March - July 2004

Exercise (Ch. 4 p.3: Sit rectangular dot) (Eigenvalues for Δ/k)

(Infinite square well potential, $V=0$ for $0<x<a$, $V=\infty$ for $x\le 0$ or $x\ge a$)

Find the energy eigenvalues and eigenfunctions.

Solution: Inside the well, $V=0$, so the Schrödinger equation is

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

or

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

The general solution is

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx$$

Since $\psi = 0$ at $x = 0$, we have $B = 0$. Since $\psi = 0$ at $x = a$, we have $\sin ka = 0$, so

$$ka = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Thus the allowed energies are

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

The normalized eigenfunctions are

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

Note that $n = 0$ is excluded, since it would give $\psi = 0$ everywhere, which is not a physically acceptable state. Also, n and $-n$ are not independent, since they give the same ψ except for an unimportant minus sign.

Thus the allowed energies are $E_1, E_2, E_3, \ldots$, and the corresponding eigenfunctions are $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$. The ground state is ψ_1, the first excited state is ψ_2, and so on.

Escaneado con CamScanner

Date. . . Согласно расчету СФС3 от 22/XII 00 г.

$\lambda_z^n = \int_{-1}^{1} dy\, g_{zz}(y) \cos(\pi n y)$, $\lambda_x^n = \int_{-1}^{1} dy\, g_{xx}(y) \cos(\pi n y)$, $y \in [-\frac{1}{2}$

$H_d^{nn} = \frac{2}{(4\pi M_s)} \int_{-1/2}^{1/2} dy\, H_d^y(y) \cos^2\left(\pi n y + \frac{1}{2}\pi n\right)$, $H_d(y) = -M_s \langle N_{yy}(y)$

$\lambda_z + \lambda_x \neq -4\pi$ и заметно отличается от -4π.

Файл Hdip – rectan. mcd. Рассчитаем ω_n.

1Х 1,75 мм, L = 35 мм

n	0	1	2	3
$\frac{\omega_0}{\omega_M}$	0,287	0,238	0,231	0,224

6/III Ездил в Japan Embassy. Письма Косте и Андрею. MCAD-расчет

7/III Продолжение расчета SW – rectan. dot. MCAD не загружается. Письмо в Jap. пос. и Res. plan для Дорго. Гр. R. Stamps.

Матрица эл-тов H_d^{nn} : $H_d^{00} = -0,027$; $H_d^{11} = -0,046$; $H_d^{22} = -0,0$

n	0	1	2	3
$-\frac{1}{4\pi}\lambda_x^n$	0,053	0,047	0,041	0,037
$-\frac{1}{4\pi}\lambda_z^n$	0,939	0,926	0,902	0,880

Escaneado con CamScanner

Date. 8 · 03. Vortex с Новосиб... (решетка "rigid" vortices в сег. поле)

Расчет H_{an}, H_e, H_m для решетки (+ ферромагнетик) взаимодействующих доменов.

Общая формула W_m — см. например, 13/I 2000 г. и 8-12/III 2000 г.

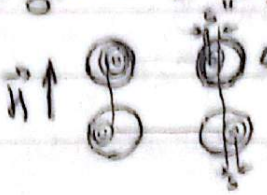
Задано $\vec{M}(r^2)$ для patterned film. $M(r^2)$ внутри каждого домена из всех направлений. Будем считать, что $\vec{M}(r^2)$, $r \in V_d$ — есть стационарное поле $\vec{H}$ внутри, без изменения его формы. Т.е. расч. "rigid" vortex модель для решетки доменов.

Согласно 13/I магнитостат. энергия на ед. объема пленки:

$$W_m = 2\pi \sum_k^* \frac{f(kL)}{k^2} \left|(\vec{k}\cdot\vec{M}_k)\right|^2 + 2\pi \sum_k^* \left[1 - f(kL)\right] |M_k^z|^2, \quad \vec{k} \in 2D\text{-обратной решетке}$$

$$\vec{M}_k = \frac{1}{S_0} \int_{S_0} d^2\rho\, \vec{M}(\vec{\rho}) e^{i\vec{k}\vec{\rho}}, \text{ предполагаем } \vec{M}(r^2) \text{ не зависит от } z.$$

S_0 — площадь элем. ячейки решетки доменов.



Вопрос: если предполагается, что во всех доменах в некоторой решетке Новосиб одинаковы и смещение "core" в каждом домене есть "s", будут ли $\vec{s}$ одинаковы во всех доменах? Или interdot magn. coupling приведет к AF-типа структуре $\vec{s}_n$?

→ 13-14/VI я мало разобрался с квадратной решеткой. Энергия всех доменов в квадратной по "s" приближении. Итог т. coupling сведен к замене $a(\beta, R) \to a'(\beta, R, d)$ или $F_1(\beta) \to F_1(\beta, d/R)$. Предполагался $\langle \vec{M} \rangle_{V_d}$ в F-фазе $\| \vec{H}$, получено аналитическое выражение восприимчивости $\chi_{int} = \frac{1}{2a'}$.

В MFA-приближении $H \to H + \lambda \langle M \rangle_{V_d}$, $\chi_{int} = \frac{\chi_{is}}{1 - \lambda \chi_{is}}$, $\lambda = 4\pi \left[F_1(\beta) - F_1(\beta, \frac{d}{R})\right] > 0$

λ быстро падает с $\frac{d}{R}$, вклад от M^z "core" в энергию.

Для треугольной решетки сложнее — надо сам ОЛН и короткой оси ячейки? Далее для квадрат. решетки нельзя ли сделать AF-расположение $\vec{s}_n$ не повышало W_m?

13/VI сделано для одного домена на ячейку (F-фаза):

$$\left(\vec{k}\cdot\vec{M}_k\right) = 2\pi M_s \frac{s}{(T^2)} \frac{1}{k} J_1(kR) \sin(\varphi_s - \varphi_k), \quad \varphi_s$$ - полар. угол $\vec{s}$ - смещения

$\vec{H}(r^2)$ дома можно характеризовать двумерным $\langle \vec{M} \rangle_{V_d}$ и квадруп. моментом $\hat{Q}$.

$$W_m^{int} = \left(\frac{dip}{dip}\right) + \left(\frac{?\,quadrupole}{quadr.\ comp.}\right) \sim \hat{Q}^2$$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

Но для shifted vortex $\langle M \rangle_{V_d} \sim s$, $\hat{Q} \sim s^2$, поэтому в кв по s^2 приближении $W_m^{int} = \left(\begin{matrix} dip-dip \\ вклад \end{matrix}\right) \sim \langle \vec{M} \rangle_{V_d}^2 \sim s^2$ всеми недиагональными членами, кроме $\langle \vec{M} \rangle_{V_d}$, можно пренебречь. И дело не в величине d/R - interdot distance, а в $\frac{s}{R} \ll 1$, т.е. малости $\frac{H}{M_s}$.

$\langle \vec{M} \rangle_{V_d} = (\langle M_x \rangle, \langle M_y \rangle) = \left(\frac{s}{R}\right) M_s (\sin\varphi_s, -\cos\varphi_s)$ как 10/IV 002.

Или подсчет $W_H \sim -\vec{M}\vec{H}$, $\vec{H}$ вплоск. M_z - ими не играет.

Или подсчет W_m - решетки доов и $s \ll R$ вкладом M^2 "core" можно в первом приближении пренебречь.

$$W_m (из-за\ M_z) = W_m^z (s=0) + \frac{1}{2} W_s^{z''} s^2$$

Сможет быть анизотропной

Однако $W_s^{z''} \ll$ других, поверхностных, вкладов в коэф. при s^2.

$\varphi_s = \varphi_H \pm \frac{\pi}{2}$, $\sin\varphi_s = \sin(\varphi_H \pm \frac{\pi}{2}) = \pm\cos\varphi_H$, $\cos\varphi_s = \cos(\varphi_H \pm \frac{\pi}{2}) = \mp \sin\varphi_H$

$(s/R) \to s$. $\langle \vec{M} \rangle_{V_d} = s M_s (\pm\cos\varphi_H, \pm\sin\varphi_H) \to \langle \vec{M} \rangle_{V_d} = s M_s (\cos\varphi_H, \sin\varphi_H) = s M_s \frac{\vec{H}}{H}$.

- все другие знаки увеличат W_H.

$$\frac{1}{V_d M_s^2} W_m = 2\pi \sum_{\vec{k}} \frac{f(kL)}{k^2} \left| (\vec{k}\cdot\vec{M}_{\vec{k}}) \right|^2 \cdot \left(\frac{V_{gr.}}{V_d}\right) = 2\pi \left(\frac{V_{gr.}}{V_d}\right) \sum_{\vec{k}} f(kL) \times$$

$$\times \left[2\pi \frac{s}{S_0} \frac{1}{k} J_1(kR) \sin(\varphi_s - \varphi_{\vec{k}}) \right]^2 = 2\pi \left(\frac{S_0}{\pi R^2}\right) \sum_{\vec{k}} f(kL)\, 4\pi^2 \frac{s^2}{S_0^2} \frac{J_1^2(kR)}{k^2} \sin^2(\varphi_s - \varphi_{\vec{k}})$$

$$= 8\pi^2 \left(\frac{s}{R}\right)^2 \frac{1}{S_0} \sum_{\vec{k}} f(kL) \frac{J_1^2(kR)}{k^2} \sin^2(\varphi_s - \varphi_{\vec{k}})$$

Немного более общее вар-т чем 13/IV 002., но один дог на ячейку

$$\sum_{\vec{k}} F(k) \sin^2(\varphi_s - \varphi_{\vec{k}}) = \sum_{\vec{k}} F(k) \left[\sin^2\varphi_{\vec{k}} \cos^2\varphi_s + \cos^2\varphi_{\vec{k}} \sin^2\varphi_s \right] = \left| \begin{matrix} \text{сим. отн.} \\ \varphi_{\vec{k}} \to -\varphi_{\vec{k}} \\ \varphi_{\vec{k}} \to \pi - \varphi_{\vec{k}} \end{matrix} \right| =$$

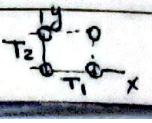
$$= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} F(k) \left[1 - \cos 2\varphi_s \cos 2\varphi_{\vec{k}} \right], \quad \sum_k F(k) \cos 2\varphi_{\vec{k}} = 0 \text{ для кв. решетки, но } \neq 0 \text{ для четырехуг.}$$

$\cos 2\varphi_s = \cos 2(\varphi_H \pm \frac{\pi}{2}) = \cos(2\varphi_H \pm \pi) = \cos 2\varphi_H \cos(\pm\pi) = -\cos 2\varphi_H$.

направление φ_s в $\varphi_s = \varphi_H \pm \pi/2$, $\vec{s} \perp \vec{H}$ роли не играет.

$$\frac{1}{V_d M_s^2} W_m = 4\pi^2 s^2 \frac{1}{S_0} \sum_{\vec{k}} f(kL) \frac{J_1^2(kR)}{k^2} \left[1 + \cos 2\varphi_H \cos 2\varphi_{\vec{k}} \right]$$

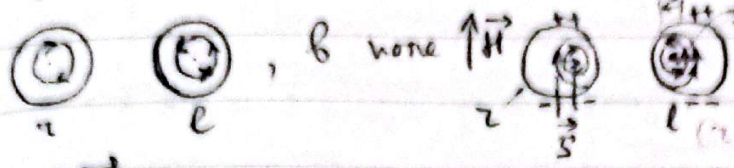
$$-\sum_{\vec{k}} F(k) \cos 2\varphi_{\vec{k}} = \left\{ \begin{matrix} <0, & T_1 > T_2 \\ >0, & T_2 > T_1 \end{matrix} \right\}$$



Escaneado con CamScanner

Date. . .

Про направление вращения $\vec{M}(\vec{r})$ - забыл: на и вдоль оси (ряд1) (ряд2)



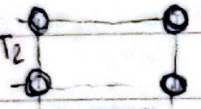
При $\vec{H}\parallel Oy$ r-dots смещают центр vortex вправо, а l-dots влево. В таком случае расп. ток. зарядов ↑↓ и $\langle\vec{M}\rangle_{V_d}\parallel\vec{H}$.

→ Если в array все доты типа "r" или все типа "l", тогда приходится один дот на элем. ячейку и все просто.

Число "r" и "l" - dotov зависит от предыстории образца.

$$\sin^2\varphi_k\cos^2\varphi_s+\cos^2\varphi_k\sin^2\varphi_s=\left|\varphi_s=\varphi_H\pm\pi/2\right|=\sin^2\varphi_k\sin^2\varphi_H+\cos^2\varphi_k\cos^2\varphi_H=$$
$$=\sin^2\varphi_k(1-\cos^2\varphi_H)+\cos^2\varphi_k\cos^2\varphi_H=\sin^2\varphi_{\vec{k}}+\cos2\varphi_k\cos^2\varphi_H$$

$$\frac{1}{V_d M_s^2}W_m=\sum_{\vec{k}}F(k)\sin^2(\varphi_s-\varphi_{\vec{k}})=\sum_{\vec{k}}F(k)\sin^2\varphi_{\vec{k}}+\cos^2\varphi_H\sum_{\vec{k}}F(k)\cos2\varphi_{\vec{k}}$$



- для ветрогон. ячейки как в APL'99 $\sum_{\vec{k}}F(k)\cos2\varphi_{\vec{k}}>0$, ОПН$\parallel T_2$ ($cT_1>T_2$)

$$F(k)=8\pi^2S^2\frac{1}{S_0}f(kL)\frac{1}{k^2}J_1^2(kR),\quad S_0=T_1T_2.$$

$$w_m=\frac{1}{V_d M_s^2}W_m(\varphi_H)=\sum_{\vec{k}}F(k)\sin^2\varphi_{\vec{k}}+K_u\cos^2\varphi_H,\quad K_u=\sum_{\vec{k}}F(k)\cos2\varphi_{\vec{k}}>0.$$

$$\frac{1}{V_d M_s^2}W(s)=(s=0)+\frac{1}{V_d M_s^2}W_m(\varphi_H,s)-\langle\vec{M}\rangle_{V_d}\vec{H}\frac{1}{M_s^2}$$ — полная энергия рем. на ед. объема дота.

Но $\langle\vec{M}\rangle_{V_d}=sM_s\frac{\vec{H}}{H}$ и $W(s)=W(0)+W_m(\varphi_H,s)-sh$, $h=H/M_s$

$$W(s)=W(0)+As^2-sh,\quad A(\varphi_H)=\frac{8\pi^2}{S_0}\sum_{\vec{k}}\frac{f(kL)}{k^2}J_1^2(kR)\sin^2\varphi_k+$$
$$+\cos^2\varphi_H\frac{8\pi^2}{S_0}\sum_{\vec{k}}\frac{f(kL)}{k^2}J_1^2(kR)\cos2\varphi_k$$

Это как одномер. дота, только $a\to A(\varphi_H)$.

Термодин. решение $J_{int}=\frac{1}{2A(\varphi_H)}$. $H_{an}(s\approx1)=2M_sA(\varphi_H)$

Это как расчет кв. рем от 14/IV00г., только $A(\varphi_H)$ - анизотропно в силу анизотр. геометр. ремень.

$S_0=\frac{1}{2A}h.$

$\vec{H}$ вдоль изгибов доков, $\varphi_H=\pi/2$, $A(\pi/2)=\frac{8\pi^2}{S_0}\sum_{\vec{k}}\frac{f(kL)}{k^2}J_1^2(kR)\sin^2\varphi_{\vec{k}}$,

$k_x=\frac{2\pi}{T_1}n_1$, $k_y=\frac{2\pi}{T_2}n_2$, $S_0=T_1T_2$.

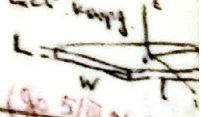
$\vec{H}$ Поперек изгибов (вдоль T_1, $\varphi_H=0$): $A(0)=\frac{8\pi^2}{S_0}\sum_{\vec{k}}\frac{f(kL)}{k^2}J_1^2(kR)\cos^2\varphi_{\vec{k}}$

Escaneado con CamScanner

SW - rectan. dots - обзор

Date. 09.03. SW rectan. dots and Wires

Единица нет карц



(Де 5/III 01г.)

Что вообще сделано по SW rectan. dots и вопрос. сущ. Wires:

99г. 1) 22/VI 99г. начал расчет SW:
-29/VI Общее выражение для магнитостат. ФГ, усреднение по толщине z" – в $\vec{k}$-представлении

Ур-е Л.-Л. Статич. задача и м. потенциал

Стандартный подход Камин.-Славина, СФ $m^{\alpha}_{mns} = M_s \cos q^m_x x \cdot \cos q^n_y y \cdot \cos$

где $q^m_x = \frac{m\pi}{w}$, $q^n_y = \frac{n\pi}{l}$, $q^s_z = \frac{s\pi}{L}$. Диаг. вектор SW на этих СФ.

$x \in [0,w]$, $y \in [0,l]$, $z \in [0,L]$ и $\frac{\partial \vec{m}}{\partial n} = 0$.

Вычисление матрич. элементов на основе дискрет. разложения Ф

Оценки стат. дипольных полей $H^{z,x}_d$ (неверные).

2) 1/VIII 99г. Дискрет. расчет матричных элементов ФГ (неверный).

3) 21/X – 7/XI 99г. Компоненты стат. дип. поля.

Усреднение ур. Л.-Л. и анализ дип. полей в нем. Прод

Расчет тестов wire в дискр. представлении (неверный).

Дискрет. расчет матрич. элементов ФГ.

Первые попытки расчета м. элементов в непрерывном представлении: через $K_0(x)$, $2\vec{k}$ и $3\vec{k}$ – методом. $\vec{q} \parallel$ ширине дока.

Усреднение ФГ по z" в непрерывном представлении и вычисление м. элемента от $(G_{yy}$ и G_{xx}, x-ширина дока. Вычисление м. эл. от G_{zz} в непрерывном представлении ФГ ($2\vec{k}$-представление). Проверка Bryant'93 и

4) 10/XI 99г. Показал, что для осн. моды wire $N_{yy} = 8p$ Славина получил откуда взялся, т.к. расчет дает $N_{yy} = -4p\,l_{wp} + 6p$ (N_{xx}) в 3 раза больше.

5) 2/XII 99г. ФГ в непрерывном $2\vec{k}$ представлении $\int dk\, d\varphi_{\vec{k}}$, $\varphi_{\vec{k}} = \pi$ и $\int dk$ можно взять.

6) 4/XII 99г. Сравнение дискрет. представления ФГ и м. эл. ФГ.

7) 26/XII – 28/XII 99г. Вывод ФГ для предельных случаев прямоуг. дока. СФ wire.

8) 31/XII Разные. факторы – средний по объему и в фод. сечении $y=0$ $\perp$ ф
Симметрия компонент стат. дипольного поля $H^{\alpha}_{\beta}(\vec{r})$.

Escaneado con CamScanner

Date. . .

(2001) 9) 2-12/I 2001. Непрерывное представление м. Floq. wire. Предел тонкого дна $\frac{t}{w} \to 0$ приводит непер. представление для мод с $m>0$. $W_{m=0}^{freq}$ сплошь белая. Предел $\frac{t}{w} \ll 1$ приводит к р-ю V.-Solym для по-волнам с фазой $q_m = \pi/w$

Сравнение диагр. и непрерыв. рассеяние полос W_m.

Отказ ф-ла для м. эл. ФГ (G_{zz}) имеющ. дна (t - конечно) в непер. пред. Сравнение на общем разных решений Анатоли и их предел при $P=\frac{t}{w} \ll 1$. "Бесконечная" дна.

Обсуждение ф-ла для м. эл. G_{xx} тестов. дна в непер. пред. и $\vec{q}$ || ширина дна w

10) 11-25/I 001.

Отказ от $\delta(k^2 \vec{k}(\dots))$ при вычислении м. эл. G_{xx} и G_{zz}. Координатное представление ФГ (с усреднением по z). Если отказ $H_d^y \to \langle H_d^y \rangle_{y_d}$, усреднив $H_d^y(x)$ [по y - будет дано ℓ уже усреднено, направление $\vec{\ell} \| Ox \times w$], то дан. тестов плохо совпадает с эксп. для 171,75 μm дна, но хорошо для 141,2 μm

Квантование ω-плоскости по схеме $k_y \to \frac{\pi m}{w}$, $k_y \to \frac{\pi n}{\ell}$, $\omega_{mn}^2 = \omega_H [\omega_H + F_{mn}]$ плохо для rect dot если H_d - состояние не входит.

Предел тонкого rect. дна $(t/w \to 0, t/\ell \to 0)$ $X_{mco}^{moo}(G_{xx}) = -f(q_m L)$, $Z_{mco}^{moo}(G_{zz}) = -1 + f(q_m L)$

$Y_{moo}^{moo}(G_{yy}) \equiv 0$ в главном приближении по $P=\frac{t}{w}$ — это совпадает с $P \to 0$ пределом для wire.

→ Вывод м. эл. G_{xx} и G_{zz} для $\vec{q}=(q_x, q_y)$ или $k_y \neq 0$ для rectan. dot в непрерывном представлении.

Посредством по формулам тестов Bryant'93 и Kalin-Shaw'86 (для ∞-плоскости) совпадают, $\vec{k}$ лежит в плоск. плоскости, $\vec{k}=(k_x, k_y)$.

В пределе $P \to 0$ → Тестовый SW в пределе тонкого дна $t/w \ll 1$, $t/\ell \ll 1$ ω_{mn} получены. Они совпад. с K.-Solym'96 (для ∞-плоскости) с квантованием $\vec{q}$ если положить $H_{mno}^{mno}=0$.

В пределе тонкого дна $H_{mno}^{mno}=0$ в главном приближении, поэтому Замечание: X_{mno}^{mno}, Z_{mno}^{mno} имеют в гл. пр. $\frac{t}{w} \to 0$ приближении, а $H_{mno}^{mno} \sim Y_{mno}^{mno}$ остаются более точно по непрерыв. представлению.

11) 30/I - 1/II 002.

Непрерывное $\sin q_m x$ - представление для Wire. Альтернативный способ вычисления Isolok на wires на основе $\sin q_m x$ и $\cos q_m x$ - под. (m - odd) (m - even) Метод интегральных под wires.

Непрерывное $\sin q_m x \sin q_n y$ - представление для rectan. dot.

→ Осуществлен этой программ, согласие с эксп. в $\cos q_m x \cos q_n y$ - базисе хорошее Test dot. Это включено в доклад Natal и ст. PRB. Согласие лучше чем непрер. подход. Согласие еще можно улучшить (в тысячу непрер раз), если $m=1,3$ описать $\sin q_m x$ - подобным.

Date.

12) 13/III 002. – 3/III 002.
Численная SW над wires. Постановка задачи о СФ, СЗ wire
Вариант, формулировка для СЗ wire и набор нужных СФ wire
$\sin \pi m x$ с $m=1,3,5$ и $\cos \pi m x$ с $m=0,2$, $x \in [0,\pi]$ хорошо опис. поведение
не на бок. модах удов. $\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial n}\right)_S = 0$ таки $x = x' + \frac{\pi}{2}$, $x' \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, то СФ $\cos \pi m x'$ - ...
Т.е. четны в центре, а СФ это невязки, что будет обосновано 22/III
Разложение бокса вектора дает $x=0 \Rightarrow \lambda_m(\rho)$ при $\rho \ll 1$, и
СФ $\cos(\pi m x) \to \lambda_m = \int_{-1/2}^{1/2} dy\, g(x) \cos(\pi m x)$, (СФ только четн. или нечет. ...
Это λ_m для $m \geq 1$ совпадает почти с 00-полями с квазиф. - пределом,
а λ_0 дает различ. фактор Сивина, т.е. тоже хорошо опис. эксп. (!)
Компоненты дин. поля $H_d^y(xy)$ и $\langle H_d^y(xy) \rangle_y$ в $2\vec{L}$ - представлении.
Свивина задача $g(x,x') = g(|x-x'|)$.

