) использовать ф. Joseph – Schlomann непосредственно
2) посчитать $H_d^y(y)$ в координ. представлении

Согласно 31/I: $H_d^y(x,y) = \frac{M_s}{L} \frac{\partial}{\partial y} \int dx' \int dz dz' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \Big|_{y'=-l/2}^{y'=l/2}$ –

– ф-ии $\int$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ – сильно сложно.

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int_0^\infty dk e^{-k|z-z'|} J_0(k|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|)$$ подставим $\int_0^L dz dz'$

$$H_d^y(x,y) = \frac{M_s}{L} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-w/2}^{w/2} dx' \int dz dz' \int_0^\infty dk e^{-k|z-z'|} J_0(k|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|) \Big|_{-l/2}^{l/2} =$$

$$= \left| \int_0^L dz dz' e^{-k|z-z'|} = \frac{2L}{k} f(kL) \right| = 2M_s \frac{\partial}{\partial y} \int dx' \int_0^\infty dk \frac{f(kL)}{k} J_0(k|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|) \Big|_{y'=-l/2}^{y'=l/2},$$

где $|\vec{\rho}-\vec{\rho}'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$.

Пока перейдем $H_d(y)$ с большим представлением $\vec{k}$

y/ℓ	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25	0,3	035	0,4	0,45	0,5
$H_d^y(0,y)$	-0,075	-0,075		-0,097							
$\langle H_d^y \rangle_x$											

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x), \quad \frac{\partial}{\partial y}|\vec{\rho}-\vec{\rho}'| = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} = \frac{2(y-y')}{2\sqrt{(x-x')^2+\dots}} = \frac{(y-y')}{|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|}$$

$$H_d^y(x,y) = 2M_s \int_{-w/2}^{w/2} dx' \int_0^\infty dk \frac{f(kL)}{k} (-1) J_1(k|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|) k \frac{(y-y')}{|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|} =$$

$$= (-2)M_s \int_{-w/2}^{w/2} dx' \int_0^\infty dk f(kL) J_1(k|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|) \frac{(y-y')}{|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|} \Big|_{y'=-l/2}^{l/2} -$$

Будет ли отличаться лучше, чем $\int d^2\vec{k}(\dots)$?

→ Альтернатива: использ. ф. Joseph–Schlomann '65 (16), где для $N_{yy}(\vec{r})$ надо вместо $f(\vec{r})$ использовать $g(\vec{r}) = \frac{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}\,(b-y)}{(a-x)(c-z)}$,

a, b, c – полудлины призмы вдоль осей Ox, Oy, Oz.

$a = \frac{w}{2}$, $b = \frac{l}{2}$, $c = \frac{L}{2}$. $\rho = \frac{L}{w}$, $u = \frac{l}{w}$, w – ширина дорожки, $\parallel Ox$,

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$N_{yy}(\vec{r})$: считаем $\langle N_{yy}(\vec{r})\rangle_z = \frac{1}{L}\int_0^L dz\, N_{yy}(\vec{r})$ и

ищем тоже $x=0$ или $\int_{-w/2}^{w/2} dx\,(\dots)$.

$$g(\vec{r}) = \frac{\left(\frac{y}{2}-y\right)}{\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{p}{2}-z\right)\sqrt{\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+\left(\frac{y}{2}-y\right)^2+\left(\frac{p}{2}-z\right)^2}}, \quad (x,y,z)\to\frac{x}{w},\frac{y}{w},\frac{z}{w}$$

Вообще $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}\ \forall x$.

Напомним $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, $x>0$.

$N_y(x=0,y)$ – строим, $\frac{y}{w}$ ищем от 0 до $\frac{L}{w}=u$.

По ф-ле J.-Schl. '65, $p=0{,}035$, $u=1{,}75$

y/e	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25	0,3	0,35	0,39	0,4	0,41	0,48	0,48
$\frac{1}{M_S} H_d^y(0,y)$	-0,079	-0,081	-0,087	-0,097	-0,113	-0,139	-0,180	-0,250	-0,351	-0,388	-0,780	-1,762	
$H_i^y(y)$, $\alpha=0$, в $H=600$ э	536	534	530	521	508	487	454	397	315	285	-33	-831	
$\frac{1}{M_S}\langle H_d^y\rangle_x$	-0,073	-0,074	-0,079	-0,087	-0,101	-0,123	-0,158	-0,219	-0,317	-0,389	-0,726	1,702	
$\langle H_i\rangle_x$, в $H=600$ э	541	540	536	529	518	501	452	422	319	284	11	-782	

y_{max} локальный минимум

Значения $H_d^y(0,y)$ и $\langle H_d^y(x,y)\rangle_x$ незначительно отличаются от расчета 31/I. На MCAD считает очень быстро.

"Rigid" vortex model (упрощение Ю.Ф.)

9/II Визит в Top-Travel и Japan. Embassy. Редактир. ст. с Новосадом-АР

10/II Упрощение интегралов из статьи с Новосадом.

$$\rightarrow J(s) = \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2\varphi\sqrt{1-s^2\sin^2\varphi} = \left|\begin{matrix}\text{Гр.-Р. с.192}\\ m=0,n=2,z=1\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}\Delta=\sqrt{1-s^2\sin^2\varphi}\\ s^2=k^2,\ k^2=1-s^2\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{s^2}\left\{\sin\varphi\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\Delta^3 + \left[2s^2\right]\int d\varphi\,\Delta - 1\cdot(1-s^2)\int d\varphi\frac{1}{\cos^2\varphi}\Delta\right\}\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi\,\Delta - \frac{1}{3s^2}(1-s^2)\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{1-s^2\sin^2\varphi} \quad \text{и т.д.}$$

Р.6, с.194 дает ответ прямо.

$$J(s) = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi\cos^2\varphi\sqrt{1-s^2\sin^2\varphi} = 4\left[\frac{\Delta}{3}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{3}\frac{1-s^2}{s^2}F\left(\varphi,\frac{k}{s}\right) + \frac{s^2+1}{3s^2}E(\varphi,s)\right]$$

$$= -\frac{4}{3}\cdot\frac{1-s^2}{s^2}K(s) + \frac{4}{3}\frac{1+s^2}{s^2}E(s), \quad \text{где } K(s), E(s) - \text{полные эллипт. инт.}$$

Plan Memo

Rigid Vortex

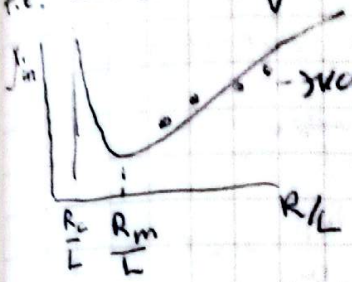
$$J(s) = \frac{4}{3}\frac{1}{s^2}\left[E(s) - K(s)\right] + \frac{4}{3}\left[E(s) + K(s)\right], \quad D(s) = \frac{1}{s^2}\left[K(s) - E(s)\right]$$

Note. При $s \to 0$ $J(s) = \frac{4}{3}\frac{(-s^2)}{s^2}\left[\frac{\pi}{4} + \pi\frac{2}{3}\frac{9}{64}s^2 + \dots\right] + \frac{4\pi}{32}\left[1 + \frac{1}{4}s^2 + \dots + 1 - \frac{1}{4}s^2 + \dots\right] =$

$$= -\frac{4}{3}\pi\left[\frac{1}{4} + \frac{3}{32}s^2\right] + \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2 = \pi\left[1 - \frac{1}{8}s^2\right] + O(s^4)$$

$$N_H(s) = -h\frac{s}{\pi}J(s) = -hs\left[1 - \frac{1}{8}s^2 + O(s^4)\right],$$ от $K(s)$ и $E(s)$ здесь нет только.

Выполняется в рамках „rigid" vortex model χ_{in} Нап $= M_s$, т.е. можно строить от $\frac{R}{L}$ либо Нап (как с металлом), либо χ_{in}.



линейная $\chi_{in} \sim \frac{R}{L}$, лишь для $R \gg R_0$.

$\frac{1}{M_s}$ Нап $(\beta, R) = 4\pi F_1(\beta) - \beta^2\left(\frac{R_0}{L}\right)^2$ - можно просто определить R_m при $L = const$ из $4\pi\frac{\partial F_1(\beta)}{\partial\beta} = 2\beta\left(\frac{R_0}{L}\right)^2$.

Продолжение табл. от 17/XI 00 г. с $L = 60$ нм, $\xi_0 = b/L = 0{,}325$

$\beta = \frac{R}{L}$	1,05	0,83	0,63	0,56 Дальше ⊥ фаза	0,46	0,40	0,35	0,30	0,28	0,25	0,22	0,20	0,18	0,16	0,14	0,127
Нап	3,14	3,45	3,76	3,87	4,01	4,05	4,04	3,95	3,87	3,69	3,39	3,08	2,63	1,98	1,55	1,00	0,31	0,07

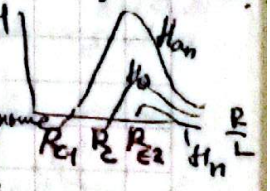
R_{c1}

Согласно Ahrzoni $\beta_{cr} = \left(\frac{L}{R}\right)_{cr} = 1{,}81$ для перехода $\parallel \to \perp$ в изотр. цил. фазе.

$\frac{R_{c2}}{\perp} = 0{,}552$. т.е. $\left(\frac{R}{L}\right) \geq 0{,}552$ имеет физ. смысл.

С другой стороны $R > b$ должно выполняться, т.е. $\left(\frac{R}{L}\right) > \frac{b}{L} = 0{,}325$ для $L = 60$ нм.

Далее для $L = 20$ нм $\beta_{c_1} = \frac{L}{R_{c1}} = 2{,}37$ уже в ⊥-обл. H ($R_{c1}/L = 0{,}422$) хотя $\frac{b}{L} = 0{,}734$ и $R = b$ – наружная граница



В расчете с металлом $L = 15$ нм и $\frac{R}{L} = \frac{b}{L}$ выч. раньше (?) при $\frac{R}{L} = 0{,}552$.

Надо следить, чтобы было $\left(\frac{R}{L}\right) > 0{,}552$ и $\left(\frac{R}{L}\right) > \frac{b}{L}$.

Escaneado con CamScanner

Plan Memo

SW - rectan. dat

10/II Date. Вернемся к SW - rectan. dat от 2/II.

Там я рассматривал низшую моду с $k_x = \frac{m\pi}{w} = 0$ - ее локализацию по $Oy \parallel \vec{M}_0$. Рассм. следующие моды:

$$\left(\frac{\omega_{mn}}{\omega_M}\right)^2 = \left[\frac{\omega_H}{\omega_M} + d' x_{mn}^2 + f H_{mn} + f(x_{mn} L)\frac{q_m^2}{x_{mn}^2}\right]\left[\frac{\omega_H}{\omega_M} + d' x_{mn}^2 + f H_{mn} + 1 - f(x_{mn} L)\right]$$

- как следует из общей теории (PRB - Gus'kov) SW спектра для rectangular dot (при $\frac{L}{w}, \frac{L}{l} \ll 1$) $k_x \to q_m = \frac{m\pi}{w}$, $x_{mn} = \left(\frac{m\pi}{w}, \frac{n\pi}{l}\right)$.

(!) $\omega_H + \omega_M H_{mn}$ заменим на $\omega_{Hi} = \gamma H_i$, $H_i = H + H_d^y(x,y)$, а k_y ($k_y \to \frac{n\pi}{l} = q_n$) оставим непрерывным (индекс "n" - не нужен).

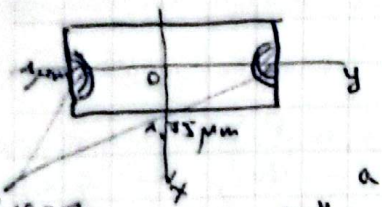
$$\frac{\omega_m^2(k_y)}{\omega_M^2} = \left[\frac{\omega_{Hi}}{\omega_M} + d' x_m^2 + f(x_m L)\frac{(k_x^m)^2}{x_m^2}\right]\left[\frac{\omega_{Hi}}{\omega_M} + d' x_m^2 + 1 - f(x_m L)\right],$$

где $x_m^2 = \left(\frac{m\pi}{w}\right)^2 + k_y^2 = (k_x^m)^2 + k_y^2$. Эта ф-ла совпадает с ф. Камин.-Сл. после $k_x^m \to k_x$, $x_m^2 \to k^2$ и есть результат предела общего подхода для $\frac{L}{w} \ll 1$, $\frac{L}{l} \ll 1$ с заменой $\omega_H + \omega_M H_{mn} \to \omega = \gamma\left[H + H_d^y(x,y)\right]$.