13) 15/III Диаграмма ФГ.
002. Дифференц. уравнения для СФ wire.

14) 25/VI - Схема объяснения эксп. Демонстрация для SW частей 00,
-26/VI 002.

15) 28-29/VI 002. SW в wires: СФ wires как функции Лежандра.

16) 5-24/VII 002. СФ, СЗ интегрального уравнения для wire.
5/VIII Вывод о $\sin \pi m x$, $x \in [0,1]$ два. хорошими СФ. Диаграмма нат. гр.
Дир. ур. на СФ, СЗ of wire. Представление СЗ через Фурье-обр. ...

17) 13-29/XII 002. Получение СФ, СЗ инт. уравнения SW-wire
методом Полякина.

18) 31/I - 3/II 012. Численные расчеты of H_y^y - дин. поля в
8/II rectan.dat и различ. факторов. Пределы $\rho \to 0$ и $l \to \infty$ (wire)

19) 10-15/II 012. Узел неоднородного по y – длина дает H_d^y для
расчета частот rectan.dat. SW с плавным пределом
диал. формулы $\rho \to 0$ с $H_d^{mn} \to H_d^y(y)$ [р. Келли. Сивин'86 с доп. ...
локализация основ. моды на краях $y = \pm l/2$ дает.
Компоненты ФГ в координат. представлении и дир. ур. на СФ(3
и задача

20) 24/II, 5/III 012. Уточнение УО rectan.dat. Вывод ур-я
для диэл. частот. Нормировка СФ. Попытка объяснить
основ. моду $\lambda \neq 1,75$ дает с плавным СФ $m_n(y)$, неоднородной
– длины дает.

Escaneado con CamScanner

Date. 10 • 03 •

Симметричные функции дают нулевой вклад в интеграл

$\left(\frac{\partial m_z}{\partial x}\right)_{x=0}=0$ в однородном, т.к. $\vec{m}\|Ox, Oy$ имеем $(\nabla\vec{m},\vec{n})_{x=0}=0=\left(\frac{\partial m_x}{\partial x}\right)_{x=0}=0$,

$\left(\frac{\partial m_y}{\partial y}\right)_{y=\frac{1}{2}}=0$, $\left(\frac{\partial m_z}{\partial z}\right)_{z=0}=0$. Но сначала $m_y=0$ (т.к. $m_0\|Oy$) и $m_z\neq f(z)$

Можем сделать такое предположение $\left(\frac{\partial m_x}{\partial x}\right)_{x=\frac{1}{2}}=0$

2D-ые волны ЦР: $\lambda_z m_z(x)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}dx' g_{zz}(xx')m_z(x')$, $\lambda_x m_x(x)=\int dx' g_{xx}(xx')m_x(x')$

(магн. диполь)

Т.к. $g_{xx}(xx')=-g_{zz}(xx')-4\pi\delta(x-x')$, $\lambda_x m_x(x)=-4\pi m_x(x)-\int dx' g_{zz}(xx')m_x(x')$

и $-(4\pi+\lambda_x)m_x(x)=\int dx' g_{zz}(xx')m_x(x')$ имеет вид $\lambda_z m_z(x)=\int dx' g_{zz}(xx')m_z(x')$

причем $\lambda_z=-4\pi-\lambda_x$. Следовательно, что волны $m_z(x)$ и $m_x(x)$ удовлетворяют одинаковым инт. ур. (с одинаковым ядром) и могут совпадать, могут отличаться.

Т.к. можно брать $\left(\frac{\partial m_z}{\partial x}\right)_{x=\frac{1}{2}}\neq 0$. Но это не обязательно $\frac{\partial m_z}{\partial x}=0$ может и не быть,

а вот $\frac{\partial m_x}{\partial x}=0$, потому $x=\frac{1}{2}$ – это обязательно.

3) Для частиц, дающих сферу, имеем $g_{xx}(\vec{SS'})+g_{yy}(\vec{SS'})+g_{zz}(\vec{SS'})=-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r'})$,

$\vec{r}=(x,y)$.

Далее для волн: $\lambda_z^{n_z}m_z^{n_z}(x)=\int dx' g_{zz}m_z^{n_z}(x')$, $\lambda_x^{n_x}m_x^{n_x}(x)=\int g_{xx}m_x(x')dx'$ и

$\omega_{n_x n_z}^2=\left[1-\frac{1}{4\pi}\lambda_z^{n_z}\right]\left[1-\frac{1}{4\pi}\lambda_x^{n_x}\right]$ – дай индексы у собств. значений.

(для волн $n_x=n_z$)

$m_z(x)=\sum_{n_z}\Lambda_{n_z}|n_z\rangle$ и $m_x(x)=\sum_{n_x}\Lambda_{n_x}|n_x\rangle$, $|n_x\rangle=\cos(\pi n_x x)$, $x\in[0,1]$

$|n_x\rangle=\begin{cases}\cos(\pi n_x x), n_x-\text{чет}, x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\\ \sin(\pi n_x x), n_x-\text{нечет}\end{cases}$, $\underset{\text{четн}}{|n_z\rangle}=\begin{cases}\cos(\pi n_z x), n_z-\text{четн.}\\ \sin(\pi n_z(x-\frac{1}{2})), n_z-\text{нечет}\end{cases}$ $x\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

$(\sin\pi n_z x)_{[0,1]}$ – тоже собственная с $|n_x\rangle$.

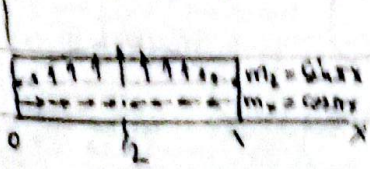
Чтобы ЦР не совпадали, то:

$\langle n_x|n_z\rangle=\int_0^1 dx\cos(\pi n_x x)\sin(\pi n_z x)=\frac{1}{2}\int dx\left[\sin\pi(n_x+n_z)x-\sin\pi(n_z-n_x)x\right]=$

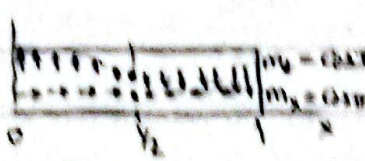
$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\pi(n_x+n_z)}\cos\pi(n_x+n_z)x+\frac{1}{\pi(n_x-n_z)}\cos\pi(n_x-n_z)x\right]_0^1=$

$=\frac{1}{2\pi}\left[(-1)^{n_x+n_z}-1\right]\left[\frac{1}{n_x-n_z}-\frac{1}{n_x+n_z}\right]=\frac{1}{\pi}\left[(-1)^{n_x+n_z}-1\right]\frac{n_z}{n_x^2-n_z^2}$, $n_x\neq n_z$.

Если $n_x=n_z$, то $\langle n_x|n_z\rangle=0$. И если n_x,n_z одной четности то $\langle n_x|n_z\rangle=0$.



Разные ЦР волны



Собств. ЦР волны

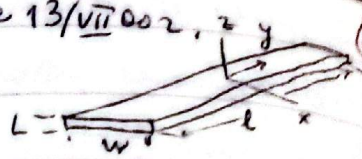
Значит, для волн $\omega_n^2=\left[1-\frac{\lambda_n^x}{4\pi}\right]\left[1-\frac{\lambda_n^z}{4\pi}\right]$, $\lambda_n^x+\lambda_n^z=-4\pi$

→ Данный факт для нахождения собственных функций SW excited by BLS

Escaneado con CamScanner

Date. 11 · 03.

СФ и СЗ wire. Диф. подход в дзюке 13/VIII 002.



Глав. уравнение $\nabla^2 \vec{h}_d = -4\pi \nabla(\nabla \cdot \vec{m})$

Если wire $(L_x \gg l, w)$, то от y $\vec{h}_d(x)$ и $\vec{m}(x)$ не зависят – все сечения zx равнозначны.

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) h_d^x(x,z) = -4\pi \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_z}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) h_d^z(x,z) = -4\pi \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_z}{\partial z}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$h_{d\,(xz)}^{\alpha} = \frac{1}{l}\int_{-l/2}^{l/2} dy\, h_d^{\alpha}(x,y,z)$$

$$m^{\alpha}(xz) = \frac{1}{l}\int_{-l/2}^{l/2} dy\, m^{\alpha}(x,y,z)$$

$$\vec{m} = (m_x, 0, m_z)$$

$$\vec{h}_d = (h_d^x, 0, h_d^z)$$

$$\begin{cases} h_d^x(xz) = \int dx' dz' \left[G_{xx}(xz, x'z') m_x(x'z') + G_{xz} m_z(x'z') \right] \\ h_d^z(xz) = \int dx' dz' \left[G_{zx}(xz, x'z') m_x(x'z') + G_{zz} m_z(x'z') \right] \end{cases}$$

СФ должны удовлетворять $h_d^{\alpha}(xz) = \int G_{\alpha\beta}(xz, x'z') m_\beta(x'z')\, dx' dz' \Rightarrow \sum_\beta \lambda_{\alpha\beta} m_\beta(xz) = \hat{\lambda}\begin{pmatrix} m_x \\ m_z \end{pmatrix} = (\ldots)$

$\hat{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zz} \end{pmatrix}$, $\lambda_{xz} = \lambda_{zx}$ и, видимо, $\mathrm{Sp}\,\lambda_{\alpha\alpha} = -4\pi \Rightarrow$ две независимых.

$$\begin{cases} \nabla^2 \sum_\beta \lambda_{x\beta} m_\beta = \lambda_{xx} \nabla^2 m_x + \lambda_{xz} \nabla^2 m_z = -4\pi \left(\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_z}{\partial x \partial z} \right) \\ \lambda_{zx} \nabla^2 m_x + \lambda_{zz} \nabla^2 m_z = -4\pi \left(\frac{\partial^2 m_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 m_z}{\partial z^2} \right) \end{cases}$$

подходы:

→ а) Если $h_{d\,(xz)}^{\alpha} = \sum_\beta \lambda_{\alpha\beta} m_\beta(x,z)$ усредн. по z, то $\begin{pmatrix} h_d^x \\ h_d^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_x \\ m_z \end{pmatrix}$ как 13/VIII 002, т.е. $h_d^{\alpha}(xz) = \lambda_\alpha m^{\alpha}(xz)$

Тогда получим сферное $(\lambda_x + 4\pi)\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = 0$, $\lambda_z \frac{\partial^2 m_z}{\partial x^2} = 0$

→ б) усреднить по z сами сист. $(*)$. $\langle \ldots \rangle_z = \frac{1}{L}\int_0^L dz (\ldots)$, усреднить надо $\vec{h}_d(x,z)$, а $m_d \neq f(z)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \langle h_d^x \rangle_z}{\partial x^2} + \frac{1}{L}\left(\frac{\partial h_d^x}{\partial z}\right)\Big|_0^L = -4\pi \left[\frac{\partial^2 \langle m_x \rangle_z}{\partial x^2} + \frac{1}{L}\left(\frac{\partial m_z}{\partial x}\right)\Big|_0^L \right] \\ \frac{\partial^2 \langle h_d^z \rangle_z}{\partial x^2} + \frac{1}{L}\left(\frac{\partial h_d^z}{\partial z}\right)\Big|_0^L = -\frac{4\pi}{L}\left(\frac{\partial m_x}{\partial x}\right)\Big|_0^L, \text{ т.к. } \left(\frac{\partial m_z}{\partial z}\right)\Big|_0^L = 0 \text{ в силу } \left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial n}\right)_{S_{\text{вне}}} = 0. \end{cases}$$

СФ $\frac{\partial h_d^{\alpha}}{\partial z}\Big|_0^L = \sum_\beta \lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial m_\beta}{\partial z}\Big|_0^L = 0$ в силу $\left(\frac{\partial m_\beta}{\partial z}\right)_{S_z} = 0$ $\quad \langle \ldots \rangle_z = \overline{(\ldots)}$, $\langle h \rangle_z = \bar{h}$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{h}_d^x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_\beta \lambda_{x\beta} \bar{m}_\beta = -4\pi \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{m}_x + \frac{1}{L} \frac{\partial m_z}{\partial x}\Big|_0^L \right] \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{h}_d^z = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_\beta \lambda_{z\beta} \bar{m}_\beta = -\frac{4\pi}{L} \frac{\partial m_x}{\partial x}\Big|_0^L \end{cases}$$

$(**)$ $\begin{cases} (\lambda_{xx} + 4\pi) \frac{\partial^2 \bar{m}_x}{\partial x^2} + \lambda_{xz} \frac{\partial^2 \bar{m}_z}{\partial x^2} = -\frac{4\pi}{L} \frac{\partial m_z}{\partial x}\Big|_0^L \\ \lambda_{zx} \frac{\partial^2 \bar{m}_x}{\partial x^2} + \lambda_{zz} \frac{\partial^2 \bar{m}_z}{\partial x^2} = -\frac{4\pi}{L} \frac{\partial m_x}{\partial x}\Big|_0^L \end{cases}$ – неоднородная система 2х лин. диф. ур для $\bar{m}_x(x)$ и $\bar{m}_z(x)$

Но $\frac{\partial m_z}{\partial x}\Big|_0^L$ и $\frac{\partial m_x}{\partial x}\Big|_0^L$ зав. функционалы „x". Как их выразить через $\bar{m}_x, \bar{m}_z$?

Тогда будет однородная система диф. ур. Не учитывается $m_z \neq \delta(z)$, а $\langle m_z(x,z) \rangle_z = \bar{m}_z(x)$

Escaneado con CamScanner

Date.

1) $0 = \operatorname{rot} \vec{h}_d = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left[\frac{\partial h_d^z}{\partial y} - \frac{\partial h_d^y}{\partial z}\right] + \vec{j}\left[\frac{\partial h_d^x}{\partial z} - \frac{\partial h_d^z}{\partial x}\right] + \vec{k}\left[\frac{\partial h_d^y}{\partial x} - \frac{\partial h_d^x}{\partial y}\right] =$

$= \left[\text{т.к. } y \text{ не зависимая переменная}\right] = \vec{i}(-1)\frac{\partial h_d^y}{\partial z} + \vec{j}\left[\frac{\partial h_d^x}{\partial z} - \frac{\partial h_d^z}{\partial x}\right] + \vec{k}\frac{\partial h_d^y}{\partial x} = 0$

Это даст $\frac{\partial h_d^x}{\partial z} - \frac{\partial h_d^z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial h_d^y}{\partial x} = \frac{\partial h_d^y}{\partial z} = 0$ (это будет при $h_d^y = \text{const} = 0$).

На СФ: $h_d^x = \sum_\beta \lambda_{x\beta} m_\beta$, $\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_{xx} m_x + \lambda_{xz} m_z\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_{zx} m_x + \lambda_{zz} m_z\right]$

$\frac{1}{L}\int_0^L dz(\dots)$: $\frac{1}{L}\left[\lambda_{xx} m_x + \lambda_{xz} m_z\right]\Big|_0^L = \lambda_{zx}\frac{\partial \overline{m_x}}{\partial x} + \lambda_{zz}\frac{\partial \overline{m_z}}{\partial x}$, $\lambda_{zx}\frac{\partial m_x}{\partial x}\Big|_0^L + \lambda_{zz}\frac{\partial m_z}{\partial x}\Big|_0^L$

2) $\operatorname{div}\vec{h}_d = -4\pi \operatorname{div}\vec{m}$, $\frac{\partial}{\partial x}\left[h_d^x + 4\pi m_x\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[h_d^z + 4\pi m_z\right] = 0$

Возьмем границы СФ $[z=L] - [z=0]$: $\left[\frac{\partial h_d^x}{\partial x} + 4\pi \frac{\partial m_x}{\partial x}\right]_0^L = 0$, $\left[\lambda_{xx}\frac{\partial m_x}{\partial x} + \lambda_{xz}\frac{\partial m_z}{\partial x} + 4\pi \frac{\partial m_x}{\partial x}\right]_0^L =$

Получим окончательно, для $\frac{\partial m_x}{\partial x}\Big|_0^L = X$ и $\frac{\partial m_z}{\partial x}\Big|_0^L = Y$:

$$\begin{cases} \lambda_{zx} X + \lambda_{zz} Y = 0 \\ \lambda_{xx} X + \lambda_{xz} Y = -4\pi m_x\Big|_0^L \end{cases}, \text{ откуда } X = -\frac{(4\pi m_x|_0^L)\cdot \lambda_{zz}}{[\lambda_{xx}\lambda_{zz} - \lambda_{xz}^2]}$$

$$Y = \left(4\pi m_x|_0^L\right)\cdot \frac{\lambda_{zx}}{[\lambda_{xx}\lambda_{zz} - \lambda_{xz}^2]}$$

– возвращаем $\frac{\partial m_x}{\partial x}\Big|_0^L$, $\frac{\partial m_z}{\partial x}\Big|_0^L$ через $m_x|_0^L$. Пока неверно.

Надо $\begin{cases} \lambda_{zx} X + \lambda_{zz} Y = 0 \\ (\lambda_{xx} + 4\pi) X + \lambda_{xz} Y = 0 \end{cases}$, $\det R = \lambda_{zz}(\lambda_{xx} + 4\pi) - \lambda_{xz}\lambda_{zx} \neq 0$.

Если $\lambda_{xx} + \lambda_{zz} = -4\pi$, то надо $X = 0$, $Y = 0$ – тривиально.

→ б) Вместо z будем x, а решать (*) с $h_d^x(xz) = \sum_\beta \lambda_{x\beta} m_\beta(xz)$ для $m_x(x,z)$ и $m_z(x,z)$.

$$\begin{cases} (\lambda_{xx} + 4\pi)\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \lambda_{xz}\frac{\partial^2 m_z}{\partial x^2} + \lambda_{xx}\frac{\partial^2 m_x}{\partial z^2} + \lambda_{xz}\frac{\partial^2 m_z}{\partial z^2} = -4\pi \frac{\partial^2 m_z}{\partial x \partial z} \\ \lambda_{zx}\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \lambda_{zz}\frac{\partial^2 m_z}{\partial x^2} + \lambda_{zx}\frac{\partial^2 m_x}{\partial z^2} + (\lambda_{zz} + 4\pi)\frac{\partial^2 m_z}{\partial z^2} = -4\pi \frac{\partial^2 m_x}{\partial x \partial z} \end{cases}$$ – система.

и $\frac{\partial m_{x,z}}{\partial z}\Big|_{z=\frac{L}{2}} = 0$, $\frac{\partial m_{x,z}}{\partial x}\Big|_{x=\pm\frac{L_x}{2}} = 0$

Не вспомнил просто в дифур. виде для Wires.

Далее усредненную систему (**) можно уже решать.

Возможное усреднение $\overline{m_x} = C\overline{m_z}$, $\overline{(\dots)} = \langle \dots \rangle_z$.

→ Здесь Ед. б)–1) неверное, т.к. предположение m_x не зависит от z здесь не делаем. После диагонализации ур (**) получим $\begin{cases} \frac{\partial^2 \overline{m_x}}{\partial x^2} = F_1(x, \lambda_i) \\ \frac{\partial^2 \overline{m_z}}{\partial x^2} = F_2(x, \lambda_i) \end{cases}$,

которые – далее уже ур-я на СФ: $\left(\frac{\partial \overline{m_{x,z}}}{\partial x}\right)_{x=\pm\frac{L_x}{2}} = 0$.

Escaneado con CamScanner

Date. 12 · 03 · SW wires

Анализ СФ, СЗ wires в интегральном виде.

Дано $\lambda m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g(x,x') m(x')$, где $m_n(x)$ – СФ ($x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ – начало фазы)

$\lambda_n m_n(x) = \int dx' g(x,x') m_n(x)$. $g(0,x') = g(10-x') = g(|x'|) = g(x)$

Положим $x=0$ $m_n(0) \neq 0$: $\lambda_n = \frac{1}{m_n(0)} \int_{-1/2}^{1/2} dx' g(x') m_n(x')$ – дискретная форма для всех n

Если как в 22/ПОО: $m_n(x) \sim \cos(\pi n x)$, то

$\to \lambda_n = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, g(x) \cos(\pi n x)$, тогда как 22/ПО нашли

$\to \lambda_n' = \int_{-1}^{1} dx\, g(x) \cos(\pi n x)$. Какое из них верное? И как при $p \to \infty$?

n	0	1	2	3	4	5	
$(-\frac{1}{\pi n})$ λ_n	1,005	0,937	0,979	0,951	0,946	0,931	λ_n и λ_n' практически совпадают (!) и $\lambda_n^{Si} \approx \lambda_{n+1}, \lambda_{n-1}'$.
$(\frac{1}{\pi n})$ λ_n'	1,009	0,936	0,978	0,962	0,946	0,931	
$(-\frac{1}{\pi n})$ λ_n^{Si}	0,993	0,985	0,966	0,947	0,931	0,914	– но $\approx$ функции с $Si(x)$.

Близость λ_n и λ_n' неудивительна, ведь $g(x) \approx \delta(x)$ для $p \to 0$, а для wire $p = 0{,}011 \ll 1$. Поэтому наибольший вклад в $\int dx(\dots)$ дает окрестность $x = 0$ и пределы почти неважны.

Аналитическое решение при $n=0$, $p \to 0$ дает (см. 17/ПО 2000 г.):

$$\begin{cases} \lambda_0(p) = \frac{4}{p}\left[-\frac{1}{2}\ln(1+4p^2) - 2p\,\mathrm{arctg}\frac{1}{2p}\right] = -4\pi + 8p, & \frac{\lambda_0}{(-4\pi)} = 1 - \frac{2}{\pi}p \\ \lambda_0'(p) = \frac{4}{p}\left[-\ln(1+p^2) - 2p\,\mathrm{arctg}\frac{1}{p}\right] = -4\pi + 4p, & \frac{\lambda_0'}{(-4\pi)} = 1 - \frac{1}{\pi}p \end{cases}$$

$\lambda_n^{Si} = \lambda_0 - 8p\left[1 - \cos\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi n}{2} Si\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right]$ есть $\lambda_n(p)$ при $p \ll 1$ с точ. до p^2.

Отличие λ_n^{Si} (посчитанного аналитически) и λ_n (численно с $g(x)$) говорит, что видимо MCAD плохо справляется с $g(x) \sim \ln\left[\frac{x^2}{x^2+p^2}\right]$, т.е. λ_n – неточно, отсюда и λ_n' – неточно.

Кстати и для $m_n(x) \sim \sin(\pi n x)$ см. 20/ПОО2 получится $\lambda_n = \sum_{s=0} (-1)^s \frac{(\pi n)^{2s}}{(2s)!}$

т.е. $\lambda_n = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, g(x) \sum_{s=0} (-1)^s \frac{(\pi n)^{2s}}{(2s)!} x^{2s} = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, g(x) \cos(\pi n x)$, $n \geq 1$.

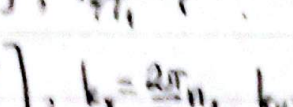
Для вывода λ_n через нулевые СФ $\cos(\pi n x)$, $\sin(\pi n x)$ использовалась только аналитичность СФ вкл. нулевой для $x = 0$.

Escaneado con CamScanner

Dr. Gushchenko

Date. . . Нан для "rectan. lattice of „vortex" dots (Ivanov)

→ Проектирование rectangular lattice of vortex дисков от 8/III. Ханджи.

$k^2 = (2\pi)^2 \left[\left(\frac{n_1}{T_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{T_2}\right)^2 \right]$, $T_2/T_1 = \xi^{-1}$. 