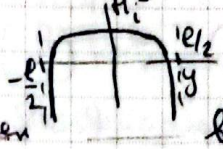
$m=0$ соответ. $\omega_0^{эксп} = 5{,}2\ GHz = 0{,}173 \cdot \omega_M$, $\omega_M = 30{,}1\ GHz$ для NiFe.

→ Рассм. вторую моду с $m=1$.

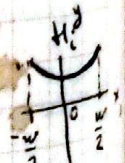
Ей соответ. эксп. частота $\omega_1^{эксп} = 0{,}249 \cdot \omega_M$.



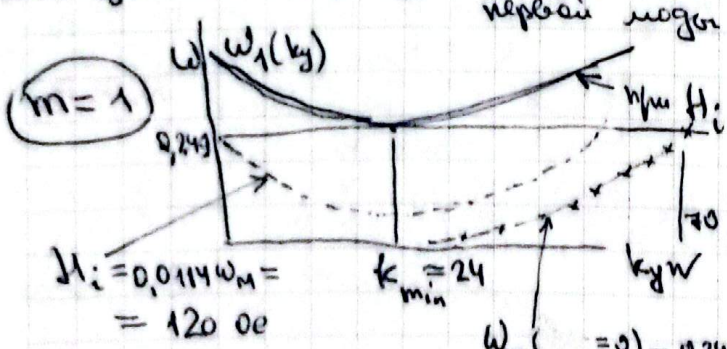
$H_i^y(x,y)$ как функ. y



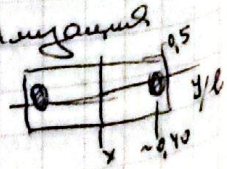
, как функ. x



→ т.е. H_i^y - min расположен вблизи $y = \pm l/2$ краев dot, а по x - вблизи $x = 0$.



при $H_i = 0{,}0625 \frac{\omega}{\gamma} M = 630$ Oe, но такого большого H_i в доке нет, даже при $y=0$, $x=0{,}5$ $H_i = 551$ Oe, т.е. все точки в доке попадают в резонанс. условия.



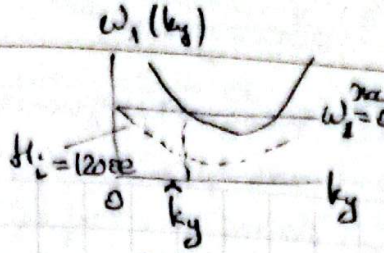
$$\int dy\, k_y \approx \langle k_y \rangle \cdot \delta = \langle k_y w \rangle \frac{\delta}{l}\left(\frac{l}{w}\right) = \langle x_y \rangle \frac{\delta}{l} \cdot u$$

область локализации моды

Plan Memo

Date.

Для $m=1$



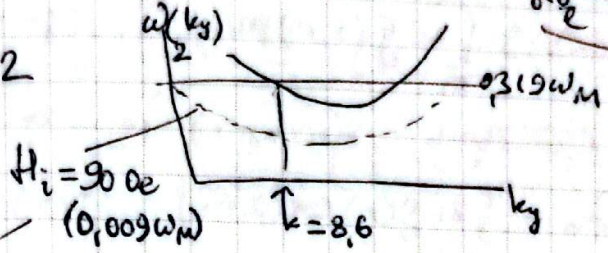
с $H_i^{max}=550$ Oe $(0{,}05\omega_M)$ max значение k_y при котором $\omega_1(k_y)=\omega_1^{эксп}$. будет $\hat{k}_y=\hat{k}=11{,}1$

Если считать, что возбуждаются лишь длинноволновые SW с $k<\hat{k}$ то их условие возб. написанное выполнялось при $\omega_1(k_y=0, H_i)<\omega_1^{эксп}$, т.е. при $H_i=120$ Oe. Тогда H_i соотв. $y_e=0{,}44$

$$\int dy\, k_y \approx \frac{11+0}{2}\cdot 0{,}44\cdot 2\cdot 4 = 11\cdot 0{,}44\cdot 1{,}75 = 8{,}6\ (!) \approx 3\pi.$$

↑ две области пол-ти $0<\frac{y}{e}<0{,}44$ и $0{,}44<\frac{y}{e}<0$.

① Для $m=2$



$$\int dy\, k_y = \frac{1}{2}(8{,}6+0)\,0{,}44\cdot 2\cdot 1{,}75 = 6{,}62\ (!) \approx 2\pi$$

$\int dy\, k_y(\omega, H_i(y)) \approx n\pi$ при разных m: Надо найти $k_y=f(\omega_{Hi})$, а $\omega_{Hi}(y)$.

$$\omega_m^2=\omega^2=\left[\omega_{Hi}+\alpha' x_m^2+f(x_m L)\frac{q_m^2}{x_m^2}\right]\left[\omega_{Hi}+\alpha' x_m^2+1-f(x_m L)\right],$$

где $\omega_M=1$, $x_m^2=q_m^2+k_y^2$.

Для пленочки пока рассм. $m=0$ (см. 2/II).

$$\omega_0^2=\left[\omega_{Hi}+\alpha' k_y^2\right]\left[\omega_{Hi}+\alpha' k_y^2+1-f(k_y L)\right]\to F(k_y, y)=0$$

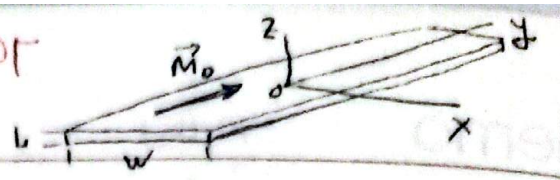
$$\int dy\, k_y[\omega, H_i(y)] = \int dH_i \frac{1}{(dH_i/dy)} k_y[\omega, H_i] = \int_{H_i^{min}}^{H_i^{max}} dH_i \frac{dy}{dH_i} k_y[\omega, H_i]$$

$\frac{dH_i}{dy}$ вычислить несложно, но как представить ее в виде $f(H_i)$-?

Escaneado con CamScanner

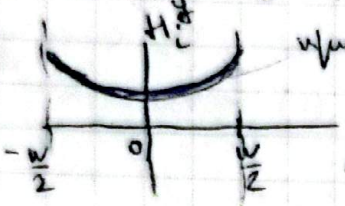
Rectan.dot – Eug. PT

Plan Memo



Date. 14.02. Расси. неоднородность SW-решений вдоль ширины дота – x, т.е. вернемся к прежней нумерации. СФ. Начнем с предела Wires.

Для wires расси. неоднородность $h_d(x)$ - mW магнитостат. поле (здесь $H_d^y = 0$), тогда как для rectan.dot еще и $H_d^y(x)$ может быть важна.



при $y=0$ - кривизна слабая, но $H_d^y(x, \pm\frac{l}{2})$ заметно зависит от x.

Для wires уравнение на собств. намагниченность (СФ)

$$\lambda m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g(x,x') m(x'), \quad \text{где } m = m_z,\ g = g_{zz},\ x \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}],\ x \leftarrow \tfrac{x}{w}.$$

→ Согласно 22/VII 002. СФ есть $\sin(n\pi x)$ (если $\frac{\partial m}{\partial n} = 0$) и спектр задается $\lambda_n = \int_{-1}^{1} dx\, g(x) \cos(\pi n x)$, $g(x) = \frac{2}{p} \ln\left(\frac{x^2}{x^2+p^2}\right)$.

$g(x-x') = g(x,x')$. Эти $\lambda_n \to \omega(\lambda_n)$ очень хорошо описывают эксперимент Дем. на wires с $p = 0{,}011$.

15/II Для rectan.dot: $h_d^\alpha(\vec{\rho}) = \int d^2\vec{\rho}'\, g_{\alpha\beta}(\vec{\rho},\vec{\rho}')\, m_\beta(\vec{\rho}')$, $\alpha,\beta = x,y,z$

Какие компоненты $\neq 0$ из $g_{\alpha\beta}(\vec{\rho},\vec{\rho}')$? $\hat{g}(\vec{\rho}\vec{\rho}') = \frac{1}{L}\int dz dz' G(\vec{r},\vec{r}')$.

Согласно 22/VII 99г. $g_{\alpha\beta} = 0$ если либо α либо $\beta = z$.

$$\begin{cases} g_{zz}(\vec{\rho}\vec{\rho}') = -\frac{1}{\pi}\int d^2\vec{k}\,\left[1 - f(kL)\right] e^{i\vec{k}(\vec{\rho}-\vec{\rho}')} \\ g_{\alpha\beta}(\vec{\rho},\vec{\rho}') = -\frac{1}{\pi}\int d^2\vec{k}\,\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} f(kL)\, e^{+i\vec{k}(\vec{\rho}-\vec{\rho}')} \end{cases}, \quad \vec{\rho} = (x,y),\ \alpha,\beta = x,y.$$

$$g_{zz}(\vec{\rho},\vec{\rho}') = g_{zz}(\vec{\rho}-\vec{\rho}') = g_{zz}(x-x', y-y') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk_y\, g_{zz}(k_y, x-x') \cos k_y(y-y'),$$

где $g_{zz}(k_y, x-x') = \frac{4}{L}\left[K_0\left(k_y\sqrt{(x-x')^2+L^2}\right) - K_0\left(k_y|x-x'|\right)\right]$ – Eq.(10) PRB.

(Если здесь положить $k_y = 0$, то эквивалентно $\frac{1}{l}\int dy dy' (\dots)$ с $l \to \infty, \infty$ получим ФГ wires: $g_{zz}(x-x') = \frac{2}{L}\ln\frac{(x-x')^2}{(x-x')^2+L^2}$.)

Или можно в координат. представлении

→ $g_{zz}(\vec{\rho},\vec{\rho}') = \frac{2}{L}\left[\frac{1}{\sqrt{L^2+(\vec{\rho}-\vec{\rho}')^2}} - \frac{1}{|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|}\right]$, $\vec{\rho} = (x,y)$.

Надо еще найти $g_{xx}(\vec{\rho},\vec{\rho}')$ и $g_{yx}(\vec{\rho}\vec{\rho}')$, тогда $g_{xy} = g_{yx}$, а g_{yy} опр. из $\mathrm{Sp}\hat{g} = -\chi_{\text{маг}}$

Escaneado con CamScanner

Plan Memo

$h_d^y(\vec{\rho}) = \int d^2\vec{\rho}'\, g_{yx}(\vec{\rho},\vec{\rho}')\, m_x(\vec{\rho}')$

Из расчета 15/I 00 г. нужна лишь $g_{xx}(x,x') = \frac{1}{L}\int_0^L dy\,dy'\, g_{xx}(\vec{\rho},\vec{\rho}')$,
хотя, это, может иметь смысл для намагниченности вдоль оу
(если время первый) SW лаб.

Предполагаем во всех $\vec{M}_0(z) \parallel oy$, $\Rightarrow \vec{m} = (m_x, 0, m_z)$.

$h_d^x(\vec{\rho}) = \int d^2\vec{\rho}'\, g_{xx}(\vec{\rho},\vec{\rho}')\, m_x(\vec{\rho}')$, $h_d^z(\vec{\rho}) = \int d^2\vec{\rho}'\, g_{zz}(\vec{\rho},\vec{\rho}')\, m_z(\vec{\rho}')$

(т.е. m_x и m_z даже посчитанные не смешиваются при условии $\int dx\, k(\cdot)$ и $m \neq f(z)$.

$$g_{xx}(\vec{\rho},\vec{\rho}') = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d^2\vec{k}\,\frac{k_x^2}{k^2} f(kL)\, e^{i\vec{k}(\vec{\rho}-\vec{\rho}')} = -\frac{1}{2\pi}\int dk_y\, k_x^2 e^{ik_y(y-y')} \cdot$$
$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \frac{1}{k_x^2+k_y^2}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{k_x^2+k_y^2}}\left(1 - e^{-\sqrt{k_x^2+k_y^2}L}\right)\right] e^{ik_y(y-y')}$$

Альтернативный подход (граф. ур. 15/III 00 г.): $\nabla^2 \vec{h}_d = -4\pi \nabla\nabla\cdot\vec{m}$, $\lambda \nabla^2 \vec{m} = -4\pi \nabla\nabla\cdot\vec{m}$

Здесь $\vec{m} = (m_x, 0, m_z)$ и $m_{x,z} = f(x,y)$ только.

$$\nabla\cdot\vec{m} = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial m_z}{\partial z}\right)_{=0} = \frac{\partial m_x}{\partial x}, \quad \nabla(\nabla\cdot\vec{m}) = \mathrm{grad}\left(\frac{\partial m_x}{\partial x}\right) = \vec{i}\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \vec{j}\frac{\partial^2 m_x}{\partial x \partial y}$$

Тогда $h_d^x = \lambda_x m_x$, $h_d^z = \lambda_z m_z$ даже СФ.

$$\nabla^2 h_d^x = -4\pi \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{div}\,\vec{m}, \quad \nabla^2 h_d^z = -4\pi \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{div}\,\vec{m} = 0$$
$$\nabla^2 h_d^y = -4\pi \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{div}\,\vec{m} \quad — h_d^y \text{ исчезнет при } \langle\dots\rangle_y.$$

$$\left.\begin{cases} \lambda_x \nabla^2 m_x = -4\pi \dfrac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} \\ \lambda_y \nabla^2 m_y = -4\pi \dfrac{\partial^2 m_x}{\partial x \partial y} \\ \lambda_z \nabla^2 m_z = 0 \end{cases}\right\} \begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix} \rightarrow \lambda_y \nabla^2 m_x = -4\pi \frac{\partial^2 m_x}{\partial x \partial y} \text{ по смыслу } h_d^y \sim m_x.$$

Отметим, что выбросить зависимость СФ от y и исходя, сначала нельзя сразу как 15/III 00 г. Может даже нужно $\nabla^2 h_d(\vec{r}) = -4\pi\nabla\cdot m(\vec{r})$ брать много по z дает аккуратно.

(1)&(2): $\lambda_y \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = \lambda_x \frac{\partial^2 m_x}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_y \frac{\partial m_x}{\partial x} - \lambda_x \frac{\partial m_x}{\partial y}\right] = 0$

$$\nabla^2 h_d^x(\vec{r}) = -4\pi \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{div}\,\vec{m}(\vec{r}) = -4\pi \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_z}{\partial z}\right], \quad \vec{m} \neq f(z) \text{ — предполагаем, но } h_d \text{ если } f(z) \text{ то } \langle\dots\rangle_z.$$

$$\nabla^2 h_d^x = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] h_d^x = -4\pi \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2}$$

$\langle\dots\rangle_z = \frac{1}{L}\int_0^L dz \rightarrow$ $\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\langle h_d^x\rangle_z + \frac{1}{L}\left(\frac{\partial h_d^x}{\partial z}\right)\Big|_0^L = -4\pi \frac{\partial^2}{\partial x^2} m_x$

Предполагаем $\langle h_d^x\rangle_z = \lambda_x m_x \rightarrow \lambda_x \nabla_{xy}^2 m_x + \frac{1}{L}\left(\frac{\partial h_d^x}{\partial z}\right)\Big|_0^L = -4\pi \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2}$ —

Отличается от (1) доп. членом.

$$h_d^x(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}'\left[G_{xx}(\vec{r},\vec{r}')\, m_x(\vec{\rho}') + G_{xy}(\vec{r},\vec{r}')\, m_y(\vec{\rho}') + G_{xz}(\vec{r},\vec{r}')\, m_z(\vec{\rho}')\right]$$
не не нужен.

Escaneado con CamScanner

Plan Memo

Date.

$$\frac{\partial h_x^*(\omega)}{\partial z} = \int d^2\rho' dz' \left[\frac{\partial G_{xx}(r,r')}{\partial z} m_x(\rho') + \frac{\partial G_{xz}(r,r')}{\partial z} m_z(\rho') \right]$$

$$\int_0^L dz' \frac{\partial}{\partial z} G_{xx}(r,r') \underset{(z-z')}{=} -\int_0^L dz' \frac{\partial}{\partial z'} G_{xx}(r,r') = -G_{xx}(r,r') \Big|_{z'=0}^{z'=L}$$

Вклад в h_x^* от G_{xx}: $\left.\frac{\partial h_x^*}{\partial z}\right|_0^L = \int d^2\rho' m_x(\rho') \left\{ \left[-G_{xx}(r,r') \right]\Big|_{z'=0}^{z'=L} \right\}_{z=0}^{z=L} =$

$$= -\int d^2\vec{\rho}' m_x(\vec{\rho}') \left\{ G_{xx}(\rho\rho', z, L) - G_{xx}(\rho\rho', z, 0) \right\}\Big|_{z=0}^{z=L} =$$

$$= -\int d^2\rho' m_x(\rho') \left\{ G_{xx}(L,L) - G_{xx}(0,L) - G_{xx}(L,0) + G_{xx}(0,0) \right\}$$

$G_{xx}(z,z') \sim e^{-k|z-z'|}$, поэтому $\{\dots\} \sim (1-e^{-kL})^2 \neq 0$.

Т.е. система не магнитостат. СФ (x) неточна.

Вернемся к $\int dk_y$ в инт. представлении $g_{xx}(\vec{\rho}, \vec{\rho}')$.

$$\int_0^\infty e^{-\beta\sqrt{\gamma^2+x^2}} \frac{\cos ax}{\sqrt{\gamma^2+x^2}} dx = K_0(\gamma\sqrt{a^2+\beta^2}) = I(\gamma)$$

$$\frac{\partial I(\gamma)}{\partial \gamma} = \int dx \cos ax \left[e^{-\beta\sqrt{\cdot}} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1\cdot 2\gamma}{(\gamma^2+x^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma^2+x^2}} e^{-\sqrt{\cdot}} (-\beta) \frac{1\cdot 2\gamma}{2\sqrt{\gamma^2+x^2}} \right] =$$

$$= -\gamma \int dx \cos ax \frac{e^{-\beta\sqrt{\gamma^2+x^2}}}{(\gamma^2+x^2)^{3/2}} - \beta\gamma \int dx \cos ax \frac{e^{-\beta\sqrt{\gamma^2+x^2}}}{(\gamma^2+x^2)} \leftarrow \text{не берется.}$$

Координат. представление: $g_{xx}(\vec{\rho}, \vec{\rho}') = \frac{1}{L}\int_0^L dz\, dz' G_{xx}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{L}\int_0^L dz\, dz' (-1) \frac{\partial^2}{\partial x \partial x'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$$\int dz\, dz' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int_0^L dz\, dz' \frac{1}{\sqrt{\Delta^2 + (z-z')^2}} = \int_0^L dz \left[\operatorname{Arsh}\frac{L-z}{\Delta} + \operatorname{Arsh}\frac{z}{\Delta} \right] = \left| \text{См. 14/I 002.} \right| =$$

$$= 2\int_0^L dz \operatorname{Arsh}\frac{z}{\Delta} = 2\left[L \operatorname{Arsh}\frac{L}{\Delta} - \sqrt{L^2+\Delta^2} + |\Delta| \right], \quad \Delta^2 = (\vec{\rho}-\vec{\rho}')^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2$$

$$g_{xx}(\vec{\rho}, \vec{\rho}') = \left(-\frac{2}{L}\right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial x'} \left[L \operatorname{Arsh}\frac{L}{\Delta} - \sqrt{L^2+\Delta^2} + |\Delta| \right], \quad \operatorname{Arsh}(x) = \ln\left[x + \sqrt{x^2+1}\right]$$

→ Или $d^2\vec{k} = dk_x dk_y = k\,dk\,du$ $(u = \varphi_{\vec{k}})$ (см. 3/XII 992.)
и интересное инт. представление $g_{\alpha\beta}(\vec{\rho}, \vec{\rho}')$ если $\int_0^\infty dk (\dots)$ в $\int d^2\vec{k}(\dots)$:

$$g_{xx}(\vec{\rho}, \vec{\rho}') = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} du \cos^2 u \left[\frac{1}{L}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{L-a}\right) - \frac{1}{a^2} \right], \quad a = i\left[(x-x')\cos u + (y-y')\sin u\right]$$

и $\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} \frac{du}{a^2} = \delta(\vec{\rho}-\vec{\rho}')$. $a = i(\vec{\rho}-\vec{\rho}')\cdot\frac{\vec{k}}{k} = i\vec{\Delta}\cdot\frac{\vec{k}}{k}$.

Escaneado con CamScanner

Plan Memo

Vortex stability (Conformal mode)

(Продолжение расчета с Матлабом от 5/II.)

Date. 18.02. Полная энергия системы. Вклад $W(c,a)$

Vortex теряет стабильность при $\left.\frac{\partial^2 W(c,a)}{\partial a^2}\right|_{a=0} = 0$, это кривая в R-L плоскости $R_c(L)$.

$$Q(x) = \left.\frac{\partial^2 G(x,\delta)}{\partial \delta^2}\right|_{\delta\to 0} = \int_0^\infty dk\, e^{-kx}\left[I_3(k)^2 - I_1(k) I_2(k)\right]$$

$$\frac{\partial^2 W_m^{face}}{\partial a^2} = \frac{2c}{g}\left[-(1-c^2)\frac{g}{c}\lambda^2 + 2c^4\left\{Q(0) - Q\left(\frac{g}{c}\right)\right\}\right], \quad c = \frac{R_v(a=0)}{R} - \text{relative core radius at } a=0,\ a=\frac{\delta}{R} - \text{shift}$$

$$\left.\frac{\partial^2 W_m^{side}}{\partial a^2}\right|_{a=0} = 4 I_1(g), \quad I_1(g) = \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(kg) J_1^2(k) \to \frac{N_x(g)}{4\pi}.$$

Если volume charges пренебрежем (W_{ex} от a не зависит), то

$$\left.\frac{\partial^2 W}{\partial a^2}\right|_{a=0} = \left.\frac{\partial^2 W_m^{face}(c,a)}{\partial a^2}\right|_{a=0} + \left.\frac{\partial^2 W_m^{side}}{\partial a^2}\right|_{a=0}, \quad \lambda^2 = \frac{R_0^2}{4\pi R^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial a^2}\right)_{a=0} = \frac{2c}{g}\left[-(1-c^2)\frac{g}{c}\lambda^2 + 2c^4\left\{Q(0) - Q\left(\frac{g}{c}\right)\right\}\right] + 4 I_1(g),$$

где $\lambda^2 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2$, $c = \frac{b}{R}$, $g = \frac{L}{R} \equiv \beta$, $R_0 \equiv L_E$ – собств. длина

$\xi = \frac{b}{L} = F(L/R_0)$ только – построена 26/X 002. $c = \frac{b}{R} = \frac{b}{L} g = \xi g$, $\frac{L}{R_0} = \ell$ – удобно при $L = const$.

(*) $$W_a''(\xi, g, \ell) = 2\xi\left[-(1-\xi^2 g^2)\frac{1}{\xi}\frac{1}{4\pi}\frac{g^2}{\ell^2} + 2\xi^4 g^4\left\{Q(0) - Q\left(\frac{1}{\xi}\right)\right\}\right] + 4 I_1(g) =$$

$$= 2\xi g^2\left[-\frac{1}{4\pi}\frac{(1-\xi^2 g^2)}{\xi \ell^2} + 2\xi^4 g^2\left\{Q(0) - Q(1/\xi)\right\}\right] + 4 I_1(g)$$

Полагая $L = const$, т.е. $\ell = \frac{L}{R_0} = const$, получим и $\xi = \frac{b}{L} = const$, т.е. W_a'' будет функцией только $g = \frac{L}{R}$ или $R/L = \frac{R}{R_0}\frac{1}{\ell}$ – безразмер. радиуса $\frac{R}{R_0}$.

И при $L = const = L_1$ можно будет найти $R_c(L_1)$ из $W_a''\left(\frac{R}{R_0}\right) = 0$.

При этом используем Табл. от 26/X 002., чтобы по L найти $\xi = \frac{b}{L}$

$W''(g) = W''\left(\frac{\ell}{(R/R_0)}\right) = W''(\beta/R_0)$. (*) и используем для расчета $W_a''\left(\frac{R}{R_0}\right) = 0$

$R_0 = 18$ nm

L, nm	g	27 (1.5)
g_c		
R_c		

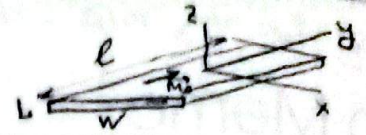
→ Вывод: Conf. mode не даст нового ускорения вихря! Увы!

$W'' > 0$ для разумных R и L.

Escaneado con CamScanner

Escaneado con CamScanner

Plan Memo



KIAS Conf. on Low dimensional systems

Date. 19.02. Rectangular dot – SW – bug ФГ и СФ

15/II Было получено координатное представление для $g_{xx}(\vec{\rho},\vec{\rho}')$.