$d_2 = d$

$k^2 = (2\pi)^2 \frac{1}{T_1^2} \left[n_1^2 + \xi^2 n_2^2 \right]$, $k_x = \frac{2\pi}{T_1} n_1$, $k_y = \frac{2\pi}{T_2} n_2 = 2\pi \frac{n_2}{T_1} \xi$, $\xi = \frac{T_1}{T_2}$, $\xi > 1$.

$W(s, \varphi_H) = W(s=0) + 2\pi \left(\frac{A(\varphi_H)}{2\pi} \right) s^2 - sh$, $\beta = \frac{L}{12}$.

$F(\beta, \frac{d}{R}, \varphi_H) = \frac{1}{2\pi} A(\varphi_H) = \left(\frac{4\pi}{T_1 T_2}\right) \sum_k \frac{f(kL)}{k^2} J_1^2(kR) \sin^2\varphi_k + \cos^2\varphi_H \left(\frac{4\pi}{T_1 T_2}\right) \sum_k \frac{f(kL)}{k^2} J_1^2 \cos 2\varphi_k$

$F(\beta, \frac{d}{R}, \varphi_H) = \frac{4\pi}{T_1 T_2} \sum_k \frac{f(kL)}{k^2} J_1^2(kR) \cos^2(\varphi_k - \varphi_H)$ → $F(\beta)$ - ряд-ние функции Лоуренца.

$F(\beta, \frac{d}{R}, \varphi_H) = \frac{4\pi}{T_1 T_2} \frac{T_1^2}{4\pi^2} \sum_{n_1 n_2} \frac{f\left(2\pi \frac{L}{T_1} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 \xi^2}\right)}{n_1^2 + n_2^2 \xi^2} J_1^2\left(2\pi \frac{R}{T_1} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 \xi^2}\right) \frac{n_2^2 \xi^2}{n_1^2 + n_2^2 \xi^2}$

$\sin^2\varphi_k = \frac{k_y^2}{k^2} = \frac{n_2^2 \xi^2}{n_1^2 + n_2^2 \xi^2}$, $\cos^2\varphi_k = \frac{k_x^2}{k^2} = \frac{n_1^2}{n_1^2 + n_2^2 \xi^2}$

$F(\beta, \frac{d}{R}, \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi} \xi^3 \sum_{n_1 n_2} f\left(2\pi \frac{L}{T_1} \sqrt{(\cdot)}\right) J_1^2\left(2\pi \frac{R}{T_1} \sqrt{(\cdot)}\right) \frac{n_2^2}{(n_1^2 + n_2^2 \xi^2)^2}$ — исходное для расчета ($\varphi_H = \frac{\pi}{2}$, Носи направлены)

$F(\beta, \frac{d}{R}, 0) = \frac{1}{\pi} \xi \sum_{n_1 n_2} f\left(2\pi \frac{L}{T_1} \sqrt{(\cdot)}\right) J_1^2\left(2\pi \frac{R}{T_1} \sqrt{(\cdot)}\right) \frac{n_1^2}{(n_1^2 + n_2^2 \xi^2)^2}$

$\tau_1 = \frac{2\pi R}{T_1} = \frac{2\pi R}{2R + d_1} = \pi \frac{1}{1 + (d_1/2R)}$, $\tau_2 = \frac{2\pi R}{T_2}$. Нужна зависимость от $\frac{d_2}{R} = \frac{d}{R}$.

$\tau_1 = \frac{2\pi R}{T_1} = \frac{2\pi R}{T_2} \frac{T_2}{T_1} = \pi \frac{1}{1 + \left(\frac{d}{2R}\right)} \frac{1}{\xi}$. $\xi = \frac{T_1}{T_2} = \frac{2R + d_1}{2R + d_2} = \frac{1 + (d_1/2R)}{1 + (d_2/2R)}$

→ $R, L, T_1 = \text{const}$, переменной является T_2 из-за $d_2 = d$.

$\frac{L}{T_1} = \beta \frac{R}{T_1} = \text{const}$, $\frac{R}{T_1} = \text{const}$, переменной является фигурация „ξ".

Пусть $L = 60$ nm, $T_1 = 2R + d_1 = 0{,}6\ \mu m + 0{,}6\ \mu m = 1{,}2\ \mu m$. $d_2 = d = 0{,}1\ \mu m$.
$2R = 0{,}6\ \mu m$, $d_1 = 0{,}6\ \mu m$

$\xi = \frac{1+1}{1 + (d/2R)} = \frac{2}{1 + \left(\frac{d}{2R}\right)}$

$\tau = \frac{2\pi R}{T_1}$ и все в „nm".

При учете обмена надо $A \to A - \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2$ и $F(\beta, \frac{d}{R}, \varphi_H) \to F(\cdot) - \frac{1}{4\pi}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2$

Для FeNi с $R_0 = 18$ nm, $R = 300$ nm — это очень малая поправка.

Paris Rectan-Lat-Vortex.mcd. MCAD forgot: $H_{an}(\pi/4) = 0{,}925 M_s$ и $H_{an}(0) = 1{,}28 M_s$.
Не забыть сравнить с Ni"+m[численный отжиг близких полей(?)

Escaneado con CamScanner

Date. 13.03. SW wires

Разлож. неизвестное СФ w.r.t. $\lambda_m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g(x,x') \sum_{k=0} \frac{m^{[k]}(x)}{k!} (x'-x)^k$

Общее разложение по $x'-x$:

Для D.e. четных СФ $x=0$, $k=2s$ - нечетные, т.к. $m^{[2s]}(0) \neq 0$ только

$\lambda_m(0) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g(x') \sum_{s=0} \frac{m^{[2s]}}{(2s)!} (x')^{2s} \xrightarrow{g=\cos(\pi n x)} \lambda_n = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, g(x) \cos(\pi n x)$

Для нечет. СФ $x=1/2$ и общего вида $m^{[2s+1]}(1/2) = 0$ - это выполнено

для $m_n(x) = \sin(\pi n x)$ и n-нечет.

$m_n^{[2s]}(x) = (-1)^s (\pi n)^{2s} m_n(x)$, $m_n^{[2s+1]}(x) = (-1)^s (\pi n)^{2s+1} \cos(\pi n x)$

$m_n^{[2s+1]}(x) = (-1)^s (\pi n)^{2s} \frac{\partial m_n(x)}{\partial x}$

Т.е. $m_n^{[2s+1]}(1/2) = 0$ сооб. $\left(\frac{\partial m_n}{\partial x}\right)_{x=1/2} = 0$ нужно, где $\frac{\partial m_n}{\partial n} = 0$

$$\lambda_n = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g(1/2-x) \sum_{k=0} \frac{m_n^{[k]}(1/2)}{m_n(1/2)} \frac{1}{k!} (x'-1/2)^k = \int dx' g(1/2-x) \sum_{s=0} (-1)^s \frac{(\pi n)^{2s}}{(2s)!}$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} dx' g(1/2-x') \cos \pi n (x'-1/2) = |x'-1/2 = x| = \int_{-1}^{0} dx\, g(x) \cos(\pi n x) = \int_{0}^{1} dx\, g(x) \cos(\pi n x)$$

Для нечет. СФ: $\lambda_n = \int_0^1 dx\, g(x) \cos(\pi n x)$ н/м n-нечет.

→ Выходит СЗ $x \in [1/2, -1/2]$

$$\begin{cases} \lambda_n = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, g(x) \cos(\pi n x), & \text{четные СФ, } m_n(x) = \cos(\pi n x) \\ \lambda_n = \int_0^1 dx\, g(x) \cos(\pi n x), & \text{нечет. СФ, } m_n(x) = \sin(\pi n x) \text{ и n-нечет.} \end{cases}$$

Легко видеть, что нет. n" для $\cos(\pi n x)$ обобщ. $\left(\frac{\partial m_n}{\partial x}\right)_{x=\pm 1/2} = 0$, поэтому их и надо оставить для нет. СФ.

→ СФ: $m_n(x) = \left\{ \begin{array}{c} \cos(\pi n x), \text{ n-чет} \\ \sin(\pi n x), \text{ n-нечет.} \\ x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{array} \right\} = \cos(\pi n x)$, где $x \in [0,1]$

→ СЗ $\lambda_n = \int_0^1 dx\, g(x) \cos(\pi n x)$ для нечет. СФ относительно интервала где не совпадается с СЗ полностью $\int_{-1/2}^{1/2} dx\, g(x) \cos(\pi n x)$ ∀ чет. и нечет СФ. ($\cos \pi n x$) ($\sin \pi n x$)

Escaneado con CamScanner

Date. 15 · 03 · Интегр. applications в Ферро

Нужная ф-ла: $\nabla\nabla\left(\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\right) = -\frac{4\pi}{3}\hat I\delta(\vec r-\vec r') + \frac{1}{R^5}(3\vec R\vec R - R^2\hat I)$,

$\vec R = \vec r - \vec r'$, $\hat I$ – диагональная единица (PRESS, 1050(1981)).

Ядро для wire можно представить в виде $g(t) = \frac{4}{\rho}\int_0^\infty dt\cos qt\left[\frac{e^{-\rho t}-1}{t}\right]$

$$\int_{-V_2}^{V_2} dx' m(x')\cos q(x-x') = \int_{-V_2}^{V_2} dx' m(x')\left[\cos qx\cdot\cos qx' + \sin qx\cdot\sin qx'\right] = \begin{cases}\cos qx\int_{-V_2}^{V_2} dx' m(x')\cos qx', & \text{чет}\\ \sin qx\int_{-V_2}^{V_2} dx' m(x')\sin qx', & \text{нечет}\end{cases}$$

$$\lambda m(x) = \int_{-V_2}^{V_2} dx' g(xx') m(x') = \int_{-1/2}^{V_2} dx' m(x')\left[\frac{4}{\rho}\int_c^\infty dq\cos q(x-x')\left(\frac{e^{-\rho q}-1}{q}\right)\right] =$$

$$= \frac{4}{\rho}\int_0^\infty dq\left(\frac{e^{-\rho q}-1}{q}\right)\int_{-1/2}^{V_2} dx' m(x')\cos q(x-x')$$

а) Если $m(x)$ – четная СФ, то (*) $\lambda m(x) = \frac{4}{\rho}\int_c^\infty dq\left(\frac{e^{-\rho q}-1}{q}\right)\hat m(q)\cos qx$, где

$\hat m(q) \underset{\text{def}}{=} \int_{-1/2}^{V_2} dx\, m(x)\cos qx$

для нормир. на 1 – СФ $\int_{-V_2}^{V_2} dx\, m^2(x) = 1$ дает (2пред.ст.)

$$\lambda(\rho) = \frac{4}{\rho}\int_0^\infty dq\left(\frac{e^{-\rho q}-1}{q}\right)\hat m^2(q) \quad \text{или} \quad \lambda(\rho) = -4\pi + 4\int_0^\infty dq\, f(q)\hat m^2(q),$$

$$\int_0^\infty dq\,\hat m^2(q) = \pi\int_{-V_2}^{V_2} dx\, m^2(x) = \pi$$

Т.к. $\hat m_n^2(q) = |\hat m_n(q)|^2 = I_n(q)$ – интенсивность n-SW моды.

Если $I_n(q) = \pi\delta(q-q_n)$, то $\lambda_n = \frac{4}{\rho}\int_0^\infty dq\left(\frac{e^{-\rho q}-1}{q}\right)\pi\delta(q-q_n) = 4\pi\frac{e^{-\rho q_n}-1}{\rho q_n}$ –

(с $q_n = \frac{n\pi}{w}\cdot w$) получили функц. сглажена, ∞-нижняя с дискрет. q_n.

б) СФ – $m(x)$ нечетная $\lambda m(x) = \frac{4}{\rho}\int_0^\infty dq\left(\frac{e^{-\rho q}-1}{q}\right)\hat m(q)\sin qx$ с $\hat m(q) = \int_{-V_2}^{V_2} dx\, m(x)\sin qx$

$\int_{-1/2}^{1/2} dx\, m(x)$; $\lambda\int dx\, m^2(x) = \frac{4}{\rho}\int dq(\cdot)\hat m(q)\int_{-1/2}^{1/2} dx\, m(x)\sin qx = \frac{4}{\rho}\int dq(\cdot)\hat m^2(q)$, т.е.

Вид $\lambda(\rho)$ не меняется, изменяется лишь $\hat m(q)$ – определение.

$\left(-\frac{1}{4\pi}\right)\lambda_n(\rho) = 1 - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dq\, f(q\rho)\hat m_n^2(q)$ – волновое эволюционное.

Основная мода $m_0(x) = 1$ дает $\int_{-1/2}^{V_2} dx\, m_0(x)\cos qx = \frac{2}{q}\sin(q/2) = \hat m(q)$ и

$\lambda_0(\rho) = \frac{4}{\rho}\int_0^\infty dq\left(\frac{e^{-\rho q}-1}{q}\right)\frac{4}{q^2}\sin^2(q/2) = \frac{8\cdot 2}{\rho}\int_0^\infty dq\left(\frac{e^{-\rho q}-1}{q}\right)\frac{\sin^2(q/2)}{q^2}$ – нет в Ф-Р.

Ясно, что $\lambda_n(\rho) \sim Z_{n0}^{no}$ мат.рез. Элементы дос на $\cos q_n x$ или $\sin q_n x$.

Ведь $\hat m_n(q) = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, m_n(x)\cos qx = A_n\int_{-1/2}^{1/2} dx\,\cos q_n x\cos qx = \frac{1}{2}A_n\cdot 2\left[\frac{\sin(q-q_n)\frac{1}{2}}{q-q_n} + \frac{\sin\frac{1}{2}(q+q_n)}{q+q_n}\right]$

~~Различие~~ Числ. значений $\lambda_0 = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, g(x)$ и $\lambda_0(\rho) = \frac{16}{\rho}\int_0^\infty dq\left(\frac{e^{-\rho q}-1}{q}\right)\frac{\sin^2(q/2)}{q^2}$ с чем связано?

Escaneado con CamScanner

Date. . .

Всего $\lambda_0 = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, g(x) = \frac{4}{\rho}\int_{-1/2}^{1/2} dx \int_0^\infty dq \cos qx \left(\frac{e^{-q\rho}-1}{q}\right) = \frac{4\cdot 2}{\rho}\int_0^\infty dq \left(\frac{e^{-q\rho}-1}{q}\right)\frac{\sin(q/2)}{q}$

Получим для $m_0(x)=1$: $\lambda_0 = \frac{4}{\rho}\int_0^\infty dq \left(\frac{e^{-\rho q}-1}{q}\right)\left(\frac{2}{q}\sin\frac{q}{2}\right)\cos qx$, что дает $\lambda_0 = -\cos qx$.

$\Rightarrow m_0(x) = 1$ не может быть СФ.

Но если в (*) положить $x=0$ $\lambda m(0) = \frac{4}{\rho}\int_0^\infty dq \left(\frac{e^{-\rho q}-1}{q}\right)\hat m(q)$, то $\lambda_0 = \frac{8}{\rho}\int_0^\infty dq \left(\frac{e^{-q\rho}-1}{q}\right)\frac{\sin q/2}{q}$

Ограничение $x=0$ делалось и при выводе λ_n^{Si} и оправдано себя не сравн. с эксп.

т.е. $x=0$ физически оправдано для всех.

Получим еще Фурье-представление для Лоренц-группы инт. уравнения на СФ $\Lambda(\rho) m(x) = (-4)\int_{-1/2}^{1/2} dx' \frac{m(x')}{(x-x')^2+\rho^2} = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g_L(x-x') m(x')$

$g_L(\xi) = (-4)\frac{1}{\xi^2+\rho^2} = \frac{(-4)}{\rho}\int_0^\infty dq\, e^{-\rho q}\cos(q\xi) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial[g(\xi)\rho]}{\partial\rho}$, $\Lambda(\rho) = \frac{\partial\lambda}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\lambda$.

$\Lambda m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' m(x')\frac{(-4)}{\rho}\int_0^\infty dq\, e^{-\rho q}\cos q(x-x') = \frac{(-4)}{\rho}\int_0^\infty dq\, e^{-\rho q}\int_{-1/2}^{1/2} dx\, m(x')\cos q(x-x')$

(**) $\Lambda m(x) = \frac{(-4)}{\rho}\int_0^\infty dq\, e^{-\rho q}\hat m(q)\cos qx \to \Lambda(\rho) = \frac{(-4)}{\rho}\int_0^\infty dq\, e^{-\rho q}\hat m^2(q)$,

где $\int dx\, m(x)(\dots)$ и $\hat m(q) = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, m(x)\cos qx$

А если (x') домножить на $\cos q'x$ и $\int dx(\dots)$, то

$\Lambda\int_{-1/2}^{1/2} dx\, m(x)\cos q'x = \frac{(-4)}{\rho}\int_0^\infty dq\, e^{-\rho q}\hat m(q)\int_{-1/2}^{1/2} dx\cos(qx)\cos(q'x)$

Фурье-представ. инт. ур. $\Lambda\hat m(q') = \int_0^\infty dq\, g_L(q,q')\hat m(q)$, $g_L(q,q') = \frac{(-4)}{\rho}e^{-\rho q}\int_{-1/2}^{1/2} dx\cos(qx)\cos(q'x)$ ядро Лоренц-группы

Это аналогично ур. в Фурье представ. от 20/VII $\lambda m(q) = \int_0^\infty dq'\hat g(qq')\hat m(q')$

с ядром $\hat g(q,q') = \frac{4}{\rho q'}\left[e^{-\rho q'}-1\right]\int_{-1/2}^{1/2} dx\cos(qx)\cos(q'x)$.

Если положить $m_0(x)=1$, $\hat m_0(q) = \frac{2}{q}\sin\frac{q}{2}$, то $\Lambda(\rho) = -\frac{4\cdot 4}{\rho}\int_0^\infty dq\, e^{-\rho q}\frac{\sin^2 q/2}{q^2} =$

$= -\frac{16}{\rho}\left[\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2\rho\frac{1}{2}}{\rho^2}\right)+\frac{\rho}{4}\ln\left\{\frac{\rho^2}{\rho^2+1}\right\}\right] = -\frac{16}{\rho}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\rho}+\frac{\rho}{4}\ln\left(\frac{\rho^2}{1+\rho^2}\right)\right]$

Это дает ур. на $\lambda(\rho)$: $\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\lambda = -\frac{16}{\rho}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\rho}+\frac{1}{4}\rho\ln\left(\frac{\rho^2}{1+\rho^2}\right)\right]$

При $\rho\to 0$ $\Lambda(\rho) = -\frac{16}{\rho}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\rho}+\frac{\rho}{4}2\ln\rho-\frac{\rho}{4}\ln(1+\rho^2)\right]_{\rho\to 0} = -\frac{16}{\rho}\left[\frac{\pi}{22}-\frac{\rho}{2}+\frac{1}{3}\rho^3+\right.$

$\left.+\frac{1}{2}\rho\ln\rho-\frac{1}{4}\rho\cdot\rho^2\right] = -\frac{16}{\rho}\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}+\frac{1}{2}\rho\ln\rho\right] = -\frac{4\pi}{\rho}+8-8\ln\rho$

$\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\lambda = -\frac{4\pi}{\rho}+8-8\ln\rho$. Имеем $\lambda(\rho) = -4\pi+A\rho+B\rho\ln\rho$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$\frac{\partial \lambda}{\partial p} = A + B\ln p + Bp\cdot\frac{1}{p}$, $A + B + B\ln p + \frac{1}{p}\left[-4\pi + Ap + Bp\ln p\right] = -\frac{4\pi}{p} + 8 - 8\ln p$

$\left.\begin{array}{l} p^0: \ 2A + B = 8 \\ \ln p: \ 2B = -8 \end{array}\right\}$ $B = -4$, $A = 6 \Rightarrow$ $\lambda_0(p) = -4\pi + 6p - 4p\ln p$

(!) Но $-\lambda_0 = N_{zz} = 4\pi - 4p\left[\frac{3}{2} - \ln p\right]$ – в точности средний радиальный фактор от wire, напр. $2/\Pi$.

$\Rightarrow \lambda_0 = -4\pi + 8p$ и λ_n^{Si} – это просто СЗ вычисленные при $x = 0$,

(Среднее по плоскости $x=0$ || оси wire) (усреднение по плоск. $x=0$, а по y – по $\pm 1/2$ ячейки)

Инт ур-я: $\lambda m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx'\, g(x,x')\, m(x')$ (1) и $\lambda m(0) = \int_{-1/2}^{1/2} dx'\, g(x')\, m(x')$ (2)

не эквивалентны.

λ_n^{Si} (включая $\lambda_0^{слаб}$) и СФ $\cos(n\pi x)$, $\sin(n\pi x)$ явл. видимо решениями только (2).

Рассм. 3.8-41 Полянина:

$$\int_a^b f(t)\, y(x+\beta t)\, dt = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x \qquad x = 0,\ \beta = 1$$

если $\int_a^b f(t)\, y(t)\, dt = B$, формально $y(x)$ выражается I_s, I_c

~~$y(x) = \frac{1}{N}[AI_c + I_s B]$~~,

где $I_c = \int_a^b \cos(\lambda t) f(t)\, dt$, $I_s = \int_a^b \sin(\lambda t) f(t)\, dt$.

Уравнение $\lambda m(0) = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, g(x)\, m(x)$ удовлетворяет множество точных функций.

→ Пусть $u_n(x)$ – система СФ $\lambda m(x) = \int dx'\, g(xx')\, m(x')$

→ $g(x,x') = \sum_n A_n u_n(x) u_n(x') \to \lambda m(x) = \int dx'\, m(x') \sum_n A_n u_n(x) u_n(x') =$

$= \sum_n A_n u_n(x) \int dx'\, m(x') u_n(x')$.

Но если $u_n(x)$ – система СФ ортогональная и полная на $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, то

$\lambda m_{(x)} = \lambda_{n'} u_{n'}(x) = \int dx'\, g(xx')\, u_{n'}(x) = \sum_n A_n u_n(x) \underbrace{\int dx'\, u_{n'}(x') u_n(x')}_{\delta_{nn'}} =$

$= \sum_n A_n u_n(x) \delta_{nn'} = A_{n'} u_{n'}(x)$, т.е. $A_{n'} = \lambda_{n'}$, $\lambda_n = A_n$

СЗ $\lambda_n = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, dx'\, g(x,x')\, u_n(x) u_n(x')$ – для транзитивного ядра и сист. СФ

Но $g(x,x') = g(|x-x'|)$, $x - x' = \xi$, $x' = x - \xi$

$\lambda_n = \int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{x+1/2}^{x-1/2} d\xi\, g(\xi)\, u_n(x)\, u_n(x-\xi)$, $u_n(x-\xi) = \sum_m B_{mn} u_m(x) u_m(\xi)$

$\xi \to -\xi$, $\Delta\lambda_n = \sum_m a_m \ldots u_m(x) u_m(\xi)$

Escaneado con CamScanner

Date.

$$\int_{-1/2}^{1/2} u_n(x)\,u_m(x)\,dx = \delta_{nm}$$

$$\lambda_n = \int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, g(\xi)\,u_n(x) \sum_m B_{mm}\,u_m(x)\,u_m(\xi) =$$

$$= \sum_m B_{mm} \int_{-1/2}^{1/2} dx\, u_n(x)\,u_m(x) \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, g(\xi)\,u_m(\xi)$$

← и если здесь положить $x=0$

$$\lambda_n = \sum_m B_{mm} \int_{-1/2}^{1/2} dx\, u_n(x)\,u_m(x) \int_{-1/2}^{1/2} d\xi\, g(\xi)\,u_m(\xi) = \sum_m B_{mm}\,\delta_{nm} \int_{-1/2}^{1/2} d\xi\, g(\xi)\,u_m(\xi)$$

$$= B_{nn} \int_{-1/2}^{1/2} d\xi\, g(\xi)\,u_n(\xi).$$

* В частности для $u_n(x) = \cos(\pi n x)$, $u_n(x-\xi) = \cos\pi n x \cdot \cos\pi n\xi + \sin\pi n x \cdot \sin\pi n\xi$

$= \cos\pi n x \cos\pi n\xi = u_n(x)u_n(\xi)$ и $B_{nn}=1$, ← одно из свойств функции δ под интегралом

а $\lambda_n = \int_{-1/2}^{1/2} d\xi\, g(\xi)\,u_n(\xi)$. Но так было нельзя $x=0$ в пределах интегрирования.