→ Ограничимся вкладом основной моды ($m=0$) по ширине для $w \parallel 0x$. Тогда можно усреднить по x:

$$g_{xx}(y,y') = \frac{1}{w}\int dx\,dx'\, g_{xx}(\vec{\rho},\vec{\rho}') = \frac{1}{w}\frac{(-2)}{L}\int_{-\frac{w}{2}}^{w/2}dx\int_{-\frac{w}{2}}^{w/2}dx'\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial x'}F(x,x') =$$

$$= -\frac{2}{wL}\int_{-w/2}^{w/2}dx\,\frac{\partial}{\partial x}\left[F(x,\tfrac{w}{2})-F(x,-\tfrac{w}{2})\right] = -\frac{2}{wL}\left[F(\tfrac{w}{2},\tfrac{w}{2})-F(-\tfrac{w}{2},\tfrac{w}{2})-F(\tfrac{w}{2},-\tfrac{w}{2})+F(-\tfrac{w}{2},-\tfrac{w}{2})\right]$$

$$= \left|F(x,x')=F(|x-x'|)\right| = -\frac{4}{wL}\left[F(\tfrac{w}{2},\tfrac{w}{2})-F(\tfrac{w}{2},-\tfrac{w}{2})\right] = -\frac{4}{wL}\left[F(0)-F(w)\right]$$

$$\to g_{xx}(y,y') = -\frac{4}{wL}\left[L\,\mathrm{Arsh}\frac{L}{|y-y'|} - \sqrt{L^2+(y-y')^2} + |y-y'| - L\,\mathrm{Arsh}\frac{L}{\sqrt{w^2+(y-y')^2}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{L^2+w^2+(y-y')^2} - \sqrt{w^2+(y-y')^2}\right]$$

Аналогично → $g_{zz}(y,y') = \frac{1}{w}\int dx\int dx'\, g_{zz}(\vec{\rho},\vec{\rho}') = \frac{1}{w}\frac{2}{L}\int_{-\frac{w}{2}}^{w/2}dx\,dx'\left[\frac{1}{\sqrt{L^2+\Delta^2}}-\frac{1}{|\Delta|}\right] =$

$$= \left|\Delta=|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|\right| = \frac{4}{Lw}\left[w\,\mathrm{Arsh}\frac{w}{\sqrt{L^2+(y-y')^2}} - w\,\mathrm{Arsh}\frac{w}{|y-y'|} + \sqrt{L^2+(y-y')^2} - |y-y'| + \right.$$

$$\left. + \sqrt{w^2+(y-y')^2} - \sqrt{L^2+w^2+(y-y')^2}\right),$$ это как 15/I 002, где $l \to w$, т.к. Ox и Oy я поменял местами.

→ Важно лишь $g_{xx}(y,y') = F_x(|y-y'|)$, $g_{zz}(y,y') = F_z(|y-y'|)$

$$L\left(\mathrm{Arsh}\frac{L}{\sqrt{w^2+(y-y')^2}} - \mathrm{Arsh}\frac{L}{|y-y'|}\right) = L\left(\ln\left[\frac{L}{\sqrt{w^2+y^2}}+\sqrt{\frac{L^2}{w^2+y^2}+1}\right] - \right.$$

$$\left. - \ln\left[\frac{L}{|y|}+\sqrt{\frac{L^2}{y^2}+1}\right]\right) = L\left(\ln\left[\frac{L+\sqrt{L^2+w^2+y^2}}{\sqrt{w^2+y^2}}\right] - \right.$$

$$\left. - \ln\left[\frac{L+\sqrt{L^2+y^2}}{|y|}\right]\right) = L\ln\left[\frac{L+\sqrt{L^2+w^2+y^2}}{L+\sqrt{L^2+y^2}}\cdot\frac{|y|}{\sqrt{w^2+y^2}}\right] =$$

$$= L\ln\frac{|y|}{\sqrt{w^2+y^2}} + L\ln[\dots] = L\ln(\cdot) + L\ln\left[\frac{L+\sqrt{w^2+y^2}\sqrt{1+\frac{L^2}{w^2+y^2}}}{L+\sqrt{L^2+y^2}}\right] -$$

так много, см. 15/I. Везде $\mathrm{Arsh}\frac{L}{|y-y'|}$ – разложить нельзя.

$$\mathrm{Arsh}\frac{L}{\sqrt{w^2+(y-y')^2}} = \ln\left[\frac{L+\sqrt{w^2+y^2}}{\sqrt{w^2+y^2}}\right] = \frac{L}{\sqrt{w^2+y^2}} + O\left(\frac{L^2}{w^2}\right) \text{ при } \frac{L}{w} \ll 1.$$

Plan Memo

$\sqrt{L^2+A^2} - A = A\sqrt{1+\frac{L^2}{A^2}} - A = A\left(1+\frac{1}{2}\frac{L^2}{A^2}\right) - A = \frac{1}{2}\frac{L^2}{A}$ при $A \to 0$, $A^2 = w^2 + (y-y')^2$ например.

Note.

$$g_{xx}(y,y') \underset{\rho\to 0}{\cong} -\frac{4}{wL}\left[L\,\mathrm{Arsh}\frac{L}{|y-y'|} - \sqrt{L^2+(y-y')^2} + |y-y'| - L\frac{L}{\sqrt{w^2+(y-y')^2}} + \frac{1}{2}\frac{L^2}{\sqrt{w^2+(y-y')^2}}\right] =$$

$$= \frac{4}{wL}\left[\sqrt{L^2+(y-y')^2} - |y-y'| - L\,\mathrm{Arsh}\frac{L}{|y-y'|} + \frac{1}{2}\frac{L^2}{\sqrt{w^2+(y-y')^2}}\right] + O\left(\frac{L^2}{w^2}\right)$$

$$g_{zz}(y,y') \underset{\rho\to 0}{\cong} \frac{4}{wL}\left[w\ln\frac{|y-y'|}{\sqrt{L^2+(y-y')^2}} + \frac{w}{2}\frac{L^2}{\left(w+\sqrt{w^2+(y-y')^2}\right)\sqrt{w^2+(y-y')^2}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{L^2+(y-y')^2} - |y-y'| - \frac{1}{2}\frac{L^2}{\sqrt{w^2+(y-y')^2}}\right] =$$

$$= \frac{4}{wL}\left[w\ln\frac{|y-y'|}{\sqrt{L^2+(y-y')^2}} + \sqrt{L^2+(y-y')^2} - |y-y'| - \frac{1}{2}\frac{L^2}{w+\sqrt{w^2+(y-y')^2}}\right] + O\left(\frac{L^2}{w^2}\right)$$

→ Вывод: для основной моды ($m=0$, $k_x=0$) поперечн. dot $g_{xx}(y,y')$ и $g_{zz}(y,y')$ совершенно разные (разные даже при $L/w \to 0$), т.е. надо использовать разные СФ $m_{\textcircled{z}}(y)$ и $m_{\textcircled{x}}(y)$ с разной локализацией по "y".

→ Отметим, что g_{xx}, g_{zz} — поперечные к $\vec{M}_0 \parallel oy$ компоненты ФГ для осн. моды ($k_x=0$) зависят лишь от y, y' — продольных координат.

→ Ясно, что из-за $g_{yy}(\vec{\rho},\vec{\rho}')$ и $\langle g_{yy}\rangle_x \neq 0$ ур-е $Sp(g_{\alpha\beta}) = -4\pi\delta(\vec{\rho}-\vec{\rho}')$ или $Sp(g_{\alpha\beta}(yy')) = -4\pi\delta(y-y')$ делает СФ и СЗ оф $g_{xx}(y,y')$ и $g_{zz}(y,y')$ (λ_x, λ_z) независимыми.

Escaneado con CamScanner

Plan Memo — SW в vortex state (disk)

Date. 21 . 02 .

Первую оценку частоты колебаний (сдвиговых) of vortex in cylindrical dot я сделал еще 11/V00г.

А именно, для $L=15$ nm, $R=250$ nm вышло $\left(\frac{\omega_0}{2\pi}\right) = 0{,}5$ GHz.

$s_0 = \frac{1}{2a}h$, $W(s) = W(0) + as^2 - hs$, полная энергия $\delta W(s) = as^2 = \frac{1}{2}\zeta s^2$
(rigid v. model) Смещ. вихря

В абс. ед. ($w = W/M_s^2 V$) $W(s) = \frac{1}{2}\zeta s^2 - hs$, $s_0 = \frac{h}{\zeta} = \frac{M_s H}{\zeta'}$

$\frac{1}{V}W(s) = \frac{1}{2}\left(\zeta M_s^2\right)\frac{1}{R^2}s^2 - HM_s\frac{s}{R}$. $\quad \frac{s_0}{R} = \frac{1}{2a}\frac{H}{M_s}$, $s_0 = \frac{R}{2aM_s^2}(M_s H)$ (*)

$\zeta' = \zeta M_s^2 \frac{1}{R^2}$, $\quad \frac{1}{V}W(s) = \frac{1}{2}\zeta' s^2 - \frac{HM_s}{R}s \to s_0 = \frac{(HM_s)}{R\zeta'}$ (**)
(abs. un.)

Сравнивая (*) и (**) (для s_0) получим: $\frac{R}{2aM_s^2} = \frac{1}{R\zeta'}$, $\zeta' = \frac{2aM_s^2}{R^2}$

Или $\frac{R}{V}W(s) = \frac{1}{2}\underbrace{(\zeta' R)}_{\varkappa}s^2 - HM_s s$, определим $\varkappa \equiv \zeta' R = \frac{2aM_s^2}{R}$

Согласно монографии Гур.-Мелков:

$m_w \ddot{x} + \varkappa x = 0$, $\omega_0^2 = \frac{\varkappa}{m_w}$, $\frac{1}{m_w} \approx \gamma^2 \beta$, $[m_w] = \frac{г}{см^2}$,

где m_w и $\varkappa$ – рассчитаны на ед. площади DC.

У меня такой сохр. полн. эн. $\frac{R}{V}\delta W(s) = \frac{1}{2}\varkappa s^2$, $[s] = см$.

Т.е. 11/V00г. я посчитал нормировку на площадь "DC" – вихря $\frac{V}{R} = \pi R L = \zeta$

Это дало $\omega_0 = \sqrt{\frac{\varkappa}{m_w}} = \sqrt{\gamma^2\beta \cdot \frac{2aM_s^2}{R}} = \gamma M_s \sqrt{2a\left(\frac{\beta}{R}\right)}$ или

$f_0 = \left(\frac{\omega_0}{2\pi}\right) \approx \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right) M_s^{FeNi} \sqrt{2a\,(L=25\text{нм}, R=0{,}25\,\mu\text{м}) \cdot 0{,}06} \approx 0{,}53$ GHz.

→ Эта оценка зависит и от определения $S_{ef} = \frac{V_d}{R}$ и от того, что такое β – размер неоднородности (я тогда полагал β = радиус "core").

В Jan. 2001 В.Новосад получил $\left(\omega_0/2\pi\right) = 2{,}2$ GHz для $L = 100$ нм, $R = 0{,}5\,\mu$м
$(\beta = L/R = \frac{100}{500} = 0{,}2)$

$\gamma_{(\beta=0{,}2)} = \frac{1}{2a\,(\beta=0{,}2,\ 500\text{нм})} = 0{,}79$ (16/V00г.)

Оценим ω_0 для этого эксп. by Novosad ($\frac{L}{R_0} = \frac{100}{18} \approx 5{,}5$, $\frac{\beta}{R} = \beta\left(\frac{\beta}{L}\right) = 0{,}2\cdot 0{,}3 \approx$)

$f_0 = \left(\frac{\omega_0}{2\pi}\right) \approx 3\ \frac{\text{GHz}}{\text{kOe}} \cdot 0{,}8\ \text{kOe}\sqrt{\frac{0{,}06}{0{,}79}} \approx 0{,}67\ \text{GHz} \approx 0{,}7\ \text{GHz}$,

тогда как эксп. $f_0 \approx 2{,}2$ GHz.

Т.е. либо $S_{ef} = \frac{V_d}{R}$, либо β ~ радиус "core" — плохо (либо сама m_w).

Если считать размер неоднородности $\beta \approx R$, то

$f_0 = \left(\frac{\omega_0}{2\pi}\right) = \gamma M_s \frac{1}{2\pi}\sqrt{2a(\beta R)} \approx 3\ \frac{\text{GHz}}{\text{kOe}}\ 0{,}8\ \text{kOe}\sqrt{1/0{,}79} \approx 2{,}7\ \text{GHz}$ (!)

Ближе к эксп. 2,2 GHz

Escaneado con CamScanner

Escaneado con CamScanner

Б. Иванов предлагает формулу $\omega_B = \frac{\chi_B}{G}$, $G = \frac{1}{\gamma} 2\pi M_s L$

Дата. $\omega_B = \frac{\gamma \chi_B}{2\pi M_s L} = \frac{\gamma}{2\pi} M_s \left(\frac{\chi_B}{M_s^2 L}\right)$, где $W(\chi) = \frac{1}{2}\chi_B \chi^2$, $[\chi_B] = \text{эрг/см}^3$

В наших обозначениях $\frac{1}{V_\Delta}\Delta W(s) = \frac{1}{2}\xi' s^2$, $\Delta W(s) = \frac{1}{2}(\xi' V_\Delta) s^2$, $S = \chi$ – магнитный момент

т.е. $\chi_B = \xi' V_\Delta = \frac{2a M_s^2}{R^2} \cdot \pi R^2 L = 2a M_s^2 \cdot \pi L$ или

$\omega_B = (\gamma M_s)\frac{\chi_B}{2\pi M_s^2 L} = (\gamma M_s)\frac{2a M_s^2 \pi L}{2\pi M_s^2 L} = (\gamma M_s)\cdot a$, $\omega_B = \gamma M_s \cdot a(\beta, R)$

Б. Иванов

$\omega_B \sim a$, а не как в наших опытах $\sqrt{a}$, т.к. отсюда из ур. Л.-Л. – первого порядка $\frac{\partial M}{\partial t}$, а не $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ как у гармон. осциллятора.

$f_0^B = \left(\frac{\omega_B}{2\pi}\right) = \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right) M_s\, a(\beta, R)$ и $f_0^B = 3\frac{\text{ГГц}}{\text{кЭ}} \cdot 0{,}8\ \text{кЭ} \frac{1}{(0{,}79 \cdot 2)} \approx 1{,}52\ \text{ГГц}$,

что весьма хорошо, если из модели осциллятора с m_w.

$\chi(0) = \frac{1}{2a(\beta, R)}$ и $\omega_B = \gamma M_s a = \frac{\gamma M_s}{2\chi(0)}$ – см. 14/VIII 2001 г.

(initial susceptibility of cylindrical dot.

Plan Memo Мода номера стабильности вихря в Θ (отход от конформ. моды)

22/II Date. 22.02. Проверка §6 и §7 Косого file.

1) Сингулярная часть (область внутри „сопа"):

$$E^S_{e_x} = -2i \oint_{|f(z)|=1} \frac{1}{f(z)} \frac{\partial f(z)}{\partial z} dz, \quad W(z,\bar z) = \begin{cases} f(z), & |f(z)|<1 \text{ - сопа} \\ \frac{f(z)}{|f(z)|}, & |f(z)|>1, \text{ вне „сопа"} \end{cases}$$

Частный случай (неканонический) им. $f(z) = i\frac{z}{c}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{i}{c}$

$$E^S_{e_x} = -2i \oint_{|z|=c} \frac{c}{iz}\frac{i}{c} dz = -2i \oint_{|z|=c} \frac{dz}{z} = -2i \cdot 2\pi i \underbrace{\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z}}_{=1} = 4\pi$$ - сферы

2) Регулярная часть (вне „сопа"), $W(z,\bar z) = \frac{f(z)}{|f(z)|} = \sqrt{\frac{f(z)}{\bar f(z)}} = \sqrt{\frac{f(z)}{\bar f(\bar z)}}$

$f(z)$ - аналитическая, $\Rightarrow \overline{f(z)} = \bar f(\bar z)$ или как у Косси $\bar f(\bar z)$.

Плоск. обл. эл. $e^M = 2\left[\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial \bar W}{\partial \bar z} + \frac{\partial W}{\partial \bar z}\frac{\partial \bar W}{\partial z}\right]$ и вспомогат. формула

$\rightarrow u^M(z,\bar z) = \frac{1}{f(z)}\frac{\partial f}{\partial z} \ln\left[f(z)\bar f(\bar z)\right]$, Должно вып. $\frac{\partial u^M}{\partial \bar z} = e^M(z,\bar z)$

$$\frac{\partial u^M}{\partial \bar z} = \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{1}{f(z)\bar f(\bar z)} f(z)\frac{\partial \bar f(\bar z)}{\partial \bar z} = \frac{1}{f(z)\bar f(\bar z)}\frac{\partial f(z)}{\partial z}\frac{\partial \bar f(\bar z)}{\partial \bar z}$$

$$\frac{1}{2}e^M = \frac{1}{\sqrt{f}}\frac{1}{2\sqrt{f}}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{\bar f}}\frac{1}{2\sqrt{\bar f}}\frac{\partial \bar f(\bar z)}{\partial \bar z} + \sqrt{f}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(\bar f(\bar z))^{3/2}}\frac{\partial \bar f(\bar z)}{\partial \bar z}\sqrt{\bar f}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(f)^{3/2}}\frac{\partial f}{\partial z} =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{f\bar f}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \bar f(\bar z)}{\partial \bar z} + \frac{1}{4}\frac{1}{f\bar f}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \bar f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\frac{1}{f(z)\bar f(\bar z)}\frac{\partial f(z)}{\partial z}\frac{\partial \bar f(\bar z)}{\partial \bar z}$$ и

таки выполняется $\frac{\partial u^M}{\partial z} = e^M$ с $u^M(z,\bar z) = \frac{1}{f(z)}\frac{\partial f(z)}{\partial z}\ln\left[f(z)\bar f(\bar z)\right]$.

Т-ма Римана-Грина: $\frac{i}{2}\oint_{\partial D} u(z,\bar z)dz = \iint_D \frac{\partial u(z,\bar z)}{\partial \bar z} dx\,dy$ -

- обобщение т-мы Грина о $\int_S ds\, \operatorname{rot}\vec A = \oint_{\partial S} \vec A \cdot d\vec\ell$.

Для нашего случая ∂D  это граница сопа $|z|=c$ + граница круга $|z|=1$ (там $u^M(z,\bar z)=0$)

$$E^M_{e_x} = \iint_D \frac{\partial u(z,\bar z)}{\partial \bar z} dx\,dy = \frac{i}{2}\int_{|z|=1} \frac{1}{f(z)}\frac{\partial f(z)}{\partial z}\ln\left[f(z)\bar f(\bar z)\right]dz$$

Если частный случай, то $f(z) = \frac{i}{c}z$ и на контуре интегрирования $|z|=1$, т.е. $|f(z)|^2 = f\bar f = \frac{|z|^2}{c^2} = \frac{1}{c^2}$ и $E^M = \frac{i}{2}\ln\frac{1}{c^2}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z} = \frac{i}{2}(-2\ln c)2\pi i = +2\pi\ln c$ - верно, т.к. $\ln c < 0$

$\rightarrow$ Eq. (25) - (32) у Косси верные. Нормировка всех начинается лишь (в E.M. знак (метр))

Escaneado con CamScanner

New - conformal mode (quadratic)

Plan Memo Косся для смены вихря не предлагал $\left(\vec{m}\cdot\vec{n}\right)_S = 0$

$f(z) = \frac{1}{c}\left[iz + \frac{1}{2}(a - \bar{a}z^2)\right] = \frac{i}{c}\left[z + \frac{1}{2i}(a - \bar{a}z^2)\right]$, т.е.

Date. использ. conformal mapping $\left(z \to z' = z + \frac{1}{2i}(a - \bar{a}z^2)\right)$.

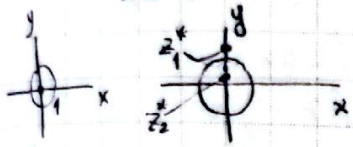
В PRB статье мы использовали disk self-to-self mapping $z \to z' = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

Инфракрасный план для 2D - изинговцев я написал 27/XI 00 г.

А 28/XI я показал, что общ. энергия vortexa W_{ex} является инвариантом конформ. mapping $z' = O(z)$ если $S_d = S_d'$, т.е. преобразование $z' = O(z)$ является self-to-self, сохраняя область существования функции. z (например круг → круг).

А где $z'(a) = 0$? Пусть a - вещ. $(a < 1)$, то $az^2 - 2iz - a = 0$,

$z^*_{1,2} = \frac{1}{2a}\left[2i \pm \sqrt{4(-1) - 4a(-a)}\right] = \frac{1}{a}\left[i \pm \sqrt{a^2 - 1}\right] = \frac{i}{a}\left[1 \pm \sqrt{1-a^2}\right]$



т.к. $|z'| \le 1$, то оставляем оба корня при $0 \le a \le 1$.

но $f(z) = 0$ соотв. центр вихря $(m_z = 1)$.

И тоже - теперь два центра вихря внутри круга $|z'| \le 1$?

Вып. ли $(\vec{m}\cdot\vec{n}) = 0$? $c\,\mathrm{Re}\,f(z) = \mathrm{Re}\left[i(x+iy) + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}(x^2 - y^2 + 2ixy)\right] =$

$= \frac{a}{2} - \frac{a}{2}(x^2 - y^2) - y$, $c\,\mathrm{Im}\,f(z) = -axy + x$

$\left(\vec{m}\cdot\vec{n}\right)_{S_{бок.}} = m_x n_x + m_y n_y \sim \left[\frac{a}{2} - \frac{a}{2}(x^2 - y^2) - y\right]x + \left[-axy + x\right]y =$

$= \frac{a}{2}x - \frac{a}{2}(x^2 - y^2)x - axy^2 = \frac{a}{2}x\left[1 - (x^2 - y^2) - 2y^2\right] = \frac{a}{2}x\left[1 - x^2 - y^2\right] = 0$, т.к. $x^2 + y^2 = 1$

Что это за mapping?: $z' = z\left[1 + a\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z} - z\right)\right] = \rho e^{i\varphi}\left[1 + \frac{a}{2i}\left(\rho^{-1}e^{-i\varphi} - \rho e^{i\varphi}\right)\right]$,

при $\rho = 1$ $z' = e^{i\varphi}\left[1 - a\sin\varphi\right]$ - ?

Формально этот mapping можно использовать. Тогда

$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = \frac{1}{c}\left[i - \bar{a}z\right]$ и $E^S_{ex} = -2i\oint_{|f(z)|=1} \frac{c}{iz + \frac{a}{2}(1-z^2)}\frac{1}{c}(i - az)\,dz =$

$= -2i\oint_{|f(z)|=1} \frac{i - az}{iz + \frac{a}{2}(1-z^2)}\,dz$, → контур $|f(z)| = 1$ может охватывать z_1, z_2, только один из корней - z_1, или z_2 или на окр. (вообще-то)

"доказ.":

$c^2|f(z)|^2 = c^2(\mathrm{Re}\,f)^2 + c^2(\mathrm{Im}\,f)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}(x^2 - y^2)^2 + y^2 - \frac{1}{2}a^2(x^2 - y^2) - ay + ay(x^2 - y^2) +$

$+ a^2x^2y^2 + x^2 - 2ax^2y = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\left[x^2 + y^2\right]^2 - \frac{1}{2}a^2(x^2 - y^2) + x^2 + y^2 - ay\left[1 + x^2 + y^2\right] = c^2$

ур-е смещённого «круга» - границы

При $x = 0$ (на оси x) $\mathrm{Im}\,f(z) = 0$ и $|f(z)| = \mathrm{Re}\,f(z) = \frac{1}{c}\left[\frac{a}{2} - y + \frac{a}{2}y^2\right] = 1$

или $\frac{a}{2}y^2 - y + \frac{a}{2} - c = 0$, $y_{1,2} = \frac{1}{a}\left[1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2} - c\right)}\right] = \frac{1}{a}\left[1 \pm \sqrt{1 - a^2\left(1 - \frac{2c}{a}\right)}\right]$

При $a \ll 1$ контур имеет: $x^2 + y^2 - ay(1 + x^2 + y^2) = c^2$

Plan Memo



Кривая $|f(z)|=1$ при $x=0$ проходит через точки $y_{1,2}=\frac{1}{a}\left[1\pm\sqrt{1-a^2(1-y^2)}\right]$

Date. Тогда как наименьшая $f(z)=0$ при $y_{1,2}^*=\frac{1}{a}\left[1\pm\sqrt{1-a^2}\right]$.

~~Видно что~~ $y_1<y_1^*<y_2^*<y_2$ т.к. $(1-\frac{2c}{a})>0$, $a>2c$)

При $a\ll 1$: $y_1^*=\frac{1}{a}\left(1+(1-\frac{a^2}{2})\right)\approx\frac{2}{a}>1$, а $y_2^*=\frac{1}{a}\left(1-(1-\frac{a^2}{2})\right)=\frac{a}{2}<1$.

$y_{1,2}=\frac{1}{a}\left[1\pm\sqrt{1+2ac}\right]=\frac{1}{a}\left[1\pm(1+ac)\right]=\left\{\begin{matrix}\frac{1}{a}(2+ac)=\frac{2}{a}+c\\ \frac{1}{a}(-ac)=-c\end{matrix}\right\}$,

т.е. $y_1=\frac{2}{a}+c>y_1^*$, $y_2=-c<y_2^*$.