→ Тогда, рассм. $\int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, g(\xi)\,u_m(\xi)$, выберем $u_m(x)$ так чтобы она была периодической с периодом $T = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$



тогда $g(\xi) = \sum_n A_n\,u_n(\xi)\,u_n(0)$ – тоже периодич. с $T = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] = 1$

$J_n(x) = \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, g(\xi)\,u_m(\xi) = \int_{-1/2}^{1/2} d\xi\, g(\xi)\,u_m(x)$ – не зависит от "x", т.к. инт. от период. ф-ии по любому $\Delta x = T$ одинаков.

⇒ для периодич. ф-ии $\lambda_n = B_{nn} \int_{-1/2}^{1/2} d\xi\, g(\xi)\,u_n(\xi)$ и выбор $x=0$ неудачен (!)

$g(x,x') = \sum_n A_n\,u_n(x)\,u_n(x')$, $g(x,0) = g(x) = \sum_n A_n\,u_n(x)\,u_n(0)$

$g(\xi) = \sum_n A_n\,u_n(\xi)\,u_n(0)$, $g(x-x') = \sum_n A_n\,u_n(x-x')\,u_n(0) = g(x,x')$

т.е. $g(x,x') = g(x-x',0)$ – B_{nm}. ⇒ $\sum_n A_n\,u_n(x)\,u_n(x') = \sum_n A_n\,u_n(x-x')\,u_n(0)$

($u_n g(x-x') = g(\xi)$)

$$= \sum_n A_n\,u_n(0) \sum_m B_{mm}\,u_m(x)\,u_m(x'), \quad \sum_n A_n\,u_n(x)\,u_n(x') = \sum_m A_m\,u_m(0) \sum_n B_{nn}\,u_n(x)\,u_n(x')$$

Отсюда $A_n = \sum_m A_m\,u_m(0)\,B_{nm}$ – должно выполняться для системы

$\lambda_n = \sum_m u_m(0)\,B_{nm}\,\lambda_m$. В частности для $u_n(x) = \cos\pi n x$, $B_{mn} = \delta_{mn}$, $u_n(0) = 1$, это было очевидно

Обозн. $J_n = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, g(x)\,u_n(x)$. $\lambda_n = B_{nn} J_n$.

(*) $B_{nn} J_n = \sum_m u_m(0)\,B_{nm}\,B_{mm}\,J_m$ — система ур-ий, которой B_{nn} и $u_n(x)$ должны удовлетворять

Escaneado con CamScanner

Date. 16 · 03 · Опер. application в Canberra, ANU.

→ Т.е. СФ $u_n(x)$ должна быть периодической с периодом $T \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] = 1$,

допускает $u_n(x-x') = \sum_m B_{mn} u_m(x) u_m(x')$, где B_{mn} удовл. (*).

Тогда для этой СФ будет СЗ $\lambda_n = B_{nn} \int_{-1/2}^{1/2} d\xi\, g(\xi) u_n(\xi)$ [Ссл. - бо для ост. СФ, для непер. - аналогично]

Конечно это в частности, напр. для $u_n(x) = \cos(\pi n x)$.

Легко найти $\int_{-1/2}^{1/2} u_n(x-x') u_n(x) dx = B_{nn} u_n(x')$, $B_{nn} u_n(0) = 1$, $\lambda_n = \frac{1}{u_n(0)} \int_{-1/2}^{1/2} d\xi\, g(\xi) u_n(\xi)$

и $B_{nn} \mathcal{I}_n = \sum_m B_{nm} \mathcal{I}_m$ (*) или $\sum_{m \neq n} B_{nm} \mathcal{I}_m = 0$.

Только периодич. функция будет $g(\xi) u_m(\xi) = \sum_n A_n u_n(0) u_n(\xi) u_m(\xi)$

$u_n(\xi) u_m(\xi) = \cos(\pi n \xi) \cos(\pi m \xi) \to \cos\pi n(\xi+1) \cos\pi m(\xi+1) = \cos\pi n\xi \cos\pi m\xi \cdot (-1)^{n+m}$

n и m должны быть одной четности $\forall n,m$, т.е. все n' либо чет., либо нечет. как и ранее.

→ Но ничто не следует, что СФ будут $\cos(\pi n x)$ (или $\sin n\pi x$).

→ На интервале $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ можно систему обр. $\cos(\pi n x)$ и $\sin(n\pi x)$.

Если раскл. только четные $f(x)$, то $\cos(2\pi n x)$ достаточно.

Но $u_n(x) = \cos(2\pi n x)$, $\lambda_n = \frac{1}{u_n(0)} \int_{-1/2}^{1/2} d\xi\, g(\xi) u_n(\xi) = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, g(x) \cos(2\pi n x)$?

16/III

→ Вернемся $g(x,x') = \sum_n A_n u_n(x) u_n(x')$ – использовался в доказ.

$g(x,x') = g(|x-x'|) = g(\xi) = \sum_n C_n \cos k_n \xi$, $\xi \in [0,1]$, $\xi = |x-x'|$.

$g(\xi)$ на $\xi \in [0,1]$ по $\cos(\pi n \xi) = u_n(\xi)$, далее $u_n(\xi) = \sqrt{\frac{\epsilon_n}{1}} \cos(\pi n \xi)$ – образуют полный ортогон. набор на инт. $[0,1]$, $\epsilon_n = 2 - \delta_{n0}$.

→ $g(\xi) = \sum_n g_n \cos(\pi n \xi)$, $g_n = 2 \int_0^1 d\xi\, g(\xi) \cos(\pi n \xi)$, $g_0 = \int_0^1 d\xi\, g(\xi)$.

$\lambda m(x) = \int dx' g(|x-x'|) m(x')$, удобнее $\xi = x - x'$, но сначала ищем решение. $g(\xi)$, $\xi \in [0,1]$ и $g(\xi)$ – четная.

$\lambda m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' m(x') \sum_n g_n \cos\pi n(x-x')$ $\quad g(x-x') = \sum_n g_n \cos\pi n(x-x')$

$\lambda m(x) = \sum_n g_n \int dx' m(x') \left[\cos\pi n x \cdot \cos\pi n x' + \sin\pi n x \cdot \sin\pi n x'\right]$

а) $m(x)$ – чет. $\int_{-1/2}^{1/2} m(x') \sin\pi n x' dx' = 0$ и $\lambda m(x) = \sum_n g_n \cos\pi n x \int_{-1/2}^{1/2} dx' m(x') \cos(\pi n x')$

на $\cos\pi n x'$ – обр. полн. систему на $x' \in [0,1]$, но на $[-1/2, 1/2]$ или $[0, 1/2]$. $\lambda m_n = \sum_{n'} \alpha_{nn'} m_{n'}$

б) $m(x)$ – нечет. $\lambda m(x) = \sum_n g_n \sin(\pi n x) \int_{-1/2}^{1/2} dx' m(x') \sin(\pi n x')$

Тест: СФ $m_n(x) = \cos(2\pi n' x)$ с $\partial m/\partial x = 0$ при $x = \pm 1/2$. Такие СФ обр. полный набор для чет. $m(x')$.

Escaneado con CamScanner

Date. 17 · 03 ·

Тогда пусть $x \in [0,1]$ в $\lambda m(x) = \int_0^1 dx' g(x-x') m(x')$ и

$\lambda m(x) = \int_0^1 dx' m(x') \sum_n g_n \cos \pi n (x-x')$, $\lambda m(x) = \sum_n g_n \int_0^1 dx' m(x') \left[\cos \pi n x \cos \pi n x' + \sin \pi n x \sin \pi n x'\right]$

СФ $m_{n'}(x) = \cos(\pi n' x)$ удовл. $\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_{x=0,1} = 0$ и образуют полный набор на $[0,1]$ без всяких предположений о гладкости.

$(*)$ $\lambda_{n'} \cos(\pi n' x) = \sum_n g_n \int_0^1 dx' \cos(\pi n' x') \left[\cos \pi n x \cdot \cos \pi n x' + \sin \pi n x \cdot \sin \pi n x'\right]$

$\int_0^1 dx' \cos \pi n' x' \cdot \cos \pi n x' = \frac{1}{\epsilon_n} \delta_{nn'}$, $\int_0^1 dx \cos \pi n' x \cdot \sin \pi n x =$

$= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[\sin \pi x (n+n') + \sin \pi x (n-n')\right] = \frac{1}{2}(-1)\left[\frac{\cos \pi x (n+n')}{n+n'} + \frac{\cos \pi x (n-n')}{n-n'}\right]_0^1 =$

$= -\frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^{n+n'}-1}{n+n'} + \frac{(-1)^{n-n'}-1}{n-n'}\right] \sim \left[(-1)^{n+n'}-1\right]$ и будут $=0$ только для n, n' - одной четности.

И только если в $(*)$ учитывать $x=0$ и поставить задачу найти $\{\xi_n\}$, то

$\lambda_{n'} = \sum_n g_n \int_0^1 dx' \cos(\pi n' x') \cos(\pi n x') = \sum_n g_n \frac{1}{\epsilon_n} \delta_{nn'} = \frac{1}{\epsilon_{n'}} g_{n'}$,

$\lambda_n = \frac{1}{\epsilon_n} g_n$, $g_n = \epsilon_n \int_0^1 d\xi\, g(\xi) \cos(\pi n \xi) \rightarrow$ $\lambda_n = \int_0^1 d\xi\, g(\xi) \cos(\pi n \xi)$

— СЗ на проб. СФ $\cos \pi n x$ и полагая $x=0$.

III Полезное разложение:

$$\ln\left[\frac{1}{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\varphi-\varphi')}\right] = 2\ln\frac{1}{\rho_>} + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{\rho_<}{\rho_>}\right)^m \cos m(\varphi-\varphi')$$

При $\varphi-\varphi' = \pi/2$: $\ln\left[\frac{1}{\rho^2+\rho'^2}\right] = 2\ln\frac{1}{\rho_>} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{\rho_<}{\rho_>}\right)^{2n}$, $\rho_> = \max(\rho,\rho')$

$$\ln\left(\frac{1}{x^2+\rho^2}\right) = \begin{cases} 2\ln\frac{1}{|x|} + \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{\rho}{x}\right)^{2n}, & |x|>\rho \\ 2\ln\frac{1}{\rho} + \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{x}{\rho}\right)^{2n}, & |x|<\rho \end{cases}$$

$$\frac{2}{\rho}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+\rho^2}\right) = \frac{2}{\rho}\cdot\begin{cases} \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{\rho}{x}\right)^{2n}, & |x|>\rho \\ 2\ln\frac{|x|}{\rho} + \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{x}{\rho}\right)^{2n}, & |x|<\rho \end{cases} = g(x) - \text{ФГ}$$

если $\ln\frac{|x|}{\rho}$

Строгое разложение: $g(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos(\pi n \xi)$, $g_n = \epsilon_n \int_0^1 d\xi\, g(\xi) \cos(\pi n \xi)$

$\xi \in [0,1]$ ($\xi = |x-x'|$) или $\xi \in [-1,1]$, т.к. $g(\xi) = g(|\xi|)$ — четная, $\xi = x-x'$. $\epsilon_n = 2-\delta_{n0}$.

$g(x,x') = g(x-x') = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos \pi n (x-x')$ — такое возможно, но отсюда не следует, что $\cos(\pi n x)$ или $\sin(\pi n x)$ — собственные СФ.

Escaneado con CamScanner

Date. . . Уравн. $p \gg 1$ для интегр. (окончание)

Т.к. $|\lambda| \ll 1$, то для $p \gg |\lambda|$, $p \gg 1$ будет $\tilde{g}(\xi) = \frac{2}{p}\left\{2\ln\frac{|\xi|}{p} + O\left(\frac{\xi^2}{p^2}\right)\right\} \approx$

и инт. ур. $\lambda m(x) = \frac{\gamma}{\pi}\int dx' \ln|x-x'| m(x')$ уравн. $p \gg 1$ $= \frac{\gamma}{p}\ln\frac{|\xi|}{p}$

Такого инт. ур. мы получили 2-го рода в Полосатых нер. А если

$\int_a^b dt \ln|x-t| y(t) = f(x)$ — $y(x)$ выразим, через инт. от $f(x)$.

Для $a=0$, $b=1$ имеем (решение Carleman):

$$y(x) = \frac{1}{\pi^2\sqrt{x(1-x)}}\left[\int_0^1 \frac{\sqrt{t(1-t)}}{(t-x)}\frac{\partial f(t)}{\partial t}dt + \frac{1}{\pi\ln\left(\frac{1}{4}\right)}\int_0^1 \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{t(1-t)}}\right]$$

Можно положить $f(x) = \lambda y(x)$, но ур-е для $y(x)$ будет сложным.

Для сим. случая $a=-1/2$, $b=1/2$:

$$y(x) = \frac{1}{\pi^2\sqrt{1/4-x^2}}\left[\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sqrt{1/4-t^2}}{t-x}\frac{\partial f(t)}{\partial t}dt + \frac{1}{\pi\ln\left(\frac{1}{4}\right)}\int_{-1/2}^{1/2}\frac{f(t)dt}{\sqrt{1/4-t^2}}\right]$$

Дано. $F(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dt \frac{\sqrt{1/4-t^2}\,f'(t)}{t-x}$, $F(-x) = \int_{-1/2}^{1/2} dt \frac{\tilde{f}(t)}{t+x} = \left|t = -t'\right| =$

$= -\int_{1/2}^{-1/2} dt' \frac{\tilde{f}(-t')}{x-t'} = -\int_{-1/2}^{1/2} dt' \frac{\sqrt{1/4-t'^2}\,f'(-t')}{t'-x} = \begin{cases} F(x), & \text{если } f'(t) - \text{нечет. от } t \\ -F(x), & \text{если } f'(t) - \text{чет. от } t. \end{cases}$

$F(x) = \begin{cases} F(x), & \text{если } f(t) - \text{чет.} \\ -F(x), & \text{если } f(t) - \text{нечет.} \end{cases}$. $f(t) = \bar{\lambda} y(t)$ — подставим.

с условием самосогласования на чет./нечетность $y(x)$ выполняется.

Чтобы $f(x) = \bar{\lambda} y(x) \Rightarrow$ $y(x) = \frac{\bar{\lambda}}{\pi^2\sqrt{1/4-x^2}}\left[\int_{-1/2}^{1/2} dt \frac{\sqrt{1/4-t^2}}{t-x}y'(t)dt + \frac{1}{\pi\ln\frac{1}{4}}\int_{-1/2}^{1/2}\frac{y(t)dt}{\sqrt{1/4-t^2}}\right]$

Очевидно $y_0(x) = 1$. Видим к $\bar{\lambda} = \pi^3 \ln\frac{1}{4}\sqrt{1/4-x^2}\,\frac{1}{\left[\int_{-1/2}^{1/2}\frac{dt}{\sqrt{1/4-t^2}}\right]} = \bar{\lambda}(x)$ и не может быть решением.

Перем.-форма инт. ур. интегр.

Рассм. более общее: $\lambda m(x) = (-4)\int_{-1/2}^{1/2} dx' \frac{m(x')}{(x-x')^2+p^2}$, $g_L(\xi) = (-4)\frac{1}{\xi^2+p^2}$

При $p \gg |\lambda|$, $g_L(\xi) = \frac{(-4)}{p^2}\frac{1}{1+\frac{\xi^2}{p^2}} = \frac{(-4)}{p^2}\left[1 - \frac{\xi^2}{p^2} + O\left(\frac{\xi^4}{p^4}\right)\right]$

Гл. приближ. $\lambda m(x) = \frac{(-4)}{p^2}\int_{-1/2}^{1/2} dx' m(x')$, $\Rightarrow m(x) = 1$, $\lambda(p) = -\frac{4}{p^2}$

$\lambda(p) = \frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial p}[\lambda(p)p] = -\frac{4}{p^2}$, $\frac{\partial[\lambda p]}{\partial p} = -\frac{4}{p}$, $\lambda(p) = -\frac{4}{p}\ln p + \frac{C}{p}$

След. приближ.: $\lambda m(x) = \frac{(-4)}{p^2}\int_{-1/2}^{1/2} dx' \left[1 - \frac{|x-x'|^2}{p^2}\right] m(x')$, $\tilde{\lambda} = -\frac{1}{4}p^2\lambda$

Escaneado con CamScanner

Date.

$\tilde{\Lambda} m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' \left[1 - \frac{(x-x')^2}{\rho^2}\right] m(x')$ – ур-е с вырожден. ядром.

$g(x,x') = 1 - \frac{1}{\rho^2}(x^2 - 2xx' + x'^2)$, ищем реш. в виде $m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$\int dx' \left[1 - \frac{1}{\rho^2}(x^2 - 2xx' + x'^2)\right](a_0 + a_1 x' + a_2 x'^2) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' \left[\left(1 - \frac{x^2}{\rho^2}\right)(a_0 + a_1 x' + a_2 x'^2)\right.$

$\left. + \frac{1}{\rho^2} 2x (a_0 x' + a_1 x'^2 + a_2 x'^3) - \frac{1}{\rho^2}(a_0 x'^2 + a_1 x'^3 + a_2 x'^4)\right] =$

$= \left(1 - \frac{x^2}{\rho^2}\right)\left(a_0 x' + a_2 \frac{x'^3}{3}\right)\Big|_{-1/2}^{1/2} + \frac{2x}{\rho^2}\left(a_1 \frac{x'^3}{3}\right)\Big|_{-1/2}^{1/2} - \frac{1}{\rho^2}\left(a_0 \frac{x'^3}{3} + a_2 \frac{x'^5}{5}\right)\Big|_{-1/2}^{1/2} =$

$= \left(1 - \frac{x^2}{\rho^2}\right)\left(a_0 + \frac{1}{12} a_2\right) + \frac{2x}{\rho^2} a_1 \frac{1}{12} - \frac{1}{\rho^2}\left(a_0 \frac{1}{12} + a_2 \frac{1}{5} \frac{2}{2^5}\right) =$

$= x^0 \left[a_0 + \frac{1}{12} a_2 - \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{12} a_0 + \frac{1}{5 \cdot 16} a_2\right)\right] + x\left[\frac{1}{6} \frac{a_1}{\rho^2}\right] + x^2\left(-\frac{1}{\rho^2}\right)\left(a_0 + \frac{1}{12} a_2\right) =$

$= \tilde{\Lambda}\left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right]$

$$\begin{cases} x^0: & a_0 + \frac{1}{12} a_2 - \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{12} a_0 + \frac{1}{5 \cdot 16} a_2\right) = \tilde{\Lambda} a_0 \\ x^1: & \frac{1}{6} \frac{a_1}{\rho^2} = \tilde{\Lambda} a_1 \\ x^2: & -\frac{1}{\rho^2}\left(a_0 + \frac{1}{12} a_2\right) = \tilde{\Lambda} a_2 \end{cases} \Rightarrow \tilde{\Lambda}_1 = \frac{1}{6} \frac{1}{\rho^2}$$

Система 3-х лин. однород. ур. для a_0, a_2, a_1. $\det R(\tilde{\Lambda}) = 0$ – алгебр.

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{12}\frac{1}{\rho^2} - \tilde{\Lambda} & 0 & \frac{1}{12} - \frac{1}{80}\frac{1}{\rho^2} \\ 0 & \frac{1}{6}\frac{1}{\rho^2} - \tilde{\Lambda} & 0 \\ -\frac{1}{\rho^2} & 0 & -\frac{1}{12}\frac{1}{\rho^2} - \tilde{\Lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

$\det R(\tilde{\Lambda}) = \left(\frac{1}{6}\frac{1}{\rho^2} - \tilde{\Lambda}\right)\left[\left(1 - \frac{1}{12}\frac{1}{\rho^2} - \tilde{\Lambda}\right)\cdot\left(-\frac{1}{12}\frac{1}{\rho^2} - \tilde{\Lambda}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{80}\frac{1}{\rho^2}\right)\right] = 0$

1) $m(x)$ – чет., $a_1 = 0$ $\quad -\frac{1}{\rho^2} a_0 - \left(\frac{1}{12}\frac{1}{\rho^2} + \tilde{\Lambda}\right) a_2 = 0$, $\quad a_2 = -\frac{1}{\rho^2} \frac{1}{\frac{1}{12}\frac{1}{\rho^2} + \tilde{\Lambda}} a_0$

$m(x) = a_0\left[1 + \frac{a_2}{a_0} x^2\right] = a_0\left[1 - \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{\frac{1}{12}\frac{1}{\rho^2} + \tilde{\Lambda}} x^2\right]$

$\tilde{\Lambda} + \frac{1}{12\rho^2} = x$, $\quad -(1-x)x + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{80}\frac{1}{\rho^2}\right) = 0$, $\quad x^2 - x + \frac{1}{\rho^2}(\ldots) = 0$

$x_{1,2} \approx \frac{1}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{80}\frac{1}{\rho^2}\right)}\right] = \frac{1}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{3\rho^2}} + O(1/\rho^4)\right] =$

$= \frac{1}{2}\left[1 \pm \left(1 - \frac{1}{6\rho^2}\right)\right] = \begin{cases} 1 - \frac{1}{12}\frac{1}{\rho^2} \\ \frac{1}{12}\frac{1}{\rho^2} \end{cases}$, $\quad \tilde{\Lambda}_{2,3} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{12}\frac{1}{\rho^2} \\ \frac{1}{12}\frac{1}{\rho^2} \end{cases} - \frac{1}{12}\frac{1}{\rho^2} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{6}\frac{1}{\rho^2} \\ 0 \end{cases}$

Ср. значение: $m_2(x) = a_0\left[1 - \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{12}\frac{1}{\rho^2}} x^2\right] \approx a_0\left[1 - \frac{x^2}{\rho^2}\right]$

$m_3(x) = a_0\left[1 - \rho^{-2} \cdot 1/\left[\rho^2/12\right] \cdot x^2\right] = a_0\left[1 - \frac{12}{\rho^4} x^2\right]$

+ только каскад, т.к. ч/м нет $\tilde{\Lambda}_1$

Порядок интегрирования сохр.

Escaneado con CamScanner

Date. 19.03.

2) $m(x)$ – нечет. $m(x) = a_1 x$, $\tilde{\Lambda}_1 = \frac{1}{6}\frac{1}{p^2}$, $\Lambda_1 = -\frac{4}{p^2}\tilde{\Lambda}_1 = -\frac{2}{3}\frac{1}{p^4}$

$\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial p}[\lambda p] = -\frac{2}{3}\frac{1}{p^4}$, $\lambda p = \int dp\,(-\frac{2}{3})\frac{1}{p^3} + \text{const} = \frac{1}{3}\frac{1}{p^2} + C$, $\lambda_1(p) = \frac{1}{3p^3} + \frac{C}{p}$

Следующее приближение: $\tilde{\Lambda}_2 \to \Lambda_2 = -\frac{4}{p^2}(1 - \frac{1}{6}\frac{1}{p^2})$, $\lambda_2(p) = -\frac{4}{p}\ln p + \frac{C}{p} - \frac{1}{3p^3} + O(1/p^4)$

$\tilde{\Lambda}_3 \to \Lambda_2 = 0$ и $\lambda_3(p) = \frac{C_1}{p}$.