Это означает, что наносим $f(z)$, находящиеся в дог $|z|\le 1$, а в. точки $y_2^*=\frac{1}{a}\left[1-\sqrt{1-a^2}\right]$, $a<1$. Контур $|f(z)|$ при $x=0$ проходит через $y_2<y_2^*$ и упирается дно $y=1$.

$$E^S=-2i\oint_{|f(z)|=1}\frac{i-az}{iz+\frac{a}{2}(1-z^2)}dz=-2i\cdot 2\pi i\operatorname*{Res}_{(z=z_2^*=y_2^*i)}\frac{i-az}{iz+\frac{a}{2}(1-z^2)}=$$

$$=4\pi\frac{i-ay_2^*}{i-ay_2^*}=4\pi,$$ и всегда 4π если внутри $|f(z)|=1$-контура будет один нанос 1го порядка.

Для перем. часа: $E^M=\frac{i}{2}\int_{|z|=1}\frac{1}{f(z)}\frac{\partial f}{\partial z}\ln\left[f(z)\bar{f}(\bar{z})\right]dz$! Когда какое обозначение знак

На контуре $|z|=1$ $(\rho=1)$ $\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{c}\left[i-az\right]=\frac{1}{c}\left[i-ae^{i\varphi}\right]$, Изменение (-1)? интегр по контуру!

$f(z)=(\dots)$ $\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial\ln f}{\partial z}$, $f(z)=\frac{i}{c}\left[z^1\right]=\frac{i}{c}\left[1-a\sin\varphi\right]e^{i\varphi}$

$|f(z)|^2=\frac{1}{c^2}\left[1-a\sin\varphi\right]^2$, $dz=ie^{i\varphi}d\varphi$ на контуре $|z|=\rho=1$.

$$E^M=\frac{i}{2}(-1)\int_{|z|=1}\frac{c}{i}\frac{1}{\left[1-a\sin\varphi\right]e^{i\varphi}}\frac{1}{c}\left[i-ae^{i\varphi}\right]\ln\left(\frac{1-a\sin\varphi}{c}\right)^2 d\varphi ie^{i\varphi}=$$

$$=(-1)\int_0^{2\pi}d\varphi\frac{\left[i-ae^{i\varphi}\right]ie^{i\varphi}}{\left[1-a\sin\varphi\right]e^{i\varphi}}\ln\left[\frac{1-a\sin\varphi}{c}\right]=(-1)\int_0^{2\pi}d\varphi\frac{\left[ie^{-i\varphi}-a\right]}{\left[1-a\sin\varphi\right]}\ln\left[\frac{1-a\sin\varphi}{c}\right]ie^{i\varphi}$$

23/II $$E^M(a)=(-1)\int_0^{2\pi}d\varphi\frac{\left(ie^{-i\varphi}-a\right)}{\left[1-a\sin\varphi\right]}\ln\left[\frac{1-a\sin\varphi}{c}\right]ie^{i\varphi},\quad E^M(0)\underset{a\to 0}{=}-i\ln\frac{1}{c}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{e^{i\varphi}}ie^{i\varphi}=2\pi\ln\frac{1}{c}$$

$$E^M(a)=\int_0^{2\pi}d\varphi\frac{\left(1+aie^{i\varphi}\right)}{\left(1-a\sin\varphi\right)}\ln[\dots]=\int_0^{2\pi}d\varphi\left[\frac{1-a\sin\varphi+ia\cos\varphi}{(1-a\sin\varphi)}\right]\ln[\dots]=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\ln\left[\frac{1-a\sin\varphi}{c}\right]+ia\int_0^{2\pi}d\varphi\frac{\cos\varphi}{1-a\sin\varphi}\ln\left[\frac{1-a\sin\varphi}{c}\right]=\int_0^{2\pi}d\varphi\ln\left[\frac{1-a\sin\varphi}{c}\right]$$

$$E^M(a)=-2\pi\ln c+\int_0^{2\pi}d\varphi\ln\left[1-a\sin\varphi\right]=-2\pi\ln c+2\pi\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}\right)$$

Гр. р. 4.125

(=+i ln c $\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}=+i\ln c\cdot 2\pi i=-2\pi\ln c$ (верно)

Escaneado con CamScanner

Plan Memo Полная Exchange энергия shifted vertex

$E_{ex} = E^S + E^M = 4\pi - 2\pi \ln c + 2\pi \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}\right) =$

$= 2\pi\left[2 - \ln c - \ln\frac{2}{1+\sqrt{1-a^2}}\right]$, что совп. с Eq. (34) Marvada.

Note. Здесь $|a|<1$, иначе при $a=1$ $\int_0^\pi d\varphi \ln[1-\sin\varphi] = -\pi\ln 2 - 4G$, (1)

где $G \cong 0{,}9160$ is Catalan's constant.

$\int_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi \frac{\ln(1-a\sin\varphi)}{1-a\sin\varphi} = \left|\begin{matrix}\sin\varphi = x \\ d\varphi\cos\varphi = dx\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}1-a\sin\varphi = u \\ du = (-a)\cos\varphi d\varphi\end{matrix}\right| =$

$= -\frac{1}{a}\int \frac{du}{u}\ln u = -\frac{1}{a}\int d(\ln u)\ln u = -\frac{1}{a}\frac{1}{2}(\ln u)^2\Big|_1^1 = 0$.

Но почему реально E_{ex} зависит от „a" при конф. $z' \to z + \frac{1}{2i}(a - \bar{a}z^2)$? Нарушается $S_d \neq S_d'$ при таком conf. mapping?

Доп. $W(z) = z' = z + \frac{1}{2i}(a - \bar{a}z^2)$ выполн. $(\vec{m}\cdot\vec{n})_{Sconv.} = 0$, Это не есть self-to-self mapping

а выполн. ли $\left(\frac{\partial\vec{m}}{\partial n}\right)_S = 0$?

$\frac{\partial m_x}{\partial n} = \left(\nabla m_x \cdot \vec{n}\right)_S$, $\frac{\partial m_y}{\partial n} = \left(\nabla m_y, \vec{n}\right)_S$, Вид „core" $m_x + i m_y = W(z,\bar{z})$,

$W(z,\bar{z}) = \frac{f(z)}{|f(z)|} = \frac{z}{|z|}$ после замены $z \to z' = z + \frac{1}{2i}(a - \bar{a}z^2)$

$m_x = \mathrm{Re}\,W = \frac{1}{|f(z)|}\mathrm{Re}f(z)$, $m_y = \mathrm{Im}\,W = \frac{1}{|f(z)|}\mathrm{Im}\,f(z)$, $f(z) = \frac{1}{c}\left[iz + \frac{a}{2}(1-z^2)\right]$ (a-Вещ.)

$m_x = \cos\Phi$, $m_y = \sin\Phi$ и $W(z,\bar{z}) = e^{i\Phi}$, $\mathrm{tg}\Phi = \frac{m_y}{m_x} = \frac{x(1-ay)}{\frac{a}{2} - \frac{a}{2}(x^2-y^2) - y}$

$\left(\nabla m_x \cdot \vec{n}\right)_S = \frac{\partial m_x}{\partial x}\cdot x + \frac{\partial m_x}{\partial y}\cdot y = -\sin\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x}x - \sin\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial y}y =$

$= -\sin\Phi\left[x\frac{\partial\Phi}{\partial x} + y\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right] = -\sin\Phi\left(\nabla\Phi\cdot\vec{n}\right)_S$, $\left(\vec{\nabla} m_y \cdot \vec{n}\right)_S = \cos\Phi\left(\nabla\Phi\cdot\vec{n}\right)_S$

$\Phi(x,y) = \mathrm{arctg}\frac{2x(1-ay)}{a - a(x^2-y^2) - 2y} = \mathrm{arctg}\,F(x,y)$, $F(x,y) = \frac{F_1(x,y)}{F_2(x,y)}$

$\left(\nabla\Phi\cdot\vec{n}\right)_S = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot y = \frac{1}{1+F^2}\frac{\partial F}{\partial x}x + \frac{1}{1+F^2}\frac{\partial F}{\partial y}y = \frac{1}{1+F^2}\times$

$\times\left[\frac{\partial F}{\partial x}x + \frac{\partial F}{\partial y}y\right] = \frac{\frac{\partial F_1}{\partial x}F_2 - F_1\frac{\partial F_2}{\partial x}}{F_2^2}\cdot x + \frac{\frac{\partial F_1}{\partial y}F_2 - F_1\frac{\partial F_2}{\partial y}}{F_2^2}\cdot y =$

$= \frac{1}{F_2^2}\Big[2(1-ay)\{a - a(x^2-y^2) - 2y\}x - 2x^2(1-ay)(-2ax) + (-2ax)\{a - a(x^2-y^2) - 2y\}y -$

$- 2x(1-ay)\{2ay - 2\}y\Big] = \left|x^2+y^2=1\right| = \frac{1}{F_2^2}2x\Big[(1-ay)\{a - a(x^2-y^2) - 2y\} +$

$+ 2ax^2(1-ay) - ay\{a - a(x^2-y^2) - 2y\} + 2y(1-ay)^2\Big] = \frac{2x}{F_2^2}\Big[2(1-ay)(a-y) -$

$= -2x(1-ay)$

Escaneado con CamScanner

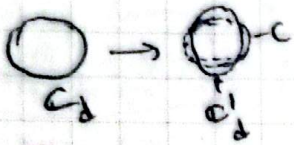
$-ay(-2y)(1-ay)+2y(1-ay)^2\Big] = \frac{4x(1-ay)}{F_2^2}\Big[a-y+ay^2+y(1-ay)\Big] =$

Date.

$= \frac{4ax(1-ay)}{F_2^2(x,y)} \neq 0$ в общем случае. Т.е. $\left(\frac{\partial m_{x,y}}{\partial n}\right)_S \sim (\nabla\Phi)_{x,y}\Big|_S \neq 0$

Конформ. преобразование $z' \to z + \frac{1}{2i}a(1-z^2)$ приводит к $\left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial n}\right)_S \neq 0$, где S - бок. поверхность дока.

$E_{ex} = f(a)$ и несохранение $\left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial n}\right)_{S_{бок}} = 0$ приводит к выводу, что этот конф. mapping не есть self-to-self. Ведь $\frac{\partial \vec{m}}{\partial n} = 0$ конечно выполняется на кривой C' в которую переходит C - $x^2+y^2=1$ - граница дока.



$\int_{S_1} e_{ex}\,dS = \int_{S'} e'_{ex}\,dS' \neq \int_{S} e'_{ex}\,dS'$ (это и дает зависимость $E_{ex}(a)$.

→ Найдем контур C' (хотя при $a \to 0$) и проверим выпуск. E^S (y_2 и y_2^*).

C' задается ур. $|f(z)|^2 = 1$ или $1 = f(z)\cdot\overline{f(z)} = \frac{i}{c}\left[z+\frac{a}{2i}(1-z^2)\right] \times$

$\times\left(-\frac{i}{c}\right)\left[\bar{z}-\frac{a}{2i}(1-\bar{z}^2)\right] = \frac{1}{a^2}\left[|z|^2 - \frac{a}{2i}(z-|z|^2\bar{z}) + \frac{a}{2i}(\bar{z}-|z|^2 z) + \right.$

$\left. + \frac{a^2}{4}(1-z^2)(1-\bar{z}^2)\right] = \frac{1}{c^2}\left[|z|^2 - \frac{a}{2i}(z-\bar{z}) + \frac{a}{2i}(\bar{z}-z)|z|^2 + \frac{a^2}{4}\left\{1-z^2-\bar{z}^2+|z|^4\right\}\right]$

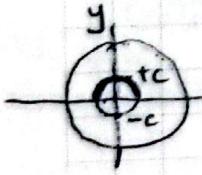
C': $|z|^2 - \frac{a}{2i}(z-\bar{z})(1+|z|^2) + \frac{a^2}{4}\left\{1-z^2-\bar{z}^2+|z|^4\right\} = c^2$ - граница "core" $|f(z)|^2=1$

При $a=0$: $|z|^2 = c^2$, $x^2+y^2=c^2$ - круг - граница "core".

и при $x=0$, $y_{1,2} = \pm c$.