(при $p \gg 1$)

Но это все для $p \gg 1$ (физически не интересно). И даже $m_0(x) = 1$ – ничего не говорит. $p \gg 1$

Решение:

15/III было получено на точных СФ $u_n(\xi)$, где $\xi \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

(3) $\lambda_n = \sum_m B_{mn} \int_{-1/2}^{1/2} dx\, u_n(x) u_m(x) J_m(x)$, $J_m(x) = \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, g(\xi) u_m(\xi)$.

$u_m(\xi)$ можно считать искусственно периодической с $T = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] = 1$, но $g(\xi) \to$



такую по ξ с $\xi \in [-1, 1]$ считать периодической с $T = 1$

а также нельзя. У $g(\xi)$ период $T = 2$ можно считать.

Поэтому $g(\xi)u_m(\xi)$ – периодич. с $T = 2$ и $J_m(x)$ зависит от "x", т.к. берется лишь по половине периода (!).

Аргумент, что $g(\xi) = \sum_n A_n u_n(\xi) u_n(0)$ – ведет к периоду $T = 1$ не помогает, т.к. здесь $u_n(\xi)$ нельзя делать искусственно периодической, дополняя периодич. гладко за пределами (дома) вне $\xi \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Поэтому $\lambda_n = \int_{-1/2}^{1/2} d\xi\, g(\xi) u_n(\xi) \cdot B_{nn}$, $B_{nn} = \frac{1}{u_n(0)}$ для точных СФ – не удается получить.

(15/III)

Конечно, можно вычислять $J_m(x) \to J_m(x=0)$, тогда $\lambda_n = \frac{1}{u_n(0)} \int_{-1/2}^{1/2} d\xi\, g(\xi) u_n(\xi)$ и о периодичности можно не рассуждать. Это называют $\lambda_n(x) \to \lambda_n(0)$.

Полная система гладких СФ на $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ есть $\cos(2\pi n x)$, $\sin(2\pi n x)$ $n = 0, 1, 2, \ldots$

Будет $\lambda_n = \int_{-1/2}^{1/2} d\xi\, g(\xi) \cos(2\pi n \xi)$ как 13/III 00 2. тех. легче

(при $x=0$ только)

Но и точные СФ $\cos(\pi n x)$, $\sin(\pi n x)$, $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ тоже нужно обязательно экстраполировать ($x=0$).

19/III

Полянин, с.576: $\int_0^x K(x-t) y(t)\,dt = f(x) \equiv \lambda m(x) = \int_0^x dx'\, g(x x') m(x')$

если $K(x-x') = \frac{1}{\lambda} g(x-x')$, $K(\xi) = \frac{1}{\lambda} g(\xi)$, $g(\xi) = \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{\xi^2}{\xi^2 + \rho^2}\right)$

$\hat{K}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, K(x) e^{iux} = 2\int_0^{\infty} dx\, K(x) \cos ux = \frac{4}{\pi\lambda}\int_0^{\infty} dx \ln\left(\frac{x^2}{x^2+\rho^2}\right)\cos ux =$

$= \frac{4}{\pi\lambda}\frac{\pi}{u}(e^{-\rho u} - 1)$, $\hat{F}(u) = 1 - \hat{K}(u) = 1 - \frac{4\pi}{\pi\lambda}\frac{1}{u}(e^{-\rho u} - 1)$ – полюсов $\hat{F}(u) = \infty$ нет.

Escaneado con CamScanner

Date. . .

→ Для обеих форм имп. ур. $\lambda m(x) = \int dx' g(x,x') m(x')$ и $\lambda m(x) = \int dx' g(x-x') m(x')$

с $g(x,x') = g(x-x')$ и $g_1(x,x') = g_1(|x-x'|)$, где $g(\xi) = \frac{2}{\pi\rho} \ln \frac{\xi^2}{\xi^2+\rho^2}$, $g_1(\xi) = \frac{(-4)}{\xi^2+\rho^2}$

Ядро и преобразование Фурье и преобразование Гильберта (свёртка) для интегрального преобразования функции с ее-образным ядром имп. ур., но сильно усложняет задачу, делая его не разрешимым.

Гильбертово, Гильберт-преобр. дает: $\lambda \hat{m}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \hat{g}(t,t') \hat{m}(t')$, $\hat{m}(t) = \int_{-1/2}^{1/2} dx \frac{m(x)}{t-x}$

с ядром $\hat{g}(t,t') = \frac{(-4)}{\pi\rho} \int_{-1/2}^{1/2} dx \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\rho}{t'-x}\right)}{(t-x)}$.

$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x>0 \\ -\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \pi, & x<0 \end{cases}$ и $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$ — Свинцова.

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\rho}{t'-x}\right) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{t'-x}{\rho}, & x<t' \\ -\pi - \operatorname{arctg}\frac{t'-x}{\rho}, & x>t' \end{cases}$$

$$g(t,t') = \frac{(-4)}{\pi\rho} \int_{-1/2-t'}^{1/2-t'} d\tau \frac{\operatorname{arctg}\left(-\frac{\rho}{\tau}\right)}{(t-t')-\tau} = \frac{4}{\pi\rho} \int_{-1/2-t'}^{1/2-t'} d\tau \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\rho}{\tau}\right)}{(t-t')-\tau}$$

Фурье преобр. дает $\lambda \hat{m}(q) = \int_0^{\infty} dq' \hat{g}(q,q') \hat{m}(q')$, $\hat{g}(q,q') = \frac{4}{\rho} \frac{(e^{-\rho q'}-1)}{q'} \int_{-1/2}^{1/2} dx \cos qx \cos$

$\hat{m}(q) = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, m(x) \cos qx$ - фур. рав. $m(x)$.

Его фундаментальное можно получить из $g(\xi) = \sum_n g_n \cos \pi n \xi$ (см. 16/III).
$(n = 0, 1, 2, \dots)$

$$\lambda m(x) = \sum_n g_n \cos(\pi n x) \int_{-1/2}^{1/2} dx' m(x') \cos(\pi n x'), \text{ где } m_n = \int_{\text{дед}-1/2}^{1/2} dx\, m(x) \cos(\pi n x)$$

Умн. на $\cos \pi n' x$ и $\int_{-1/2}^{1/2} dx$: $\lambda m_{n'} = \sum_n g_n \{ \int_{-1/2}^{1/2} dx \cos(\pi n x) \cos(\pi n' x) \} m_n$

$a_{nn'}$

→ $a_{nn'} = \int_{-1/2}^{1/2} dx \cos(\pi n x) \cos(\pi n' x) = \frac{\sin(n-n')\frac{\pi}{2}}{\pi(n-n')} + \frac{\sin(n+n')\frac{\pi}{2}}{\pi(n+n')} \neq 0$ только если n, n' - разной четности

$a_{nn'} = a_{n'n}$ - сим.

$a_{nn} = \frac{1}{\varepsilon_n}$

Т.е. фактор. ур-е $\lambda m_n = \sum_{n'} g_{n'} a_{n'n} m_{n'}$

Спектр определяется из $\det(g_n a_{nn'} - \lambda \delta_{nn'}) = 0$.

Недостаток: $\cos \pi n x$ не есть полная система функций на $[-1/2, 1/2]$.

(Итер. $(\lambda + 4\pi) m(x) = \int dx' [g(x,x') + 4\pi\delta(x-x')] m(x')$, $\lambda + 4\pi = \hat{\lambda} \sim \rho \ll 1$.

$\hat{\lambda} m(x) = \int dx' \hat{g}(x,x') m(x')$)

→ И только в одно. приближении получим: $\lambda_n = \frac{1}{\varepsilon_n} g_n = \int_0^1 d\xi\, g(\xi) \cos(\pi n \xi$
(для каждого нет основания)

Escaneado con CamScanner

'6 1,2 2p
' 9p2.017
C24.017

Date. 30 · 03 · Vortex - rectang. lattice с Новосадом

Вернемся к расчету Han, χ in rectangular det lat

$\xi = \frac{T_1}{T_2}$, $T_1 = 2R + d_1$, $T_2 = 2R + d_2$. $R, L, T_1 = const$, переменная $d_2 = d$. 412/III.

$\xi(d) = \frac{1 + (d_1/2R)}{1 + (d/2R)}$ — Plain Rectan-lat-vortex.mcd. $L = 80$ nm. $\varphi_H = \pi/2$

У Новосада 3 серии решеток с $2R_1 \approx 400$ nm, $2R_2 \approx 600$ nm и $2R_3 \approx 300$ nm и для каждой есть Han, Hи как функции от "d".

1) $2\bar{R}_1 = 426$ nm, $\bar{d}_1 = 380$ nm, Берем $M_S = 800$ Oe.

d_i nm	360	280	170	60	
H_{an} эксп.	750 (0,89)	700 (0,98)	640 (0,99)	—	
H_{an} calc (χ calc)	1440 (0,56)	1400 (0,57)	1290 (0,62)	990 (0,81)	с $L = 80$ nm
H_{an} calc (χ calc)	1210 (0,66)	1170 (0,68)	1090 (0,73)	860 (0,93)	с $L = 60$ nm

Oe →

2) $2\bar{R}_2 = 623$ nm, $\bar{d}_1 = 563$ nm

d_i nm	580	270	160	60	
H_{an} эксп.	650 (1,07)	610 (1,16)	550 (1,38)	320 (2,35)	
H_{an} calc (χ calc)	1150 (0,70)	1050 (0,76)	950 (0,84)	750 (1,07)	с $L = 80$ nm
H_{an} calc (χ calc)	950 (0,84)	870 (0,92)	790 (1,01)	640 (1,25)	с $L = 60$ nm

Oe →

3) $2\bar{R}_3 = 836$ nm, $\bar{d}_1 = 754$ nm

d_i nm	740	270	140	50	
H_{an} эксп. (χ эксп.)	560 (1,38)	510 (1,90)	460 (1,98)	190 (4,44)	
H_{an} calc (χ calc)	940 (0,85)	830 (0,96)	730 (1,10)	530 (1,38)	с $L = 80$ nm
H_{an} calc (χ calc)	770 (1,04)	690 (1,16)	610 (1,31)	490 (1,63)	с $L = 60$ nm

χ → H_{an}

Согласие плохое, особенно для малого R. 20/III

$L = 60$ nm, уменьшая Han, не спасает. Более или менее толстая серия с $2\bar{R} = 836$ nm с расчетом согласуется.

→ Может дело в небольшой эллиптичности дуг с длинной осью ⊥ цепочке. Тогда вклад даже небольшой эллиптичности приведет к большой дем. ориентирующей анизотропии (H_A) вдоль цепочки, уменьшит Han и увеличит χ_{an}.

Для плоского эллипсоида (Hanson JAP-99 ур Chikazumi) с осями a, b, c и $a \approx b$, $a > b$, но $a, b \gg c$: $N_a = \frac{\pi}{4}\frac{c}{a}\left[1 - \frac{(a-b)}{4a}\right]$, $N_b = \frac{\pi c}{4a}\left[1 + 5\frac{(a-b)}{4a}\right]$,

$N_a + N_b + N_c = 1$. $N_b - N_a = \frac{\pi}{4}\frac{c}{a}\cdot\frac{3}{2}\frac{(a-b)}{a} = \frac{3\pi}{8}\frac{c}{a}\frac{(a-b)}{a}$.

Escaneado con CamScanner

Date. 21. 03.



Rectan. lattice of

Это даст поле ОЛН-анизотропии $H_A = 4\pi(N_b - N_a)M_s = \frac{3}{2}\pi^2 \frac{c}{a}\frac{(a-b)}{a}M_s$

В обозначениях Ковасаца $a = 2R_x$, $b = 2R_y$, $c = L$

$H_A^{эл} = \frac{3}{2}\pi^2 \frac{L}{2R_x}\frac{R_x - R_y}{R_x}M_s = \frac{3}{4}\pi^2\left(\frac{L}{R_x}\right)\frac{\Delta R}{R_x}M_s$, $L = 80$ nm.

Типичные $\frac{\Delta R}{R_x} = \underbrace{\frac{11}{430}, \frac{14}{410}, \frac{15}{440}}_{PN1-3}, \underbrace{\frac{16}{620}, \frac{10}{620}, \frac{17}{630}, \frac{3}{640}}_{PN5-8}, \underbrace{\frac{45}{850}, \frac{3}{810}, \frac{38}{860}, \frac{30}{860}}_{PN9-12}$

Max $\frac{\Delta R}{R}$ в сериях: $\frac{14}{410} = 0{,}034$; $\frac{17}{630} = 0{,}027$; $\frac{45}{850} = 0{,}053$

Соотв. $H_A^{эл}$ (Oe): 80 Oe ; 40 Oe ; 80 Oe

→ Т.е. max вносимость из-за эллиптичности ($H_A^{эл} \neq 0$), являясь однодоменным свойством, для каждой серии решеток $\approx 10\%$ (d вели
Однако для малых периодов вдоль ректан. оси O_x - D_x (d мало), преобразовать эллиптическую полосу, т.к. сами H_{an}, H_n малы.

21/III Для выделения m.coupling эффектов в решетке vortex domains
Вернемся к расчету 14/IV 00 г. с MFA.

Для изолир. доменов $\chi_{is} = \frac{1}{2a}$, $W(s) = W(0) - hs + as^2$

Для m.coupled доменов: $\chi_{int} = \frac{1}{2a'}$, $W_{m.int}(s) = W(0) - hs + a's^2$

MFA: $H \to H + \lambda\langle M\rangle$, $\lambda > 0$, (a' → A(φ_H) для тетрагон. реш. 8/III)

с $\lambda = \frac{1}{\chi_{is}} - \frac{1}{\chi_{int}} = 2(a - a')$. $\chi_{int} = \frac{\chi_{is}}{1 - \lambda\chi_{is}}$

$s_0 = \frac{1}{2a}h$, $s_0 = 1$ дает $h_{an}^{is} = 2a$ ($h = H/M_s$) для изолир. доменов, или

$s_0 = \frac{1}{2a'}h \Rightarrow h_{an}^{coupl} = 2a'$ для взаимод. решетки.

$h_{an}^{coupl} = \frac{1}{\chi_{int}} = \frac{1}{\chi_{is}} - \lambda = h_{an}^{is} - \lambda$, $h_{an}^{coupl} = h_{an}^{isol} - \lambda$ и $\frac{h_{an}^{coup}}{h_{an}^{is}} = \frac{\chi_{is}}{\chi_{int}}$

$\frac{H_{an}^{coup}}{H_{an}^{is}} = \frac{h_{an}^{coupl}(\beta, R, d)}{h^{is}(\beta, R)} = 1 - \frac{\lambda(\beta, R, d)}{h^{is}(\beta, R)}$ в приведен. единицах M_s вычисл. по коэф

$\lambda(\beta, R, d) = \lambda(\beta, d/R) = 4\pi\left[F(\beta) - F(\beta, d/R)\right]$ как 14/IV 00 г. $F(\beta) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} f(\beta t)$

но для тетрагон. решетки $F(\beta, \frac{d}{R}) \to \mathbb{F}(\beta, \frac{d}{R}, \varphi_H) = \frac{4\pi}{T_1 T_2}\sum_k \frac{f(kL)}{k^2} J_1^2(kR)\cos^2(\varphi_k^R - \varphi_H)$ сом. 12/III.

$F(\beta, \frac{d}{R} \to \infty) = F(\beta)$. Вдоль осей $\varphi_H = \pi/2$.

$\frac{H_{an}^{coup}(\beta, R, d)}{H_{an}^{is}(\beta, R)} = 1 - \frac{4\pi\left[F(\beta) - \mathbb{F}(\beta, d/R, \pi/2)\right]}{4\pi F(\beta) - (R_0/R)^2}$

Escaneado con CamScanner

H_d - long-range dipolar coupling

d/R	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
Isol H_i^x/H	0,134	116	101	088	078	069	061	0,049	040	0,033	027	023	020	017
H_d^x/H	0,346	216	160	127	104	088	075	0,057	0,045	036	029	024	021	017

Date.

Если $\left(\frac{H_0}{R}\right)^2$ применяется не сразу, а $4\pi F(\beta)$ и $4\pi F$, то $\frac{H_{an}^{coup}(\beta, d/R)}{H_{an}^{is}(\beta)} = \frac{F(\beta, d/R, \pi/2)}{F(\beta)}$

1) $2\bar{R}_1 = 423$ nm, $\beta = \frac{80\text{ nm}}{211{,}5\text{ nm}} = 0{,}378$, $\bar{d}_1 = 380$ nm

L = 80 nm, rect. array of cylindrical dots

d, nm	380	360	280	170	140	60	20	0
$d/\bar{R}$	1,80	1,70	1,32	0,80	0,473	0,284	0,095	0
Calc → $H_{an}^{coup}/H_{an}^{is}$	0,946	0,941	0,913	0,840	0,745	0,649	0,488	0,357
exp →								

2) $2\bar{R}_2 = 623$ nm, L = 80 nm, $\bar{d}_1 = 563$ nm, $\beta = \frac{80}{311{,}5} = 0{,}257$

L = 80 nm

d, nm	580	560	410	270	200	160	100	60	20	0
$d/\bar{R}$	1,86	1,80	1,32	0,867	0,642	0,514	0,321	0,193	0,064	0
Calc → $H_{an}^{coup}/H_{an}^{is}$	0,957	0,954	0,924	0,871	0,826	0,789	0,739	0,676	0,483	0,389

3) $2\bar{R}_3 = 836$ nm, $\bar{d}_1 = 754$ nm, $\beta = \frac{80}{418} = 0{,}191$

L = 80 nm

d, nm	754	740	550	362	270	200	140	100	50	20	0
$d/\bar{R}$	1,80	1,77	1,32	0,867	0,646	0,478	0,335	0,239	0,120	0,048	0
$H_{an}^{coup}/H_{an}^{is}$	0,959	0,957	0,931	0,883	0,842	0,796	0,740	0,686	0,589	0,521	0,414

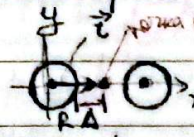
Строим $\frac{H_{an}^{coup}(\beta, d/R)}{H_{an}^{is}(\beta)}$ как функцию от interdot spacing $\frac{d}{R}$ и/или β = const

Файл Han – Rect – Lat. ppj.

→ Написание статьи – заготовки для конф. в Тайпеи 22/III

Файл Nov – VortRectLat. doc

Dip. approximation for m. coupling in dot array



При $\frac{d}{R}$ не очень малом и $S \ll 1$ каждый диск в array можно представить как магнитный диполь с $\vec{\mu} = \langle M \rangle V_d$. Тогда его stray field



будет $\vec{H}_d = \frac{3\vec{n}(\vec{\mu}\vec{n}) - \vec{\mu}}{r^3}$, $\vec{r} = r\vec{n}$ – расстояние от центра диска до точки наблюдения. Если $\vec{r} \parallel Ox$ – short range и $\vec{\mu} \parallel Ox$, то $H_d^x = \frac{2\mu}{r^3} = 2\frac{\langle M \rangle V_d}{(R+\Delta)^3} = 2\pi\langle M \rangle \beta \frac{1}{(1+\frac{\Delta}{R})^3}$

$\langle M \rangle_{V_d} = \chi H$ для $S \ll 1$. Можно $\Delta = R + d$ – в центре соседнего диска.

$\left(H_d^x/H\right) = 2\pi\beta \frac{\chi}{(1+\frac{\Delta}{R})^3}$. Можно $\chi = \chi_{isol}(\beta, R)$ или $\chi = \chi_{int}(\beta, R, d)$ для array.

→ Тогда поле от изолир. диска в месте расположения соседнего диска: $\frac{H_d^x}{H} = 2\pi\beta \frac{\chi_{is}(\beta,R)}{(2+d/R)^3}$. Поле от данного диска на сосед. диск в array (в решетке) с учетом взаимодействия: $\frac{H_d^x}{H} = 2\pi\beta \frac{\chi_{int}(d)}{(2+d/R)^3}$ см. также выше.

Escaneado con CamScanner

Date. 23 · 03 · SW в rectan. dots

Вернемся к задаче SW на фоне в общем случае неоднородного осн. состояния $\vec{M}_0(\vec{r})$ (см. расчеты August'99).

В лин. прибл. $\vec{M}_0 = M_0\vec{j} + \delta\vec{M}_0(r)$ т.к. $\vec{H} \parallel Oy$ полагаем. $\delta M_0^{x,z} = M_0^{x,z} \ll M_s$.

$\langle \vec{M}_0(r) \rangle_V = M_s$, $\langle \delta M_0^{x,z}(r) \rangle = 0$, $\langle \delta M_0^y \rangle$ может и $\neq 0$, но в лин. прибл. этим членом пренебрегаем.

$\vec{M}_0(r) = \left(\delta M_0^x(r),\ M_s + \delta M_0^y(r),\ \delta M_0^z(r)\right) = \left(M_0^x(r),\ M_s + \delta M_0^y,\ M_0^z(r)\right)$

Отметим, что сначала задача $\vec{M}_0(r) \times \vec{H}_i(r) = 0$ решена в лин. по $\delta M_0^\alpha(r)$ приближении, например методом Усова. $\vec{H}_{i(r)} = F\left[\vec{M}_0(r)\right]$.

Динам. задача линеаризуется $\vec{M}(r,t) = \vec{M}_0(r) + \vec{m}(\vec{r},t)$ и в лин. приближении по $\delta M_0^\alpha(r)$ и $\vec{m}_\alpha(r,t)$ получим УД (18/VIII 99г.):

$\langle \vec{M}_0 \rangle \parallel Oy$, $\vec{H} \parallel Oy$

$$\begin{cases} -i\omega m_x = M_s h_z + m_y H_d^{(0)z} - m_z\left[H + H_d^{(0)y}\right] \\ -i\omega m_y = m_z H_d^{(0)x} - m_x H_d^{(0)z} \\ -i\omega m_z = -M_s h_x + m_x\left[H + H_d^{(0)y}\right] - m_y H_d^{(0)x} \end{cases} \quad (*)$$

$\vec{H}_d^{(0)}(r) = F\left[M_s\vec{j}\right]$ - ...

Здесь $\vec{h} = \vec{h}_{ex} + \vec{h}_d$, $\vec{h}_{ex} = d\nabla^2\vec{m}$, $\vec{h}_{d(r)} = F[\vec{m}(r,t)] = \int d^3r'\,\hat{G}(r,r')\vec{m}(r',t)$

т.е. $\vec{h}$ - имеет чисто дипол.-дипол. происхождение.

Эта система УД (*) в предположении $\delta\vec{M}_0(r)$ и $\vec{m}(r,t)$ - одного порядка малости. Конечно, это может быть верно лишь при $H > M_s$ или для доменов не очень сложной формы (для rect. dots оно может и нарушаться (!) если H мало).

Свойства УД (*): она такая, как будто $\delta\vec{M}_0(r) = 0$ и $\vec{M}_0(r) = M_s\vec{j} = \text{const}$ - вот намагничен до насыщения. Но все же $\vec{H}_d^{(0)}(r)$ - зависит от $\vec{r}$ и имеет $H_d^{(0)x}$, $H_d^{(0)y}$, $H_d^{(0)z}$ - три компоненты в общем случае.

И даже если h_{ex} пренебречь, эта система сложна из-за $\vec{h}(r) = \int d^3r'\hat{G}(r,r')\vec{m}(r')$ магнитост. нелокальности в УД для m_y.

Если в (*) положить $\omega = 0$ и считать $H_d^{(0)x,z} = \delta H_d^{(0)x,z}$ малыми как Усов'94, то

$$\begin{cases} M_s\left\{d\nabla^2 m_z + \int d^3r' G_{zd} m_d(r')\right\} - m_z\left(H + H_d^{(0)y}\right) = 0 \\ -M_s\left\{d\nabla^2 m_x + \int d^3r' G_{xd} m_d(r')\right\} + m_x\left(H + H_d^{(0)}\right) = 0 \end{cases}$$

, что после $\times M_s$, $C = dM_s^2$, $\lambda = -M_s\left(H + H_d^{(0)y}\right)$

переходит в ур-я Брауна из Усов-JMMM'94 - Eq.(5).

Если не только $\omega = 0$ и $H_d^{(0)x,z}$ малы, а и $m_y \to M_s$ (переход к стационар. задаче поиска $M_0^x(r) = m_x(r)$ и $M_0^z(r) = m_z(r)$), то получим ур-я Усова из JMMM 130 (94) - Eq.(7). Только надо мою Oz → Oy как у Усова.

Escaneado con CamScanner

Date. . . $\vec{M}_0 = (0, M_{0,0}^y, 0)$ См. 31/XII 99 г. – поля, отн. центра доза

Самосогл. $H_d^{(0)d}(x,y,z)$ и/ли $M_s\vec{j}$ – источники ($\vec{M}_0 \parallel Oy$), $\vec{H}_d^{(0)}(r) = F[M_s\vec{j}]$:

$H_d^{(0)y}(x,y,z)$ – гладкая функция от x, y, z

$H_d^{(0)x}(x,y,z)$ – негладкая функция y, негл. ф. от x, гладкая ф. от z

$H_d^{(0)z}(x,y,z)$ – негладкая фун-я y и негл. ф. от z, гладкая ф. от x

При $\langle\dots\rangle_z$ будет $\langle H_d^z(\vec{r})\rangle_z = 0$, но $\langle H_d^x(\vec{r})\rangle_z \neq 0$.

Для конечного дота $H_d^z(r)$ – самая большая компонента $\sim 4\pi M_s$ (?) поэтому $\langle H_d^z\rangle_z = 0$ как то некорректно смотрится. нет, ведь $H_d^z \sim M_{zy}$

Исключим из УД (*) m_y: $m_y = \frac{i}{\omega}\left[m_z H_d^{(0)x} - m_x H_d^{(0)z}\right]$ как 27/X 99 г.

$$\begin{cases} -i\omega m_x = M_s h_z - m_z\left[H + H_d^{(0)y}\right] + \frac{i}{\omega}\left[m_z H_d^{(0)x} - m_x H_d^{(0)z}\right] H_d^{(0)z} \\ -i\omega m_z = -M_s h_x + m_x\left[H + H_d^{(0)y}\right] - \frac{i}{\omega}\left[m_z H_d^{(0)x} - m_x H_d^{(0)z}\right] H_d^{(0)x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -i\omega\left[1 - \left(\frac{H_d^{(0)z}}{\omega}\right)^2\right] m_x = M_s h_z - m_z\left[H + H_d^{(0)y}\right]\left[1 - \frac{i}{\omega}\frac{H_d^{(0)x} H_d^{(0)z}}{(H + H_d^{(0)y})}\right] \\ -i\omega\left[1 - \left(\frac{H_d^{(0)x}}{\omega}\right)^2\right] m_z = -M_s h_x + m_x\left[H + H_d^{(0)y}\right]\left[1 + \frac{i}{\omega}\frac{H_d^{(0)x} H_d^{(0)z}}{(H + H_d^{(0)y})}\right] \end{cases} \quad (*')$$

Если $\langle\dots\rangle_z$ и считать m_y не зависит от z, то из (*) (исходной) можно получить:

$$\begin{cases} -i\omega m_x = M_s \bar{h}_z - m_z\left[H + \langle H_d^{(0)y}\rangle_z\right], \quad \langle H_d^{(0)z}\rangle_z = 0 \\ -i\omega\left[1 - \left(\frac{\langle H_d^{(0)x}\rangle_z}{\omega}\right)^2\right] m_z = -M_s \bar{h}_x + m_x\left[H + \langle H_d^{(0)y}\rangle_z\right] \end{cases}$$ как 18/VIII 98

⇒ Надо посчитать $H_d^{(0)x,z}$ и $\langle H_d^{(0)x}\rangle_z$ для реального тестан. dot и посмотреть на них. (см. 29/VIII)

Вообще УД (*) можно рассм. как вынужденные колебания $\vec{m}$ в неоднородном внеш. поле $\vec{H}_d^{(0)}(\vec{r})$, или $\delta\vec{H}_d^{(0)}(r) = \left(H_d^{(0)x}, H_d^{(0)y} - \langle H_d^{(0)y}\rangle, H_d^{(0)z}\right)$ т.к. $\langle H_d^{(0)y}\rangle_V$ не влияет просто добавляясь к $H = H_y$ external.

Тогда однородная сист. УД для собств. частот, соответствующая (*) есть:

$$\begin{cases} -i\omega m_x = M_s h_z - m_z\left[H + \langle H_d^{(0)y}\rangle_V\right] \\ -i\omega m_z = -M_s h_x + m_x\left[H + \langle H_d^{(0)y}\rangle_V\right] \end{cases} \quad (**)$$

→ Здесь можно вместо $\langle H_d^{(0)y}\rangle_V$ использовать $\langle H_d^{(0)y}\rangle_z$ (и $\langle h_z\rangle_z$) или даже $H_d^{(0)y}(\vec{r})$, ведь неоднородность $H_d^{(0)y}(\vec{r})$ не портит сист. (**) при разложении по Сф. Ф-ю и элементы задачи сложнее. Именно (**) раньше и исследовалась.

Escaneado con CamScanner

Date. 24 · 03 · SW & exact data

Все же $\frac{\delta M^{x,z}}{M_s} \ll 1$, а это условие может и нарушаться в случае $\delta M^{x,z}$ любой формы.

Запишем ряд (*) по степеням $\frac{\delta M^{x,z}}{M_s}$ и ограничимся членами нулевого порядка:

$$\begin{cases} -i\omega\left[1 - \frac{\langle (h_d^{(0)x})^2 \rangle_s}{\omega^2}\right] m_x = M_s h_z - m_z\left[H + \langle H_d^{(0)} \rangle_s\right] & (1) \\ -i\omega\left[1 - \frac{\langle (h_d^{(0)z})^2 \rangle_s}{\omega^2}\right] m_z = -M_s h_x + m_x\left[H + \langle H_d^{(0)} \rangle_s\right] & (2) \end{cases}$$

$m_x(\vec{\rho}) = \sum_n \lambda_n^x u_n(\vec{\rho})$, $m_z(\vec{\rho}) = \sum_n \lambda_n^z u_n(\vec{\rho})$, $u_n(\vec{\rho})$ – ортонорм. полная система функций

$\vec{h}_d(\vec{\rho}) = \int d^2\rho' \hat{G}(\vec{\rho},\vec{\rho}')\vec{m}(\vec{\rho}')$, где отличны только $G_{xx}(\rho\rho') = \langle G_{xx}(r,r') \rangle_{zz}$ и $G_{zz}(\rho\rho') = \langle G_{zz}(r,r') \rangle_{zz}$

(1): $-i\omega\left[1 - \frac{1}{\omega^2}\langle \dots \rangle_s\right] \sum_n \lambda_n^x u_n(\vec{\rho}) = M_s\left[4\pi^2 \sum_n \lambda_n^z u_n(\vec{\rho}) + \int d^2\rho' G_{zz}(\rho\rho') \sum_n \lambda_n^z u_n(\vec{\rho}')\right] - \sum_n \lambda_n^x \left[H + \langle H_d^{(0)} \rangle_s\right] u_n(\vec{\rho})$

$\int d^2\rho\, u_{n'}(\vec{\rho})$: $-i\omega \sum_n \lambda_n^x \int \left[\frac{1}{s}\right] u_n(\vec{\rho}) u_{n'}(\vec{\rho}) d^2\rho = M_s\left[4\pi \sum_n \lambda_n^z \int d^2\rho\, u_n(\vec{\rho}) u_{n'}(\vec{\rho}) + \int d^2\rho\, u_{n'}(\vec{\rho}) \int d^2\rho' G_{zz}(\rho\rho') u_n(\vec{\rho}')\right] - \sum_n \lambda_n^x \int d^2\rho\, u_{n'}(\vec{\rho})\left[H + \langle H_d^{(0)} \rangle_s\right] u_n(\vec{\rho})$

$B^x_{nn'} = \int d^2\rho \left[\frac{1}{s}\right] u_n(\vec{\rho}) u_{n'}(\vec{\rho}) = \int d^2\rho \left[1 - \frac{1}{\omega^2}\langle (h_d^{(0)x})^2 \rangle_s\right] u_n(\vec{\rho}) u_{n'}(\vec{\rho})$ – интегралы по площади

$-i\omega \sum_n \lambda_n^x B^x_{nn'}(\omega) = \sum_n \lambda_n^z (h_{ex})_{nn'} + \sum_n \lambda_n^z Z_{nn'} - \sum_n \lambda_n^z \left[H\delta_{nn'} + H_{nn'}\right]$ – матричные элементы

$-i\omega \sum_n \lambda_n^z B^x_{nn'}(\omega) = -\sum_n \lambda_n^x (h_{ex})_{nn'} - \sum_n \lambda_n^x X_{nn'} + \sum_n \lambda_n^x \left[H\delta_{nn'} + H_{nn'}\right]$

в обозначениях Зависобина PRB-SW.

В диаг. представлении:
$$\begin{cases} -i\omega \lambda_n^x B^z_{nn}(\omega) = \lambda_n^z \left[(h_{ex})_{nn} + Z_{nn} - (H + H_{nn})\right] \\ -i\omega \lambda_n^z B^x_{nn}(\omega) = -\lambda_n^x \left[(h_{ex})_{nn} + X_{nn} - (H + H_{nn})\right] \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -i\omega B^z_{nn}(\omega) & -[-N_{nn} - Q_{nn}] \\ [-N_{nn} - P_{nn}] & -i\omega B^x_{nn}(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_n^x \\ \lambda_n^z \end{pmatrix} = 0, \quad \det R(\omega) = -\omega^2 B^x_{nn}(\omega) B^z_{nn}(\omega) + [N_{nn} + P_{nn}][N_{nn} + Q_{nn}] = 0$$

Сов. ур. решение $\omega^2 B^x_{nn}(\omega) B^z_{nn}(\omega) = [N_{nn} + P_{nn}][N_{nn} + Q_{nn}]$ –

в согласии со Eq(21)-PRB-SW. $B^\alpha_{nn}(\omega) = \int d^2\rho \left[1 - \frac{1}{\omega^2}\langle (H_d^{(0)\alpha})^2 \rangle_s\right] u_n^2(\vec{\rho}) =$

$= 1 - \frac{1}{\omega^2} \int d^2\rho \langle (H_d^{(0)\alpha})^2 \rangle_s u_n^2(\vec{\rho}) = 1 - \frac{I_\alpha}{\omega^2}$

Escaneado con CamScanner

Date. . . SW wires

$$\omega^2\left[1-\frac{I_x}{\omega^2}\right]\left[1-\frac{I_z}{\omega^2}\right]=(\omega_n^0)^2,\quad (\omega_n^0)^2=[N_{nn}+P][N_{nn}+Q_{nn}]$$

При $I_{x,z}/\omega^2 \ll 1$: $[\cdot][\cdot]=1-\frac{I_x}{\omega^2}-\frac{I_z}{\omega^2}+O(\frac{1}{\omega^4})=1-\frac{1}{\omega^2}(I_x+I_z)$

$$\omega_n^2=(\omega_n^0)+I_x+I_z=(\omega_n^0)^2+\int d^2\vec{\rho}\,\left\langle (H_d^{(0)x})^2+(H_d^{(0)z})^2\right\rangle_z u_n^2(\vec{\rho})$$

Закон SW: $\omega_n^2=[N_{nn}+P_{nn}][N_{nn}+Q_{nn}]+\int d^2\vec{\rho}\left\langle (H_d^{(0)x})^2+(H_d^{(0)z})^2\right\rangle_z u_n^2(\vec{\rho})$

здесь под $u_n(\vec{\rho})$ можно понимать СФ однород. задачи (**) с $\left(\frac{\partial u_n}{\partial n}\right)_S=0$.

Очевидно, что член $H_d^{(0)x,z}\neq 0$ в доле приводит к росту частот SW, сильно основной.

SW-wires Переход к wires. $\lambda m(x)=\int_{-1/2}^{1/2} dx'\, g(x,x')\,m(x')$, $g(\xi)=\frac{2}{p}\ln\left(\frac{\xi^2}{\xi^2+p^2}\right)$

Разложим $m(x')=m(x)+(x'-x)m'(x)+\dots$ взяли $x'=x$, т.к. именно эта точка (окрестность) дает осн. вклад в $\int dx'(\dots)$ при $p\to 0$.

$$\lambda m(x)=\int_{-1/2}^{1/2} dx'\, g(xx')\left[m(x)+(x'-x)m'(x)+\dots\right]=\int_{-1/2}^{1/2} dx' g(xx')\sum_{s=0}^{[s]}\frac{m^{(s)}(x)}{s!}(x'-x)^s=$$

$$=\sum_{s=0}\frac{1}{s!}I_s(x)\,m^{[s]}(x)\ -\ \text{дифф. пр. на } m(x),\quad I_s(x)=\int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, g(\xi)\,\xi^s\ \text{(см. 20/II 002.)}$$

$$\to I_0(x)=\int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, g(\xi)=\frac{2}{p}\int d\xi\ln\left(\frac{\xi^2}{\xi^2+p^2}\right)=\frac{2}{p}\left[2\xi\ln\xi-\xi\ln(\xi^2+p^2)-2p\,\mathrm{arctg}\frac{\xi}{p}\right]'=$$

$$=\frac{2}{p}\left[\xi\ln\left(\frac{\xi^2}{\xi^2+p^2}\right)-2p\,\mathrm{arctg}\frac{\xi}{p}\right]_{-1/2-x}^{1/2-x}=\left[\xi g(\xi)-4\,\mathrm{arctg}\frac{\xi}{p}\right]_{-1/2-x}^{1/2-x}\ -\ \text{нет. по } x$$

$$\to I_1(x)=\int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, g(\xi)\,\xi=-\frac{1}{p}\left[(\xi^2+p^2)\ln(\xi^2+p^2)-\xi^2\ln\xi^2\right]_{-1/2-x}^{1/2-x}=-\frac{1}{p}\left[-\frac{1}{2}p\xi^2 g(\xi)+p^2\ln(\xi^2+p^2)\right]=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\xi^2 g(\xi)-p\ln(\xi^2+p^2)\right]_{-1/2-x}^{1/2-x}\ -\ \text{нечет. по } x.$$

0-прибл.: $\lambda m(x)=I_0(x)m(x)$, СФ $-m(x)$ любая, но $\lambda=\lambda(x)=I_0(x)$ - СЗ функционала x".

1-прибл.: $\lambda m(x)=I_0(x)m(x)+I_1(x)m'(x)$, $m'(x)=\frac{\lambda-I_0(x)}{I_1(x)}m(x)$

$$\ln m(x)=\int dx\,\frac{\lambda-I_0(x)}{I_1(x)},\quad m(x)=C\exp\left\{\int_0^x dx'\,\frac{\lambda-I_0(x')}{I_1(x')}\right\}\ -\ \text{общее реш.}$$

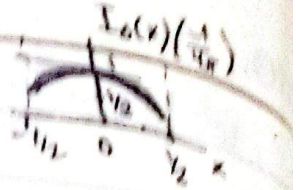
Если требовать $m'(\pm 1/2)=0$, то $\left\{\frac{\lambda-I_0(\pm 1/2)}{I_1(\pm 1/2)}\right\}m(\pm\tfrac{1}{2})=0$, т.е. либо $m(\pm 1/2)=0$ — особен. нет, либо СЗ $\lambda=I_0(\pm 1/2)$. $\lambda=\left[\xi g(\xi)-4\,\mathrm{arctg}\frac{\xi}{p}\right]_0^1=g(1)-4\,\mathrm{arctg}\frac{1}{p}\underset{p\to 0}{\approx}$

$$\approx\frac{2}{p}\ln\left(\frac{1}{1+p^2}\right)-4\,\mathrm{arctg}\frac{1}{p}=\frac{2}{p}(-1)\cdot p^2-4\left[\frac{\pi}{2}-p\right]=-2\pi+2p\ (?\ \text{Вот это да!})\ \to$$

Escaneado con CamScanner

SW - wires

Date. . .



Тогда имеем $\lambda_0 = I_0(0) = -4\pi + 8\rho$, при $\rho \ll 1$.

Тогда ясно, что при $\rho \to 1$ $\lambda \to 0$, но найти λ из условия $m'(0) = 0$, также можно для $\rho \ll 1$ 2-го порядка малости. А уравнение 2-го порядка

$$\lambda m(x) = I_0(x) m(x) + I_1(x) m'(x) + \frac{1}{2} I_2(x) m''(x)$$

— решать будем по степеням, взяв от $I_0(x)$ степень.

В разложении вблизи $x=0$ как $10-11/\sqrt{\pi}$ получаем квадратичное, а разложение $I_2(x)$ по ρ нечетное вблизи $|x| = 1/2$ (найдем разложение ρ $|x| \to 1/2$)

При требовании $m'(\pm 1/2) = 0$ получим $\lambda = I_0(\pm\frac{1}{2}) + \frac{m''(\pm 1/2)}{m(\pm 1/2)} I_2(\pm\frac{1}{2})$

$$\Rightarrow I_2(x) = \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, g(\xi)\xi^2 = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}\xi^3 g(\xi) - 2\rho\xi + 2\rho^2 \operatorname{arctg}\frac{\xi}{\rho}\right]_{-1/2-x}^{1/2-x} =$$

(см. $10/\sqrt{\pi}$ сос.)

$$= \left[\frac{1}{3}\xi^3 g(\xi) - \frac{4}{3}\rho\xi + \frac{4}{3}\rho^2 \operatorname{arctg}\frac{\xi}{\rho}\right]_{-1/2-x}^{1/2-x}$$

При $\rho \to 0$ (но $|x| \neq 1/2$), с учетом $\lim_{\rho\to 0} g(\xi) = -4\pi\left[\delta(\xi) + \frac{\rho}{2}\frac{1}{\xi^2}\right]$ получим

$$I_2(x, \rho\to 0) = \left[\frac{1}{3}\xi^3(-4\pi)\left[\delta(\xi) + \frac{\rho}{2}\frac{1}{\xi^2} + \dots\right] - \frac{4}{3}\rho\xi + \frac{4}{3}\rho^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\rho}{\xi}\right)\right]_{-1/2-x}^{1/2-x} =$$

$$= \left[\frac{(-4\pi)}{6}\rho\xi - \frac{4}{3}\rho\xi\right]_{\cdot} = -\frac{2}{3}\rho(\pi+2)\cdot\xi\Big|_{-1/2-x}^{1/2-x} = -\frac{2}{3}(\pi+2)\rho \quad \text{как } 10/\sqrt{\pi}\text{ сос.}$$

Верно ли $g(\xi) \underset{\rho\to 0}{=} -4\pi\left[\delta(\xi) + \frac{\rho}{2}\frac{1}{\xi^2} + \dots\right]$ — см. $7/\sqrt{\pi}$ сос., Нет, см. далее.

$$g(\xi) = -\frac{4}{\rho}\int_0^\rho dz\, \frac{z}{z^2+\xi^2}, \quad \delta(\xi) = \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\rho}{\rho^2+\xi^2}. \qquad g(\xi) = -\frac{4}{\rho}F(\rho)$$

Рассм. $F(\rho) = \int_0^\rho dz\, \frac{z}{z^2+\xi^2}$, $F'(\rho) = \frac{\rho}{\rho^2+\xi^2}$, $F''(\rho) = \frac{\rho^2+\xi^2-\rho\cdot 2\rho}{(\rho^2+\xi^2)^2}$

$$F(\rho) \underset{\rho\to 0,\ \text{но}\ \xi\neq 0}{=} F(0) + F'(\rho\to 0)\cdot\rho + F''(\rho\to 0)\frac{1}{2}\rho^2 = \left(\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho}{\rho^2+\xi^2}\right)\cdot\rho + \left[\frac{1}{\rho^2+\xi^2} - \frac{2\rho^2}{(\rho^2+\xi^2)^2}\right]\frac{1}{2}\rho^2$$

$F''(\rho\to 0) = \lim_{\rho\to 0}\left[\frac{1}{\rho^2+\xi^2} - \frac{2\rho^2}{(\rho^2+\xi^2)^2}\right] = Y_{\xi^2}$, если $\xi \neq 0$. $F'(\rho\to 0) = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho}{\rho^2+\xi^2} = \pi\delta(\xi)$

$$F(\rho) \underset{\rho\to 0}{=} \pi\delta(\xi)\cdot\rho + \frac{1}{2}\rho^2\cdot\frac{1}{\xi^2} + \dots \Rightarrow g(\xi) \underset{\rho\to 0}{=} -\frac{4}{\rho}F(\rho) = -4\pi\delta(\xi) - 2\rho\frac{1}{\xi^2} + \dots$$

Верное $7/\sqrt{\pi}$ сос., где было $g(\xi) = -4\pi\left[\delta(\xi) + \frac{\rho}{2}\frac{1}{\xi^2} + \dots\right]$.

Поэтому верно $I_2(x, \rho\to 0) = \left[\frac{1}{3}\xi^3\left[-4\pi\delta(\xi) - \frac{2\rho}{\xi^2}\right] - \frac{4}{3}\rho\xi\right]_{-1/2-x}^{1/2-x} = \left[-\frac{2}{3}\rho\xi - \frac{4}{3}\rho\xi\right]_{\cdot} = -2\rho\xi$

$I_2(x, \rho\to 0) = -2\rho\cdot$ С отличием от $10/\sqrt{\pi}$ сос.

И вообще $I_s(x, \rho\to 0) \underset{\text{с точн. до } \rho^2}{=} \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, \xi^s\left[-4\pi\delta(\xi) - \frac{2\rho}{\xi^2} + \dots\right] = -4\pi\delta_{\dots} - 2\rho\int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, \xi^{s-2}$, $|x| \neq 1/2$.

Escaneado con CamScanner

Date.

Случаи $s=0$ и $s=1$ особые: $I_0(x,\rho\to 0) = -4\pi - 2\rho\int\frac{d\xi}{\xi^2} = -4\pi + 2\rho\frac{1}{\xi}\Big|_{-1/2-x}^{1/2-x} = -4\pi + 2\rho\frac{1}{1/2-x} + 2\rho\frac{1}{1/2+x}$

$I_1(x,\rho\to 0) = -2\rho\int\frac{d\xi}{\xi} = -2\rho\ln\xi\Big|_{-1/2-x}^{1/2-x} = -2\rho\ln\left|\frac{1/2-x}{1/2+x}\right|$

$I_{\substack{s\\(s\geq 2)}}(x,\rho\to 0) = -2\rho\int d\xi\,\xi^{s-2} = -2\rho\frac{1}{(s-1)}\xi^{s-1}\Big|_{-1/2-x}^{1/2-x} = -2\rho\frac{1}{(s-1)}\left[(1/2-x)^{s-1} - (-1)^{s-1}(1/2+x)^{s-1}\right]$

В пределе $I_{\substack{s\\(s\geq 2)}}(x=0,\rho\to 0) = -2\rho\frac{1}{(s-1)}\left[1-(-1)^{s-1}\right]\frac{1}{2^{s-1}} = -2\rho\frac{1}{(s-1)2^{s-2}}$ при s-чет., иначе $=0$.