$a \neq 0$, $x=0$ $c^2|f(z)|^2 = [\mathrm{Re} f(z)]^2 = \left[\frac{a}{2} - \frac{a}{2}(x^2-y^2) - y\right]^2 = c^2$,

$\frac{a}{2}y^2 - y + \frac{a}{2} = \mp c$ (тогда как 22/II учитывал только $+c$)



а) "-c" - здесь верхняя ветвь $|f(z)|^2=1$, в пределе $a=0$ $y=c$

б) "+c" — " — нижняя — " — , в пределе $a=0$ $y=-c$

а) верхн. ветвь $\frac{a}{2}y^2 - y + \frac{a}{2} + c = 0$, $y_{1,2} = \frac{1}{a}\left[1 \pm \sqrt{1-a^2-2ac}\right]$

$a \to 0$, $y^в_{1,2} = \frac{1}{a}\left[1 \pm \sqrt{1-2ac}\right] = \frac{1}{a}\left[1 \pm (1-ac)\right] = \begin{cases} 2/a - c, \\ c, \end{cases}$

б) нижн. ветвь как 22/II $y_{1,2} = \frac{1}{a}\left[1 \pm \sqrt{1-a^2+2ac}\right]$, $y^н_{1,2} = \begin{cases} 2/a + c \\ -c \end{cases}$

Полюса $|f(z)|=0$ (внутри дока) при $z_2^* = \frac{i}{a}\left[1-\sqrt{1-a^2}\right]$ или $y_2^* = \frac{1}{a}\left[1-\sqrt{1-a^2}\right]$

При $a \to 0$ $y_2^* \cong \left(\frac{a}{2}\right) \to 0$, т.е. при $a \to 0$ $y_2^н < y_2^* < y_2^в$, полюс y_2^* попадает внутрь контура интегрир.

Escaneado con CamScanner

ADDRESS & TELEPHONE

$z_1' = iy_1'$ – прообраз „0" внутри

$\forall a < 1$ Address будет $y_2^a < y_2^b$. $a \in [0,1)$.

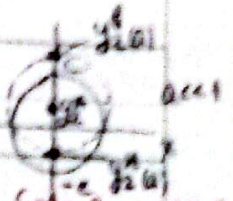
Тогда $y_2^a > y_2^b$ $\forall a < 1$, т.е. $\forall a < 1$ будет $y_1^a < y_2^a < y_2^b$ и точки z_2^a, z_2^b

В конце концов $|f(z)|^2 = 1$. E^3 от 22/II более верно.

При $a \to 1$: $y_2^b = \frac{1}{a}\left[1 - \sqrt{1-2ac-a^2}\right] = \frac{1}{a}\left[1 - \left\{1 - \frac{1}{2}(2ac+a^2) + \frac{1}{8}(2ac)^2\right\}\right] =$

$= \frac{1}{a}\left[ac + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2c^2\right] = c + \frac{a}{2}(1-c^2)$

$y_2^a = \frac{1}{a}\left[1 - \sqrt{1+2ac-a^2}\right] = y_2^b(-c) = -c + \frac{a}{2}(1-c^2)$



Сдвинутая „сова"

В контуре C': $x^2 + y^2 - ay(1+x^2+y^2) = c^2$, $a<1$.

Для $a<1$ $x^2+y^2 \approx c^2$, а $c^2 \ll 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - ay = c^2$ или

$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = c^2 - \frac{a^2}{4} \approx c^2$ – контур окружности с центром $y = \frac{a}{2}$, $x = 0$,

выдвинутая на $(a/2)$ вдоль Oy.

Далее точно в аналогии по „a" итерационным пр-е „совы" функции:

Точка до „a^1": $x^2+y^2 - ay(1+\underbrace{x^2+y^2}_{\rho^2 \text{ при } a=0}) = c^2$, $x^2+y^2 - ay(1+c^2) = c^2$

$x^2 + \left[y - \frac{a}{2}(1+c^2)\right]^2 = c^2$. Сдвиг вдоль Oy $= \frac{a}{2}(1+c^2)$.

Точка до „a^2": $\frac{a^2}{4}(1+c^4) - \frac{1}{2}a^2(x^2-y^2) + x^2+y^2 - ay\left[1+x^2+y^2\right] = c^2$

$(x^2+y^2)_{\text{кон. „a"}} = c^2 + ay(1+c^2)$, $\Rightarrow \frac{a^2}{4}(1+c^4) - \frac{1}{2}a^2(c^2-2y^2) + x^2+y^2 -$

$(x^2+y^2)_{y=0} = c^2$

$- ay\left[1 + c^2 + ay(1+c^2)\right] = c^2$

$x^2 + (1+a^2)y^2 - ay(1+c^2) - a^2y^2(1+c^2) = c^2 + \frac{1}{2}a^2c^2 - \frac{a^2}{4}(1+c^4)$

$x^2 + \left[1 - a^2c^2\right]y^2 - a(1+c^2)y = c^2 - \frac{a^2}{4}(1-c^2)^2$

Это сдвинутый Эллипс, т.к. коэф. и/м x^2 и y^2 разные.

На вопрос „Где Эллипс „совы" вытянут вдоль Oy (?). – Проверить.

Построим в MCAD C': (в полярных координатах)

$$\frac{a^2}{4}(1+\rho^4) - \frac{1}{2}a^2\rho^2\cos 2\varphi + \rho^2 - a\rho\sin\varphi\left[1+\rho^2\right] = c^2$$

– Кривая границы „совы" точно

$z' \to z + \frac{a}{2i}(1-z^2)$. Точке $z = 0(0)$ соотв. т. $z' = -\frac{i}{2}a\,(a)$

При $z = i$, соотв. т. $z' = i + \frac{a}{2i}(1+1) = i - ia = i(1-a)$

$z = -i \to z' = -i - ia$

$z = \pm 1$ соотв. т. $z' = \pm 1$ – неподвижн. точки

$z = e^{\pm i\pi/4}$ соотв. $z' = e^{\pm i\pi/4} + \frac{a}{2i}(1 - e^{\pm i\pi/2}) = e^{\pm i\pi/4} \pm \frac{a}{2}(\mp 1 - i)$

– неподвижные границы „совы" $|f(z)|^2 = 1$

При с.м. Очевидно, что сдвиг границы „совы" и границы диска происходит в разные стороны. → см.



Граница диска $|z|=1$ после conf mapping $z \to z'$

Escaneado con CamScanner

ADDRESS & TELEPHONE

Name/Company	Phone	Address
Да, но граница дома $z'(x',y')$, а граница «солнца» есть $\|z'(x,y)\|^2 = c^2$, т.е. в xy-плоскости.		после mapping нарисована в плоскости $\|z\|^2 = c^2$ после mapping $z \to z'$ $\|z'\|^2 = c^2$ Их нельзя сравнивать.

Escaneado con CamScanner

ADDRESS & TELEPHONE

Name/Company | Phone | Address

(Продолжение расчета 19/II)

Задача. Часовая сс. моды ($k_x=0$, $m=0$) rectangular dot сводится к

$$\lambda_z m_z(y) = \int_{-L_2}^{L_2} dy'\, g_{zz}(yy')\, m_z(y'), \quad \lambda_x m_x(y) = \int dy\, g_{xx}(yy')\, m_x(y')$$

аналогично СЗ λ_z и λ_x, а также СФ $m_z^{(n)}(y)$ и $m_x^{(n)}(y)$.

$$\frac{\omega_{mn}^2}{\omega_M^2} = \left[\omega_H + H_{mn}^{mn} - \frac{\lambda_z}{4\pi}\right]\left[\omega_H + H_{mn}^{mn} - \frac{\lambda_x}{4\pi}\right]$$ – для rectang dot (см. обозначения)

Тогда как для wires было (см. 11/II ст.) $\lambda_z + \lambda_x = -4\pi$ и $H_d^y = 0$ и $\left(\frac{\omega_m}{\omega_M}\right)^2 = \left[\omega_H - \frac{\lambda_z^m}{4\pi}\right]\left[\omega_H + 1 + \frac{\lambda_z^m}{4\pi}\right]$

H_{mn}^{mn} или $m=0$ вычисляли на каких СФ? g_{xx} или g_{zz}?

Ур. Л.Л. (*) $\hat{N}\vec{m} = i\omega\hat{T}\vec{m} - \gamma H_d \hat{I}\vec{m} + M_s\gamma\int d^2\vec{\rho}'\, \hat{G}(\vec{\rho},\vec{\rho}')\vec{m}(\vec{\rho}')$, $\vec{m} = \begin{pmatrix} m_x \\ m_z \end{pmatrix}$

$\hat{N} = D\hat{I}$, $D = \gamma(H - 4\pi M_s\nabla^2)$, обмен пока вообще рассеиваем.

Для основной моды $k_x = 0$ зависимости $\vec{m}(\vec{\rho}) = \vec{m}(x,y)$ от x нет, $\langle\ldots\rangle_x$.

$\langle\hat{G}(\vec{\rho},\vec{\rho}')\rangle_x = \frac{1}{w}\int_{-w/2}^{w/2} dx \int_{-w/2}^{w/2} dx'\, \hat{G}(\vec{\rho},\vec{\rho}') = \hat{g}(y,y')$, $\langle H_d^y\rangle_x = H_d^y(y)$. УД усред. ним по x:

$i\omega\hat{T}\vec{m}\rangle_x = \gamma(H + H_d)\hat{I}\vec{m} - M_s\gamma\int dy'\,\hat{g}(yy')\langle\vec{m}(\vec{\rho}')\rangle_x$, см. 7/II 99г.

$\langle H_d(\vec{\rho})\vec{m}\rangle_x = \langle H_d^y(\vec{\rho})\rangle_x \vec{m}(y)$, $\langle\ldots\rangle_x = \frac{1}{w}\int_{-w/2}^{w/2} dx(\ldots)$

т.к. $\vec{m}$ от x не зависит для осн. моды

(*) $\frac{i\omega}{\gamma}\hat{T}\vec{m}(y) = \left[H + H_d(y)\right]\hat{I}\vec{m}(y) - M_s\int dy'\,\hat{g}(yy')\vec{m}(y')$ или с $\vec{m} = \begin{pmatrix} m_x \\ m_z \end{pmatrix}$

$$\frac{i\omega}{\gamma} m_x(y) = \left[H + H_d(y)\right] m_z(y) - M_s\int dy'\, g_{zz}(yy')\, m_z(y')$$

$$-\frac{i\omega}{\gamma} m_z(y) = \left[H + H_d(y)\right] m_x - M_s\int dy' g_{xx}(yy') m_x(y')$$

– ур. Л.Л. для основной моды ($k_x=0$) rectan. dot

Если мы нашли СФ и СЗ линейного оператора: $\int_{-L_2}^{L_2} dy'\, g_{zz}(yy')\, m_z^n(y') = \lambda_z^n m_z^n(y)$ и

$\int dy' g_{xx}(yy') m_x^n(y') = \lambda_x^n m_x^n(y)$,

где n – в λ_z^n и λ_x^n вообще-то разные и $= n_z$ и n_x, то

$m_x(y) = \sum_{n_x} \Lambda_x^{n_x} m_x^{n_x}(y)$ и $m_z(y) = \sum_{n_z} \Lambda_z^{n_z} m_z^{n_z}(y)$, $\langle n_x|n_x'\rangle = \delta_{nn'}$

$|n_x\rangle$ $\quad$ $|n_z\rangle$ $\quad$ $\langle n_z|n_z'\rangle = \delta_{nn'}$

Тогда если бы

бы

Вообще-то общие формулы из PRB SW - Eq. (21), (22), если СФ от g_{xx} и g_{zz} были бы одинаковые (например, cos $\frac{\pi y}{L_2}$).

Это не так, СФ вообще-то разные и одинаковыми могут оказаться по точкам, причем (например в силу способа решения интегральных ур-ий),

ADDRESS & TELEPHONE

Name/Company | Phone | Address

$m_{x,z}(y) = \sum_n \Lambda^n_{x,z} |n\rangle_y$ ($n_{x,z}$)

→ Разложим СФ $m^n_x(y)$ и $m^n_z(y)$ в обычном случае это ортогональный в пользу использования единой разложной системы орт. Соб. функций как в статье Калиникос-Славин'86. Если СФ одинаковы

Если одинаковые СФ $m_z(y)$ и $m_x(y)$:

$$\frac{i\omega}{\gamma}\sum_n \Lambda^n_x |n\rangle = (H+H_d)\sum_n \Lambda^n_z |n\rangle - M_s \int dy' g_{zz}(yy') \sum_n \Lambda^n_z |n\rangle_{y'}$$

$$-\frac{i\omega}{\gamma}\sum_n \Lambda^n_z |n\rangle = (H+H_d)\sum_n \Lambda^n_x |n\rangle - M_s \int dy' g_{xx}(yy') \sum_n \Lambda^n_x |n\rangle_{y'}$$

Для одинаковых СФ $|n^x\rangle = |n^z\rangle = n$ индексы x,z в $\Lambda^n_{x,z}$ нельзя опустить.