Это $I_{s\,(s\geq 2)}$ совпадает с $I_{\substack{s'\\(s'\geq 1)}}(\rho) = -2^{3-2s'}\frac{1}{(2s'-1)}\rho$ от 17/III 00г., $s=2s'$, которое и привело к хорошей формуле λ_n^{si}.

$I_s(x,\rho) = \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, g(\xi)\xi^s$ можно разложить по ρ если $s\geq 2$ $\forall x$.

Лишь $I_0(x,\rho)$ и $I_1(x,\rho\to 0)$ разложения (по $\rho\to 0$) не находят при $|x|=1/2$ – на границах дела.

Ясно, что $I_s(x=0,\rho)$ прекрасно раскл. по ρ (s-чет. только остаются).

$I_0(x,\rho\to 0) = -4\pi + 2\rho\frac{1}{1/4-x^2} + O(\rho^2)$ и $I_1(x,\rho\to 0) = -2\rho\ln\left(\frac{1/2-x}{1/2+x}\right) + O(\rho^2)$, $|x|\neq 1/2$

Сами точные $I_0(x,\rho)$ и $I_1(x,\rho)$ сингулярности при $|x|=1/2$ не имеют, хотя и неаналитичны вблизи точек $|x|=1/2$ с поведением $I_0(x)\sim\xi\ln\xi$, $I_1(x)\sim\xi^2\ln\xi$, ($\xi = 1/2-x$) для нечетн. членов.

Диф. ур. с точностью до $m''(x)$ и с членами $\sim\rho$ (уточняет дир. ур. 10/VIII 00г.):

$$\lambda m(x) = \left[-4\pi + \frac{2\rho}{(1/4-x^2)}\right]m(x) - 2\rho\ln\left(\frac{1/2-x}{1/2+x}\right)m'(x) - \rho m''(x)$$

Физически разумно искать вид φ хоть вблизи $x=0$ для плавных $m(x)$.

Тогда $I_0(x\to 0,\rho\to 0) = -4\pi + \frac{2\rho}{1/4-x^2} = -4\pi + 8\rho + 32\rho x^2 = I_0(0,\rho) + 32\rho x^2$

$I_1(x\to 0,\rho\to 0) = -2\rho\ln\left(\frac{1/2-x}{1/2+x}\right) = (-2\rho)(-2)\,\mathrm{Arth}(2x) = 8\rho x$, $I_2(x,\rho\to 0) = -2\rho$.

$$-\left[\lambda + 4\pi - 8\rho - 32\rho x^2\right]m(x) + 8\rho x\cdot m'(x) - \rho m''(x) = 0.$$

а) φ-четная. $m(x) = m(0) + \frac{1}{2}m''(0)x^2$

$$-\left[\lambda+4\pi-8\rho-32\rho x^2\right]\left[m(0)+\tfrac{1}{2}m''(0)x^2\right] + 8\rho x\cdot m''(0)x - \rho m''(0) = 0$$

x^0: $-\left[\lambda+4\pi-8\rho\right]m(0) - \rho m''(0) = 0$

x^2: $-\left[\lambda+4\pi-8\rho\right]\frac{1}{2}m''(0) + 32\rho m(0) + 8\rho m''(0) = 0 \to 32\rho m(0) + \left[-\frac{1}{2}(\lambda+4\pi) + 12\rho\right]m''(0) = 0$

Сек. ур. с $\lambda' = \lambda + 4\pi$ $\det\begin{pmatrix} -\lambda'+8\rho & -\rho \\ 32\rho & -\frac{1}{2}\lambda'+12\rho\end{pmatrix} = (8\rho-\lambda')(12\rho-\frac{1}{2}\lambda') + 32\rho^2 = \frac{1}{2}\lambda'^2 - 4\rho\lambda' - 12\rho\lambda' +$

$+32\rho^2 = \frac{1}{2}\lambda'^2 - 16\rho\lambda' + 32\rho^2 = 0$

Escaneado con CamScanner

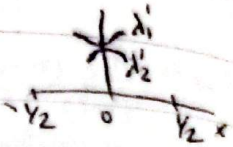
Date. . .

$\lambda'^2 - 32p\lambda' + 64p^2 = 0$. $\lambda'_{1,2} = \frac{1}{2}\left[32p \pm \sqrt{(2\cdot16)^2p^2 - 4\cdot64p^2}\right] = 16p \pm \sqrt{16^2p^2 - 64p^2}$

$\lambda'_{1,2} = 16p \pm 8p\sqrt{3} = 8p(2\pm\sqrt{3})$, $\lambda'_1 = (2-\sqrt{3})8p$, $\lambda'_2 = (2+\sqrt{3})8p$

$m''(0) = m(0)\frac{1}{p}(-1)\left[\lambda' - 8p\right] = m(0)\begin{cases} -\frac{1}{p}(\lambda'_1 - 8p) = -\frac{1}{p}(1-\sqrt{3})8p = 8(\sqrt{3}-1) \\ -\frac{1}{p}(\lambda'_2 - 8p) = -\frac{1}{p}(1+\sqrt{3})8p = -8(\sqrt{3}+1) \end{cases}$

СФ $m(x) = m(0)\left[1 + \frac{1}{2}\frac{m''(0)}{m(0)}x^2\right] = m(0)\left[1 - 4(1\pm\sqrt{3})x^2\right]$



б) нечет. СФ $m(x) = m'(0)x + \frac{1}{6}m'''(0)x^3$, $m'(x) = m'(0) + \frac{1}{2}m'''(0)x^2$

$m''(x) = m'''(0)x$.

если только до x^2:

$-\left[\lambda + 4\pi - 8p - 32px^2\right]m'(0)x + 8px\,m'(0) = 0$

x: $-\left[\lambda' - 8p\right]m'(0) + 8p\,m'(0) = 0$ $\quad -\lambda' + 16p = 0$, $\lambda'_3 = 16p$, $\lambda = -4\pi + 8p$

→ На самом деле неверно, что например $\frac{m''(0)}{m(0)}$ можно вычислить в x^2-приближении. Ведь это отношение зависит от СЗ λ_n, а λ_n можно вычислить лишь учитывая $m^{[s]}(0)$ с большими s вплоть до ∞.

Но хорошо другое (для решения дифф. ур. вблизи $x=0$ разложимся в степен. ряд): все $I_s(x,p)$ и $I^{[k]}_s(x,p) \sim p$ при разложении в окрестности $x=0$, т.е. дифф. ур.

$\lambda m(x) = \sum_{s=0} \frac{1}{s!} I_s(x,p)\, m^{[s]}(x)$ дает спектр $\lambda'_n = \lambda_n + 4\pi \sim p$

$\left[I_0(x,p) - \lambda\right]m(x) = \left[\tilde{I}_0(x,p) - \lambda'\right]m(x) = \sum_{s=1} \frac{1}{s!} I_s(x,p)\, m^{[s]}(x)$

$\tilde{I}_0(x,p) = \left[I_0(x,p) + 4\pi\right] \sim p$.

Такой вид дифф. ур. при $p \to 0$ позволяет p сократить, после чего дифф. ур. $\frac{1}{p}\left[\tilde{I}_0(x,p) - \lambda'\right] = \sum_{s=1} \frac{1}{s!} \frac{I_s(x,p)}{p} m^{[s]}(x)$ от p не зависит, ⇒ его решения - СФ от p не зависят (при $p \to 0$).

→ Получим: при $p \to 0$ с точн. до p $\lambda'_n \sim p$, а СФ $m_n(x)$ от p не зависят.

Это сразу же оправдывает Лоренц-формулу инт. ур. $\Lambda m(x) = (-4)\int dx' \frac{m(x')}{(x-x')^2}$

с $\Lambda_n(p) = \frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial p}\left[p\lambda_n\right] = \frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial p}\left[p\lambda'_n\right] - \frac{4\pi}{p} = \left|\lambda'_n = c_n p\right| = -\frac{4\pi}{p} + 2c_n$.

СФ $m_n(x,p) \underset{p\to0}{=} m_n(x,0) + \left(\frac{\partial m_n}{\partial p}\right)_{p=0} \cdot p + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 m_n}{\partial p^2}\right)_{p=0} \cdot p^2 = m_n(x,0) + O(p^2)$

$\tilde{\Lambda}_n(p) = \Lambda_n(p)\frac{p}{(-4\pi)} = 1 - \frac{p}{2\pi}c_n$ и $\tilde{\Lambda}_n(p)\, m_n(x) = \frac{p}{\pi}\int dx' \frac{m_n(x')}{(x-x')^2 + p^2}$

– при $p \to 0$ ядро переходит в $\delta(x-x')$.

Date. 26.03 . SW Wiess: $\omega_n^2 = \left[\omega_n + 1 + \frac{\lambda_n}{4\pi}\right]\left[\omega_n - \frac{\lambda_n}{4\pi}\right]$

$\tilde{\Lambda}_n m_n(\xi) = \frac{\rho}{\pi}\int dx \frac{m_n(x)}{(x-\xi)^2+\rho^2} = \frac{\rho}{\pi}\int dx \frac{1}{(\xi-x)^2+\rho^2}\frac{\rho}{\pi\tilde{\Lambda}_n}\int dx' \frac{m_n(x')}{(x-x')^2+\rho^2} =$

$= \frac{\rho^2}{\pi^2\tilde{\Lambda}_n}\int dx \frac{1}{(\xi-x)^2+\rho^2}\int dx' \frac{m_n(x')}{(x-x')^2+\rho^2} = \int dx'\left[\frac{\rho^2}{\pi^2\tilde{\Lambda}_n}\int dx \frac{1}{[(x-\xi)^2+\rho^2][(x-x')^2+\rho^2]}\right] m_n(x') =$

$= \frac{\rho}{\pi}\int dx' g(\xi,x') m_n(x'), \quad g(\xi,x') = \frac{\rho}{\pi\tilde{\Lambda}_n}\int_{-1/2}^{1/2} dx \frac{1}{[(x-\xi)^2+\rho^2]}\frac{1}{[(x-x')^2+\rho^2]}$

$x - x' = y$, $\Delta = x' - \xi$

$g(\xi,x') = \frac{\rho}{\pi\tilde{\Lambda}_n}\int_{-1/2-x'}^{1/2-x'} dy \frac{1}{[y^2+\rho^2]}\frac{1}{[(y+\Delta)^2+\rho^2]} =$

$= \frac{\rho}{\pi\tilde{\Lambda}_n}\frac{1}{\Delta^2}\int dy\left[\frac{1-\frac{2}{\Delta}y}{y^2+\rho^2} + \frac{\frac{2}{\Delta}y-1}{(y+\Delta)^2+\rho^2}\right] = \frac{\rho}{\pi\tilde{\Lambda}_n}\frac{1}{\Delta^2}\left[\frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}\frac{y}{\rho} - \frac{1}{\Delta}\ln(y^2+\rho^2) + \right.$

$\left. + (-3)\frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}\left(\frac{y+\Delta}{\rho}\right) + \frac{1}{\Delta}\ln[(y+\Delta)^2+\rho^2]\right]_{-1/2-x'}^{1/2-x'} = \frac{\rho}{\pi\tilde{\Lambda}_n}\frac{1}{|x'-\xi|^2}\left[\frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}\frac{1/2-x'}{\rho}\right.$ +

$+ \frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}\frac{1/2+x'}{\rho} - \frac{1}{\Delta}\ln[(1/2-x')^2+\rho^2] + \frac{1}{\Delta}\ln[(1/2+x')^2+\rho^2] - \frac{3}{\rho}\operatorname{arctg}\frac{1/2-\xi}{\rho} + \frac{3}{\rho}\operatorname{arctg}\frac{-1/2-\xi}{\rho} +$

$\left. + \frac{1}{\Delta}\ln[(1/2-\xi)^2+\rho^2] - \frac{1}{\Delta}\ln[(1/2+\xi)^2+\rho^2]\right]$, не похожа на $g(\xi,x') = \frac{\rho}{\pi}\frac{1}{(x'-\xi)^2+\rho^2}$

Хотя на этой стр. не так.

26/III

Интер. $\int_{-1/2}^{1/2} dx' \frac{1}{(x-x')^2+\rho^2} = \int_{x'-x=\xi}^{1/2-x} d\xi \frac{1}{\xi^2+\rho^2} = \frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}\frac{\xi}{\rho}\Big|_{\cdot} = \frac{1}{\rho}\left[\operatorname{arctg}\frac{1/2-x}{\rho} + \operatorname{arctg}\frac{1/2+x}{\rho}\right]$

Не нарушается ли правило $I_{0,1}(x,\rho\to 0) \sim \rho$ при $|x|\to 1/2$?

$\rightsquigarrow I_0(x,\rho) = \underset{(\rho\to 0 \text{ после } x\to 1/2)}{\left[\xi g(\xi) - 4\operatorname{arctg}\frac{\xi}{\rho}\right]_{1/2-x}^{1/2-x}} = \left|\underset{\rho\text{-фикс.}}{x\to 1/2}\right| = (1/2-x)g(1/2-x) - 4\operatorname{arctg}\frac{1/2-x}{\rho} -$

$+ (1/2+x)g(1/2+x) - 4\operatorname{arctg}\frac{1/2+x}{\rho} = (1/2-x)g(1/2-x) - 4\operatorname{arctg}\frac{(1/2-x)}{\rho} + g(1) + 4\operatorname{arctg}\frac{1}{\rho} =$

$= |1/2-x=\varepsilon| = \varepsilon g(\varepsilon) - 4\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\rho} + (1-\varepsilon)g(1-\varepsilon) + 4\operatorname{arctg}\frac{1-\varepsilon}{\rho} = \varepsilon\frac{2}{\rho}\ln\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\rho^2} -$

$- 4\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\rho} + (1-\varepsilon)[g(1) - \varepsilon g'(1)] + 4\operatorname{arctg}\frac{1}{\rho} + \varepsilon\cdot 4\frac{\rho}{1+\rho^2} = \varepsilon\cdot\frac{2}{\rho}\ln\frac{\varepsilon^2}{\rho^2} - 4\frac{\varepsilon}{\rho} +$

$+ g(1) - 4\operatorname{arctg}\frac{1}{\rho} - \varepsilon[g(1)+g'(1)] + \varepsilon\frac{4\rho}{1+\rho^2} = \frac{2}{\rho}\ln\frac{1}{1+\rho^2} - 4\operatorname{arctg}\frac{1}{\rho} - \varepsilon\frac{4}{\rho} + \varepsilon\frac{4\rho}{1+\rho^2} -$

$- \varepsilon\frac{2}{\rho}\cdot 2\ln\frac{\varepsilon}{\rho} - \varepsilon[g(1)+g'(1)] \underset{\rho\ll 1}{=} -\frac{2}{\rho}\rho^2 - 4\left[\frac{\pi}{2} - \rho\right] - \varepsilon\cdot\frac{8}{\rho} - \varepsilon\frac{4}{\rho}\ln\frac{\varepsilon}{\rho} - \varepsilon[g(1)+g'(1)] =$

$= -2\pi + 6\rho + O(\varepsilon)$, т.е. если взять $\lim_{x\to 1/2}$ сначала, а потом $\lim_{\rho\to 0}$ от $I_0(x,\rho)$ то вблизи $|x|=1/2$ результат будет отличаться от $\lim_{\rho\to 0}$ сначала.

$\rightsquigarrow$ Т.е. предел $\underset{(\text{для } I_0(x,\rho) \text{ и } I_1(x,\rho))}{\rho\to 0}$ зависит от близости к $|x|=1/2$ краю зоны.

Причина: неаналитичность $I_{0,1}(x,\rho)$ вблизи $|x|=1/2$. Но доказать это строго нужно использовать в окрестности $x=0$.

Escaneado con CamScanner

SW-Wires — p-g Neumann

Date.

Вид ядер $\frac{P}{|x\pm 1/2|} = \begin{cases} 2P \ll 1 \text{ в окрест. } x=0 \\ \text{не мал. в окр. } |x|=1/2 \end{cases}$

Ур. имп. дф: $\tilde{\Lambda} m(x) = \frac{P}{\pi}\int_{-1/2}^{1/2} dx' \frac{m(x')}{(x-x')^2+P^2} = \int dx' g_L(xx')m(x')$, $\xi = x-x'$

$g_L(\xi) = \frac{P}{\pi}\frac{1}{\xi^2+P^2} = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\frac{1}{\xi - iP}$, $\frac{\partial g_L}{\partial \xi} = \frac{P}{\pi}\frac{(-1)2\xi}{(\xi^2+P^2)^2}$

$\tilde{\Lambda}\frac{\partial m(x)}{\partial x} = \frac{P}{\pi}(-1)\int dx' \left[\frac{2(x-x')}{(x-x')^2+P^2}\right]^2 m(x')$, обозн. $\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_{\pm 1/2} = 0$.

т.е. $\int_{-1/2}^{1/2} dx' \left[\frac{(\pm 1/2 - x')}{(\pm 1/2 - x')^2+P^2}\right]^2 m(x') = 0$ — условие на ф-ю $m(x)$

$\tilde{\Lambda} m(x) = \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, g_L(\xi) m(x+\xi)$, $\tilde{\Lambda}\frac{\partial m(x)}{\partial x} = (-1)\, g_L(1/2-x)m(1/2) - (-1) g_L(-\frac{1}{2}-x)m(-1/2)$

$(\xi = x'-x)$

$+ \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, g_L(\xi)\frac{\partial m(x+\xi)}{\partial x}$. Введем $M(z) = \frac{\partial m(z)}{\partial z}$, $f(x) = g_L(1/2-x)m(1/2) - g_L(-1/2-x)m(-1/2)$.

тогда в т. $x = \pm 1/2$: $M(x) = 0$: $\tilde{\Lambda} M(x) = -f(x) + \int_{-1/2}^{1/2} dx' g_L(xx')M(x')$ — неоднор. инт. ур.

$\int_{-1/2}^{1/2} dx' g_L(\pm\frac{1}{2} - x')M(x') = f(\pm\frac{1}{2})$ — условие на $M(x) = \frac{\partial m(x)}{\partial x}$.

$\frac{P}{\pi}\int_{-1/2}^{1/2} dx' \frac{M(x')}{(1/2 - x')^2+P^2} = f(\pm\frac{1}{2})$

тонкий момент, ведь это именно условие на ф, а не инт. ур-я.

Еще раз неоднор. инт. ур. $(f \to -f)$, $\tilde{\Lambda}^{-1}$: $M(x) = f(x) + \left(\frac{P}{\pi\tilde{\Lambda}}\right)\int dx' \frac{M(x')}{(x-x')^2+P^2}$, $G = \frac{1}{(x-x')^2+P^2}$

$M(x) = f(x) + \tilde{\lambda}\int dx' G(x,x')M(x')$

Ряд Неймана $\tilde{\lambda} \ll 1$: $M_0(x) = f(x)$, $M_1(x) = f(x) + \tilde{\lambda}\int dx' G(x,x') f(x')$

$M_2(x) = f(x) + \tilde{\lambda}\int dx' G(xx')M_1(x') = f(x) + \tilde{\lambda}\int dx' G(xx')f(x) +$

$+ \tilde{\lambda}^2 \int dx' G(x,x')\int d\xi G(x',\xi) f(\xi)$

Видимо оно сходится, если $\tilde{\lambda} = \frac{P}{\pi\tilde{\Lambda}} \ll 1$ данный ряд быстро сходится, если только $\int dx' G(xx')f(x')$ не $\sim \frac{1}{P}$.

$f(x) = \frac{1}{\tilde{\Lambda}}\left[g_L(1/2+x)m(-1/2) - g_L(1/2-x)m(1/2)\right] = \tilde{\lambda}\left[\frac{1}{(1/2+x)^2+P^2}m(\frac{1}{2}) - \frac{1}{(1/2-x)^2+P^2}m(\frac{1}{2})\right]$

$M_0(x) = \tilde{\lambda}\left[\frac{m(-1/2)}{(1/2+x)^2+P^2} - \frac{m(\frac{1}{2})}{(1/2-x)^2+P^2}\right] = f(x)$

$M_1(x) = f(x) + \tilde{\lambda}^2\int dx' \frac{1}{(x-x')^2+P^2}\left[\frac{m(-1/2)}{(1/2+x')^2+P^2} - \frac{m(1/2)}{(1/2-x')^2+P^2}\right]$

$m(x) = \int dx\, M(x) + C$, например $m(x) = \int_{-1/2}^{x} dx' M(x') + m(-1/2)$

Escaneado con CamScanner

Date. 27 · 05 ·

Пусть $m(x)$ – чет., $m(1/2) = m(-1/2)$, тогда $M_0(x) = \lambda m(-\frac{1}{2})\left[\frac{1}{(1/2+x)^2+\rho^2} - \frac{1}{(1/2-x)^2+\rho^2}\right]$

$$m_0(x) = \int_{-1/2}^{x} dx' M_0(x') + m(-1/2) = \tilde{\lambda} m(-\tfrac{1}{2}) \int_{-1/2}^{x} dx' \left[\frac{1}{(1/2+x')^2+\rho^2} - \frac{1}{(1/2-x')^2+\rho^2}\right] +$$

$$+ m(-1/2) = \tilde{\lambda} m(-1/2)\left[\frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}\frac{1/2+x'}{\rho} + \frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}\frac{1/2-x'}{\rho}\right]_{-1/2}^{x} + m(-1/2) =$$

$$= \frac{\tilde{\lambda}}{\rho} m(-1/2)\left[\operatorname{arctg}\frac{1/2+x}{\rho} + \operatorname{arctg}\frac{1/2-x}{\rho} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\rho}\right] + m(-1/2) = m_0(x)$$

Не очевидно $M_0(\pm 1/2) = \left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_{\pm 1/2} = 0$ не выполн. И СФ – зависит от ρ, что для Лоренца нас не подходит.

При $x \approx 0$ $(\rho \ll |x \pm 1/2|)$, $m_0(x) = \frac{\tilde{\lambda}}{\rho} m(-1/2)\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\rho}{1/2+x} + \frac{\pi}{2} - \frac{\rho}{1/2-x} - \frac{\pi}{2} + \rho\right] + m(-1/2)$

$$m_0(x) = \frac{\tilde{\lambda}}{\rho} m(-1/2)\left[\frac{\pi}{2} + \rho - \frac{\rho}{1/4 - x^2}\right] + m(-1/2)$$

Зависимость СФ от ρ слишком сил. Для неоднор. ИУ.

$$\lambda m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g(x-x') m(x') = \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, g(\xi)\, m(x+\xi), \quad g(\xi) = \frac{2}{\rho}\ln\frac{\xi^2}{\xi^2+\rho^2}, \quad \lambda = -4\pi + c\rho$$

$\lambda \frac{\partial m(x)}{\partial x} = \ldots$ плохо, т.к. $\tilde{\lambda} = \frac{2}{\rho\lambda}$ – неясно на малый параметр.