(*)
$$\begin{cases} \frac{i\omega}{\gamma}\sum_n \Lambda^n_x |n\rangle = H^{ef}\sum_n \Lambda^n_z |n\rangle - M_s \sum_n \Lambda^n_z \lambda^n_z |n\rangle \\ -\frac{i\omega}{\gamma}\sum_n \Lambda^n_z |n\rangle = H^{ef}\sum_n \Lambda^n_x |n\rangle - M_s \sum_n \Lambda^n_x \lambda^n_x |n\rangle \end{cases}, \quad \Lambda^n_\alpha - \text{SW-амплитуды}$$

$$\begin{cases} \frac{i\omega}{\gamma}\Lambda^n_x = H^{ef}\Lambda^n_z - M_s \Lambda^n_z \lambda^n_z \\ -\frac{i\omega}{\gamma}\Lambda^n_z = H^{ef}\Lambda^n_x - M_s \Lambda^n_x \lambda^n_x \end{cases} \to \begin{pmatrix} \frac{i\omega}{\gamma} & -H^{ef}+M_s\lambda^n_z \\ -H^{ef}+M_s\lambda^n_x & -\frac{i\omega}{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda^n_x \\ \Lambda^n_z \end{pmatrix} = 0$$

$$\det R(\omega) = \det(\ldots) = \frac{\omega^2}{\gamma^2} - (-H^{ef}+M_s\lambda^n_z)(-H^{ef}+M_s\lambda^n_x) = 0$$

$$\frac{1}{\gamma^2}\omega_n^2 = (H^{ef}-M_s\lambda^n_z)(H^{ef}-M_s\lambda^n_x), \quad \omega_M = \gamma\cdot 4\pi M_s, \quad H_{ef} = H^{ef} = H + H_d(y)$$

→ было бы так просто, но H_d зависит от y''.

Поэтому в (*) надо $\cdot\langle n'|$ скалярно.

$$\begin{cases} \frac{i\omega}{\gamma}\sum_n \Lambda^n_x \langle n'|n\rangle = \sum_n \Lambda^n_z \langle n'|H^{ef}|n\rangle - M_s \sum_n \Lambda^n_z \lambda^n_z \langle n'|n\rangle \\ -\frac{i\omega}{\gamma}\sum_n \Lambda^n_z \langle n'|n\rangle = \sum_n \Lambda^n_x \langle n'|H^{ef}|n\rangle - M_s \sum_n \Lambda^n_x \lambda^n_x \langle n'|n\rangle \end{cases}, \quad \langle n'|n\rangle = \delta_{nn'}$$

(v)
$$\begin{cases} \frac{i\omega}{\gamma}\Lambda^{n'}_x = \sum_n \Lambda^n_z \langle n'|H^{ef}|n\rangle - M_s \lambda^{n'}_z \Lambda^{n'}_z \\ -\frac{i\omega}{\gamma}\Lambda^{n'}_z = \sum_n \Lambda^n_x \langle n'|H^{ef}|n\rangle - M_s \lambda^{n'}_x \Lambda^{n'}_x \end{cases}$$

$H_{ex} = -4\pi M_s \alpha^2$ можно добавить

$$\langle n'|H^{ef}|n\rangle = \int dy\, H^{ef}(y)\, m^{n'*}(y)\, m^n(y), \quad H^{ef}(y) = H + H_d(y) + H_{ex}(y)$$

Теперь либо $H_d(y) \to \langle H_d(y)\rangle_y$ либо оставить (отложенную) в (v) только диаг. элементы $\langle n'|H_d|n\rangle$, т.е. $\langle n'|H_d|n\rangle = \langle n|H_d|n\rangle \delta_{nn'} = H_d^{nn}\delta_{nn'}$

ADDRESS & TELEPHONE
Phone
Address
Company

В последнем случае:

$$\left.\begin{aligned} \frac{i\omega}{\gamma}\Lambda_x^n &= \Lambda_z^n H_{0y}^{nn} - M_s \lambda_z^n \Lambda_z^n \\ -\frac{i\omega}{\gamma}\Lambda_z^n &= \Lambda_x^n H_{0y}^{nn} - M_s \lambda_x^n \Lambda_x^n \end{aligned}\right\} \to \frac{\omega_n^2}{\gamma^2} = \left[H_{0y}^{nn} - M_s \lambda_z^n\right]\left[H_{0y}^{nn} - M_s \lambda_x^n\right]$$

Умножив это ур. с на $\frac{1}{(4\pi M_s)^2}$ получим ($\frac{1}{4\pi M_s} H_d^{nn} \to H_d^{nn}$):

$$\frac{\omega_n^2}{\omega_M^2} = \left[\frac{\omega_H}{\omega_M} + H_d^{nn} - \frac{1}{4\pi}\lambda_z^n\right]\left[\frac{\omega_H}{\omega_M} + H_d^{nn} - \frac{1}{4\pi}\lambda_x^n\right], \text{ где уже}$$

$$H_d^{nn} = \frac{1}{4\pi M_s}\langle n|H_d|n\rangle = \frac{1}{4\pi M_s}\int dy\; H_d(y)\, m^{n*}(y)\, m^n(y)$$

Нормировка СФ: а) магн. $m^n(y) \sim \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} y\right)$, $y \in \left[-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right]$

б) маг. $m^n(y) \sim \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} y\right)$

1) $\langle n|n'\rangle = A_n \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dy\, A_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} y\right)\sin\left(\frac{n'\pi}{\ell} y\right) = |\dots|$ — такие плохо,

надо чтоб в задачах PRB брали $m^n(y) = a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} y\right)$, $y \in [0, \ell]$, $n = 0, 1, 2, \dots$

тогда $\left.\frac{\partial m^n}{\partial y}\right|_{0,\ell} = -a_n \frac{\pi n}{\ell}\sin\left(\frac{\pi n}{\ell} y\right)\Big|_{y=0,\ell} = 0$, т.е. $\left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial n}\right)_s = 0$ выполняется.

Надо $\langle n|n'\rangle = \int_0^\ell dy\, m^n(y)\, m^{n'}(y) = a_n a_{n'}\int_0^\ell dy \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} y\right)\cos\left(\frac{\pi n'}{\ell} y\right) =$

$= a_n a_{n'}\frac{1}{2}\int_0^\ell dy\left[\cos\left\{(n-n')\frac{\pi}{\ell} y\right\} + \cos\left\{(n+n')\frac{\pi y}{\ell}\right\}\right] = \frac{1}{2} a_n a_{n'} \times$

$\times\left[\frac{\ell}{\pi(n-n')}\sin\left\{(n-n')\frac{\pi y}{\ell}\right\} + \frac{\ell}{\pi(n+n')}\sin\left\{(n+n')\frac{\pi y}{\ell}\right\}\right]_0^\ell = \left|\text{если } \substack{n,n'>0 \\ n+n'>0}\right| =$

$= \frac{1}{2} a_n a_{n'}\frac{\ell}{\pi(n-n')}\sin\{(n-n')\pi\} = \frac{\ell}{2} a_n^2 \delta_{nn'} = \delta_{nn'}$ по ортогон. откуда $a_n^2 = \frac{2}{\ell}$

Если $n = n' = 0$, то $\langle 0|0\rangle = a_0^2\int_0^\ell dy = a_0^2 \ell = 1$, $a_0^2 = \frac{1}{\ell}$. $a_n^2 = \frac{1}{\ell}(2 - \delta_{n0})$

По этому $|n\rangle = a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} y\right) = \frac{1}{\sqrt{\ell}}\sqrt{2-\delta_{n0}}\cos\left(\frac{\pi n}{\ell} y\right)$ — нормир. на 1.

$|n\rangle = m^n(y)$

Или $\epsilon_n = \begin{cases} 1, n=0 \\ 2, n>0 \end{cases}$ (число колебаний): $|n\rangle = \sqrt{\frac{\epsilon_n}{\ell}}\cos\left(\frac{\pi n}{\ell} y\right)$, $y \in [0, \ell]$. — нормир. СФ

Escaneado con CamScanner

ADDRESS & TELEPHONE

SW rectan. dot. Матрица. Элементы H_d^y.

Name/Company	Phone	Address

12/V отр. Надо найти матричные элементы от $H_d^y(x,y)$ rectan. dot на $u_{mn}(\vec{\rho}) = M_s \cos q_m x \cdot \cos q_n y$, где $q_m = \frac{m\pi}{w}$, $q_n = \frac{n\pi}{l}$, $l \parallel Oy \parallel \vec{M}_0$, w - ширина зона.

t - между - на время тогда и подмагничивание сходится.

Согласно 29/III отр. $H_d^y(x,y) = M_s^y \int_{-w/2}^{w/2} dx' g_{yy}(xy, x')$

$\rightarrow g_{yy}(x,y;x') = \frac{2}{L}\left[\frac{(y-y')}{\Delta^2}\left(\Delta - \sqrt{L^2+\Delta^2}\right)\right]_{y'=-l/2}^{y'=l/2}$ $\Delta^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2$

$H_{mno}^{m'n'o} = \frac{L}{(4\pi M_s A_{mno})} \int dx dy\, u_{mn}(\vec{\rho})\, u^*_{m'n'}(\rho)\, H_d^y(x,y)$,

$u_{mn}(\vec{\rho}) = M_s \cos q_m x \cdot \cos q_n y$, $A_{mno} = A_{mn} = \frac{1}{4} V_d M_s^2 \varepsilon_m \varepsilon_n$, $\varepsilon_m = 1$ или 2 (сим.)

$H_{mn}^{m'n'} = \frac{L \cdot M_s^2}{\pi M_s \cdot \frac{1}{\chi} wl L M_s^2 \varepsilon_m \varepsilon_n} \int dx dy \cos q_m x \cdot \cos q_n y \cdot \cos q_{m'} x \cos q_{n'} y \cdot$

$\cdot M_s \cdot \int dx' \frac{2}{L}[\dots]_{y'=-l/2}^{y'=l/2} = \frac{1}{\pi w l \varepsilon_m \varepsilon_n} \int dx dy \cos q_m x \cdot \cos q_n y \times$

$\times \cos q_{m'} x \cdot \cos q_{n'} y \left(\frac{2}{L}\right) \int_{-w/2}^{w/2} dx' [\dots]_{y'=-l/2}^{y'=l/2}$.

Диаг. $H_{mn}^{mn} = \frac{1}{\pi w l \varepsilon_m \varepsilon_n} \int dx \int dy \cos^2 q_m x \cos^2 q_n y \left(\frac{2}{L}\right) \int dx' [\dots]_{y'=-l/2}^{y'=l/2}$

Чтобы $\left(\frac{\partial u_{mn}}{\partial n}\right) = 0$ на краях зона надо сместить координаты $x \in [0, w]$, $y \in [0, l]$

$p = \frac{L}{w}$, $u = \frac{l}{w}$. $\int \frac{dx'}{L} = \frac{w}{L} \int \frac{dx'}{w} \rightarrow \frac{1}{p} \int dx'$

$H_{mn}^{mn} = \frac{2}{\pi p \varepsilon_m \varepsilon_n} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \cos^2(\pi m x) \cos^2(\pi n y) \int_0^1 dx' \left[\frac{(y-y')u}{\Delta^2}\left(\Delta - \sqrt{p^2+\Delta^2}\right)\right]_{y'=0}^{y'=1}$

где уже $\Delta^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 u^2$.

$\frac{1}{(4\pi M_s)} H_d^y(x,y) = \frac{1}{4\pi} w \int_{-1/2}^{1/2} dx' \left(\frac{2}{L}\right)\left[\frac{(y-y')u}{\Delta^2}\left(\Delta - \sqrt{p^2+\Delta^2}\right)\right]_{y'=-1/2}^{y'=1/2}$ - в ам. Гауссе

$\frac{1}{(4\pi M_s)} H_d^y(x,y) = \frac{1}{2\pi} \frac{u}{p} \int_{-1/2}^{1/2} dx' \left[\frac{(y-y')}{\Delta^2}\left(\Delta - \sqrt{p^2+\Delta^2}\right)\right]_{y'=-1/2}^{y'=1/2}$

Но нужно $H_d^y(x,y)$ (Описано по ф. Joseph - Schlömann

Escaneado con CamScanner

Name/Company	Phone	Address

$\Delta - \sqrt{\rho^2+\Delta^2} = \frac{\Delta^2 - (\sqrt{\ })^2}{\Delta + \sqrt{\rho^2+\Delta^2}} = \frac{-\rho^2}{\Delta + \sqrt{\rho^2+\Delta^2}}$.

По $\frac{\rho}{\Delta}$ разлагается ряд, т.к. $\Delta = 0$ имеет вид.

$\rho = 0$ в приближении приведет к нахождению ~ $\rho \ln \rho$

в разложении H^{mn}_{mn}

Escaneado con CamScanner