Если просто решать $\tilde{\Lambda} m(x) = \frac{\rho}{\pi}\int_{-1/2}^{1/2} dx' \frac{m(x')}{(x-x')^2+\rho^2}$ итерациями с $m = 1$ начальн., то

$$m_0(x) = \tilde{\lambda}\frac{1}{\rho}\left[\operatorname{arctg}\frac{1/2-x}{\rho} + \operatorname{arctg}\frac{1/2+x}{\rho}\right]$$ – уже удив. похоже на $m_0(x)$ из неоднород. инт. ур.

$$\lambda m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g(x,x') m(x') \quad \text{с } m(x) \text{ разл. по радиусу } \cos(2\pi n x),\ x \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]\ 27/11\text{П}$$

Пусть искомая СФ – гладкая, тогда разложим ее – $m(x)$ по полной сист. ф. $\cos(2\pi n x)$, $\sin(2\pi n x)$, $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $T = 1$.

$$m(x) = \sum_n m_n \cos(2\pi n x) \to \lambda \sum_n m_n \cos(2\pi n x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g(x,x') \sum_n m_n \cos 2\pi n x'$$

а) $\underset{(\text{по } x')}{g(x,x')} = \sum_{n'} \underset{(x)}{g^c_{n'}} \cos(2\pi n' x') + \sum_{n'} \underset{(x)}{g^s_{n'}} \sin(2\pi n' x')$

$$\lambda \sum_n m_n \cos 2\pi n x = \sum_n \sum_{n'} m_n \int_{-1/2}^{1/2} dx' \left[g^c_{n'} \cos 2\pi n' x' + g^s_{n'} \sin 2\pi n' x'\right] \cos 2\pi n x'$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} dx' \cos 2\pi n' x' \cos 2\pi n x' = 2\int_0^{1/2} (\cdot)\, dx' = \left|2\pi x' = \xi\right| = 2\int_0^1 \frac{d\xi}{2} \cos\pi n' \xi \cos\pi n \xi = \frac{1}{\epsilon_n}\delta_{nn'}$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} dx \sin 2\pi n' x \cos 2\pi n x = 0 \to \lambda \sum_n m_n \cos 2\pi n x = \sum_{nn'} m_n g^c_{n'}(x) \frac{1}{\epsilon_n}\delta_{nn'} = \sum_n m_n \frac{g^c_n(x)}{\epsilon_n}$$

$$\underset{(\text{по } x)}{g^c_n(x)} = \sum_{n'}\left[g^{cc}_{nn'} \cos 2\pi n' x + g^{cs}_{nn'} \sin 2\pi n' x\right]$$ – совместимо с разложением,

только если $g^{cs}_{nn'} = 0$, но это не нам, ведь $g^c_n(x)$ – не есть гладкая.

Escaneado con CamScanner

Date. 28. 03.

б) $g(\xi) = \sum_{n'} g_{n'} \cos\left(\frac{2\pi}{2} n' \xi\right) = \sum_{n'} g_{n'} \cos(\pi n' \xi)$, т.к. $\xi \in [-1,1]$

$\lambda m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' \, g(x-x') \, m(x') = \int_{-1/2}^{1/2} dx' \sum_{n'} g_{n'} \cos\pi n'(x-x') \, m(x')$

$m(x) = \sum_n m_n \cos(2\pi n x) \to \lambda \sum_n m_n \cos 2\pi n x = \int_{-1/2}^{1/2} dx' \sum_{n'} g_{n'} \cdot$

$\cdot \left[\cos\pi n' x \cdot \cos\pi n' x' + \sin\pi n' x \cdot \sin\pi n' x'\right] \sum_n m_n \cos 2\pi n x'$

$I_{nn'} = \int_{-1/2}^{1/2} dx' \cos\pi n' x' \cdot \cos 2\pi n x' = \frac{1}{2} \int dx' \left[\cos\pi x'(n'-2n) + \cos\pi x'(n'+2n)\right] =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\pi x'(n'-2n)}{\pi(n'-2n)} + \frac{\sin\pi x'(n'+2n)}{\pi(n'+2n)}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2}(n'-2n)}{n'-2n} + \frac{\sin\frac{\pi}{2}(n'+2n)}{n'+2n}\right] =$

$= \begin{cases} = \delta_{n,n'} = \text{пор.} = 2k \\ \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2}(k-n)+\pi/2)}{(-)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(k+n)+\pi/2\right)}{(+)}\right] = \frac{(-1)^{k+n}}{\pi}\left[\frac{1}{n'-2n} + \frac{1}{n'+2n}\right] \neq \delta_{nn'} \end{cases}$

$n' = 2k+1$

$\lambda \sum_n m_n \cos(2\pi n x) = \sum_{nn'} g_{n'} m_n I_{nn'} \cos(\pi n' x)$, все было бы

было бы если бы только $n' = 2k$ были, тогда $I_{nn'} = \frac{1}{\epsilon_n} \delta_{kn}$ и сумма

не нулевые $\lambda \sum_n m_n \cos 2\pi n x = \sum_{nk} g_{nk} m_n \frac{1}{\epsilon_n} \delta_{kn} \cos(\pi 2k x) = \sum_n \frac{g_{2n} m_n}{\epsilon_n} \cos(\pi$

и $\lambda_n = \frac{1}{\epsilon_n} g_{2n}$. но это не так и $I_{nn'}$ - недиаг. и не $\sim \delta_{kn}$.

$\lambda \sum_n m_n \cos(2\pi n x) = \sum_{n,n'=2k} g_{2k} m_n \frac{\delta_{kn}}{\epsilon_n} \cos(2\pi k x) + \sum_{n'=2k+1} g_{2k+1} m_n I_{n,2k+1} \cos(\pi(2k+$

Вывод: от разложения $m(x)$ по $\cos 2\pi n x$ (или $\sin 2\pi n x$) с $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ не будет толку как и ядрами $g(x,x')$.

27/III Написание статьи SW-PRB (TaBCes) (после вернуться сюда).

28/III $\tilde{\lambda} m(x) = \frac{\rho}{\pi} \int dx' \frac{m(x')}{(x-x')^2 + \rho^2} \to m(x) = \tilde{\lambda} \int dx' \frac{1}{(x-x')^2+\rho^2} m(x')$ с $\tilde{\lambda} = \frac{\rho}{\pi \tilde{\Lambda}}$

Ожидаем $\tilde{\Lambda} = 1 - \frac{c_n}{2\pi} \rho \approx 1$.

Пусть $m_0(x) = 1$, тогда $m_1(x) = \tilde{\lambda} \int dx' \frac{1}{(x-x')^2+\rho^2} = \tilde{\lambda} \frac{1}{\rho}\left[\operatorname{arctg}\frac{1/2 - x}{\rho} + \operatorname{arctg}\frac{1/2+x}{\rho}\right]$

$K(x,x') = \frac{1}{(x-x')^2+\rho^2}$, $K(x,x) = \frac{1}{\rho^2}$. $D(\tilde{\lambda}) \approx 1 - a_1 \tilde{\lambda} = 0$, $\tilde{\lambda} \approx \frac{1}{a_1} = \frac{1}{\left[\int K(x,x) dx\right]} =$

тогда $\tilde{\Lambda} = \frac{\rho}{\pi} \frac{1}{\lambda} \approx \frac{\rho}{\pi} \frac{(-1)}{\rho^2} = -\frac{1}{\pi\rho}$ не совпас с $\tilde{\Lambda} = 1 - \frac{c_n}{2\pi}\rho$.

Hochstadt: если $\lambda \hat{K} f(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy$, где ядро $K(x,y)$ непре-

рывно для $x, y \in [0,1]$ и $\lambda_i \hat{K} f(x) = f(x)$, λ_i - с.з., то

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} = \int_0^1 \int_0^1 dx\,dy\, K(x,y) K(y,x) = \int_0^1 dx\, K_2(x,x)$.

Date.

$K_{n+1}(x,y) = \int_0^1 dz\, K(x,z) K_n(z,y)$, $K_1(x,y) = K(x,y)$ – нач. ядро.
$(n=1,\dots)$

И вообще: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_i)^n} = \int_0^1 dx\, K_n(x,x)$, $n=1,2,\dots$

$\Rightarrow \int_0^1 dx\, K(x,x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}$ – вычитание.

Но это все неприменимо к ядру $g(x,x') = \frac{2}{\rho} \ln \frac{(x-x')^2}{(x-x')^2+\rho^2}$,

т.к. $g(x,x) \sim \ln|x-x'| \underset{x'\to x}{\to} \infty$ не есть непрерывная в т. $x=x' \in [0,1]$ или $[-1/2, 1/2]$

Для ур-я в моей форме: $\hat{g} m(x) = \int dx' g(x,x') m(x') = \lambda m(x)$

будет $\sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i)^n = \int_{0(-1/2)}^{1(+1/2)} dx\, g_n(x,x)$, в частности $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \int dx\, g(x,x)$.

Применим к $m_i(x) = \tilde{\lambda}_i \int dx' \frac{1}{(x-x')^2+\rho^2} m_i(x)$, $g_L(x,x') = \frac{1}{(x-x')^2+\rho^2}$

$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}_i}\right)^{-1} = \frac{\pi}{\rho} \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Lambda}_i = \frac{\pi}{\rho} \sum_i \left(1 - \frac{\rho}{2\pi} c_i\right) = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, g_L(x,x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2}$ – ?

Левая сумма расходится, а правая – нет?

В $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \int dx\, g(x,x) = \frac{2}{\rho} \int dx \ln \frac{0}{\rho^2} = \infty$ – расходятся оба часа.

Левая т. не расходится, но если $\sum_i \left(1 - \frac{\rho c_i}{2\pi}\right) = \sum_i \left[1 - \frac{\lambda_i + 4\pi}{2\pi}\right]$ – конечно, то это означает $\sum_i \lambda_i = \infty$; это согласуется с $\int dx\, g(x,x) = \infty$.

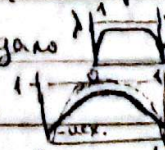
Т.е. можно считать $\frac{\pi}{\rho} \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Lambda}_i = \frac{1}{\rho^2}$, найти $\tilde{\Lambda}_i$, а потом $\lambda_i = (-2\pi)(\tilde{\Lambda}_i + 1)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Lambda}_i = \frac{1}{\pi\rho}$, где $\tilde{\Lambda}_i m_i(x) = \int dx' g_L(x,x') m_i(x')$, $g_L(\xi) = \frac{\rho}{\pi} \frac{1}{\xi^2+\rho^2}$.

Осозн. $g(\xi) \underset{\xi\to 0}{\sim} \ln \xi$ $\int_0^1 dx (\ln x)^2 = \int_0^1 dx \left(\ln \frac{1}{x}\right)^2 = \Gamma(3)$ – такая сингулярность интегрируется, $\Rightarrow \int_0^1 dx\, dx' |g(x,x')|^2$ должен быть конечным, а тогда $g(x,x') = \sum_n \lambda_n u_n(x) u_n(x')$ – разлагается по СФ.

Попробуем метод итераций для $\tilde{\Lambda} m(x) = \frac{\rho}{\pi} \int_{-1/2}^{1/2} dx' \frac{m(x')}{(x-x')^2+\rho^2}$

в качестве начальной итерации $m_0(x)$ задавая одну из функций $\cos(\pi m x)$, $\sin(\pi m x)$ с $x \in [0,1]$. Интересуемся, следуя 16(II 002, { нат. m для cos(·) / нат. m для sin(·) }

$m_0(x) = 1$ после двух итераций дало  и $\omega_0^c = 0{,}264$

$m_0(x) = \sin(\pi x)$ — " — дало и $\omega_1^s = 0{,}228$.

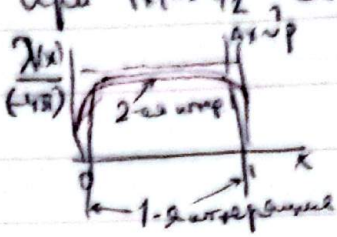
Итерации сглаживают $\sin(\pi x)$ и стремятся к форме $m_0(x) = 1$ вблизи

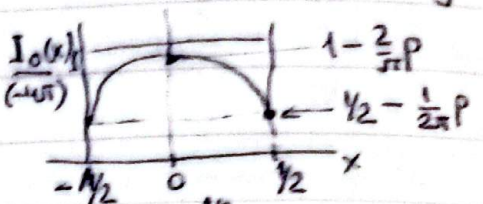
Escaneado con CamScanner

Date. 29.03. Область неопределенности $\lambda(x)$ больше $x=\pm 1/2$

Краев $|x|=1/2$. Рост числа N итераций на ω_n вблизи краев для множества СФ возрастает с N. Это видно из $\lambda(x)$ где все меньше при $|x|\to 1/2$, стремясь к Const $\forall x$, как и должно быть

СЗ.





Пусть $m_n(x)$ - точная (начальная) СФ, $\int dx$: $\lambda_n m_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g(x,x') m_n(x')$

$\lambda_n \int m_n(x)dx = \int dx\,dx' g(x,x') m_n(x') = \int dx' m_n(x') \int_{-1/2-x'}^{1/2-x'} d\xi\, g(\xi) = \int dx' m_n(x') \cdot 1$

Всегда можно норм. (для тест. СФ) $\int_{-1/2}^{1/2} m_n(x)dx = 1$, тогда $\lambda_n(\rho) = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, I_0(x,\rho) m_n(x)$

$$I_0(x,\rho) = \left[\xi g(\xi) - 4\operatorname{arctg}\frac{\xi}{\rho}\right]_{-1/2-x}^{1/2-x}.$$

Если бы было так $I_0(x)$ имел резкий max при $x=0$,

то $\lambda_n(\rho) \approx \left(\int dx\right) \cdot I_0(0) m_n(0) = I_0(0) m_n(0)$;

Для ан. моды если она нормировать $m_0(0)=1$, то $\lambda_0(\rho) = I_0(0,\rho) = -4\pi + 2\rho$ — это приближение Славина.

Но max $I_0(x)$ - начальный и так много делать.

При $\rho \to 0$ $I_0(x,0) = \left[\xi(-4\pi)\delta(\xi) - 4\operatorname{arctg}\frac{\xi}{\rho}\right]_{-1/2-x}^{1/2-x} = \begin{cases} -4\pi, & |x|<1/2 \\ 0, & |x|>1/2 \end{cases}$

III Лучше $\lambda_n(\rho) = \dfrac{\int_{-1/2}^{1/2} dx\, I_0(x,\rho) m_n(x)}{\int_{-1/2}^{1/2} dx\, m_n(x)}$, тогда замена $I_0(x) \to I_0(0)$ в т. $x=0$ - max

ведет к $\lambda_n(\rho) = I_0(0,\rho) = -4\pi + 2\rho$ (n - осн. моды) - приближению Славина.

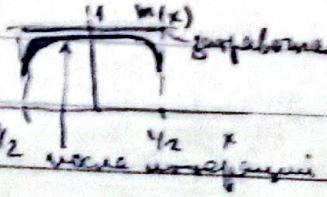
Такая замена ≈ оправдана, когда $I_0(x) m_n(x)$ имеет выраженный max при $x \approx 0$, т.е. $m_n(x)$ локализована вблизи $x=0$.

Предельная локализация $m(x) = \delta(x)$ дает точное $\lambda_{loc}(\rho) = -4\pi + 2\rho$.

А более локализована $\cos(\pi x)$, чем $m(x)=1$ (точнее, те моды которые получены из $\cos(\pi x)$, $x \in [-1/2, 1/2]$ и $m(x)=1$ после итераций)



после итераций, т.е. точная СФ



после итераций

Escaneado con CamScanner

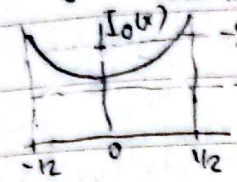
Date. . .

(комплексная интегральная мощность)

Вывод: неоднородная знакопостоянная мода $m(x) = \cos(\pi x)$, локализованная вблизи $x=0$ (т.к. имеющая наи max) отвечает большему (по модулю) собственному значению $|\lambda_n| = -\lambda_n$, т.е. меньшей SW-частоте, чем постоянная почти мода интегр. мощ $m(x)=1$.

Обоснование: для $m(x)$ – localized at $x=0$ $\lambda_{loc} \approx \frac{I_0(0,p)\int m\,dx}{\int m\,dx} = I_0(0,p)$,

а для $m(x) \approx 1$ (или $m(x) \approx m_0$) $\lambda_{const} = \frac{m_0 \int dx\, I_0(x,p)}{m_0} = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, I_0(x,p) = \langle I_0(x,p)\rangle_x$

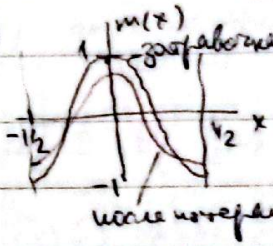
но 

$I_0(x)$ имеет min при $x=0$, $I_0(0) < \langle I_0(x)\rangle_x$, ($I_0(x) < 0$)

$|I_0(0)| > |\langle I_0(x)\rangle_x|$, $|\lambda_{loc}| > |\lambda_{const}|$, $\omega_{loc} < \omega_{const}$.

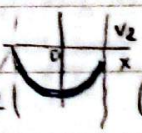
Для других неоднород. mods, скажем $\cos(2\pi x)$

$\int dx\, I_0(x,p)\, m_n(x)$ – резко падает в силу знакопеременности $m_n(x)$ и $|\lambda_n|$ – падает $\Rightarrow \omega_n$ – растет.

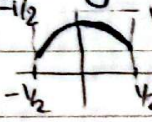


По физ. смыслу $I_0(x) = \int_{-1/2-x}^{1/2} d\xi\, g(\xi) = \int_{-1/2}^{1/2} dx'\, g_{zz}(x,x')$ это $h_d^z(x)$ при $m_z = 0$

→ Т.е. локализация основной моды происходит в области min дип. поля $h_d^z(x) = I_0(x)$

В силу $h_d^z(x) = \lambda m_z(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx'\, g_{zz}(x,x')\, m_z(x')$ это $h_d^z(x)$ 

создает (смещ. при $x=0$)

Самосогласованно СФ $m_z(x)$ 

, т.е. неоднородная СФ с max при $x=0$.

$h_d^z(x)$ – mw-field.

→ но есть еще d.c. dipolar fields (для wires) $H_d^{x,z}(x,z) = M_0^y \int dx'dz'\, \hat{G}_{(xz),y}(xz,x'z')$

из-за $\vec{M}_0 = (0, M_0^y, 0)$. $\hat{G}_{dy}(xz,x'z') = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell dy dy'\, G_{dy}(xz,x'z',yy')$ $(\ell\to\infty)$

Для wires $H_d^y(x,z) = 0$, $\langle H_d^{x,z}(x,z)\rangle_z = 0$. ↖ в PRB $G \underset{\text{def.}}{=} \Gamma(r,r')$.

$H_d^{x,z}(x,y,z) = M_0^y \int dx'dy'dz'\, \Gamma_{(xz),y}(\vec{r},\vec{r}') = M_0^y \int dx'dz'\, G_{(xz)y}(xx',y,zz')$ – есть четная функция от "y".

$H_d^{x,z}(x,z) = \frac{1}{\ell}\int dy\, H_d^{x,z}(x,y,z) = M_0^y \int dx'dz' \left[\frac{1}{\ell}\int dy dy'\, \Gamma_{(xz),y}(r,r')\right] =$ $\to 0$ при $\ell\to\infty$

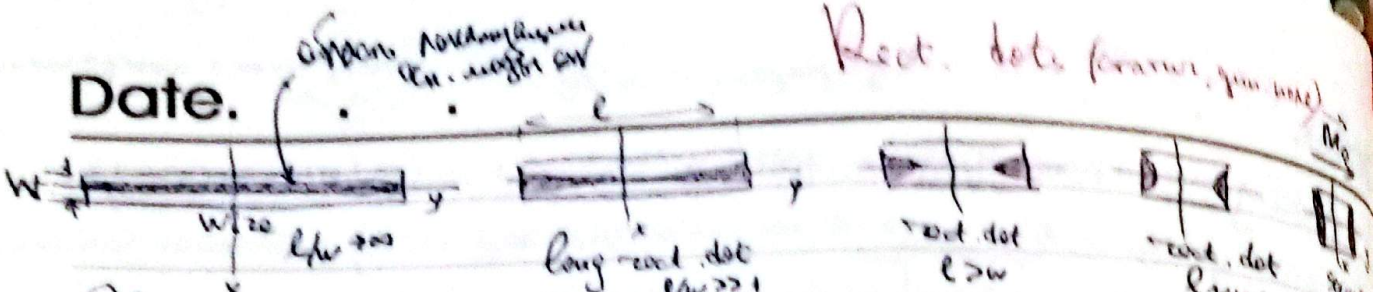
$= \left|\text{обозначая как в ст. PRB}\right| = M_0^y \int dx'dz'\, G_{xz\,y}(xz;x'z') = 0$, это из-за

~~тоже это $G_{zy}, G_{xy} \sim \int d^2\vec{k}\, k_y F(\vec{k}) \frac{\sin^2 k_y \ell/2}{k_y^2} = \int d^2k\, F(\vec{k})\, k_y \delta(k_y) = 0$.~~

→ Т.е. для wires $H_d^{x,z} = 0$ (при $\ell\to\infty$)

Date.

Rect. dots (frames, gen. case)



Волновая локализация основной (min w) моды в rect dots с одним $\vec{M}_0 \parallel Oy$ и $M \parallel Oy$ для всех доков.

→ M. Потенциал созданный $\vec{M}_0 = \text{const} \parallel Oy$ всех

Rect. dot

$$\varphi(\vec{r}) = -M_s^y \int_{-w/2}^{w/2} dx' \int_0^L dz' \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \Big|_{y'=-\ell/2}^{y'=\ell/2} \rightarrow \left(H_d^y(\vec{r}) = M_s^y \frac{\partial}{\partial y} \int_{\ell/2} dx'dz' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \Big|_{y'=-\ell/2}^{y'=\ell/2}$$

$$= M_s^y \int dx'dz' \, G_{yy}(\vec{r},x',y',z') \Big|_{y'=-\ell/2}^{y'=\ell/2}, \text{ где } G_{yy}(\vec{r},x'z'y') \Big|_{y'=-\ell/2}^{y'=\ell/2} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dy' \, \Gamma_{yy}(r,r')$$

Или $H_d^y(\vec{r}) = \int dx'dz' \, \hat{G}_{yy}(\vec{r},x'z') M_s^y$, $\hat{G}_{yy}(\vec{r},x'z') = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dy' \, \Gamma_{yy}(r,r')$

Если усредн. по z, то (см. I/II) $H_d^y(x,y) = M_s^y \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial y} \int dx' \int dz dz' \left(\frac{1}{|r-r'|} \right) \Big|_{y'=-\ell/2}^{y'=\ell/2} =$

$$= M_s^y \int dx' \frac{1}{L} \int dz dz' \, \hat{G}_{yy}(r,x'z') = M_s^y \int dx'dy' \frac{1}{L} \int dz dz' \, \Gamma_{yy}(r,r') =$$

$$= M_s^y \int dx'dy' \, G_{yy}(\vec{\rho},\vec{\rho}'), \text{ где обозначен. как в PRB - Eq.(12-13).}$$

Прямое вычисл. → $g_{yy}(xy,x') = \int dy' \, G_{yy}(\vec{\rho},\vec{\rho}') = \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{dz dz'}{L} \left(\frac{1}{|r-r'|} \right) \Big|_{y'=-\ell/2}^{y'=\ell/2}$,

$z \dots z_2$ rect. dot

→ $H_d^y(x,y) = M_s^y \int dx' \, g_{yy}(xy,x')$, тогда по y много усреднения для получения Eq.(15') - ина.

Это $H_d^y(x,y)$ и сделано 1/II (в Е-вариас.) и 8/II (методом J.-Schlam.'65).

$$g_{yy}(xy,x') = \frac{(-1)}{L} \int dz dz' \left[\frac{(y-y')}{|r-r'|^3} \right]_{y'=-\ell/2}^{y'=\ell/2}, \text{ но } zz' \text{ - сложено } \int(\cdot) dz.$$

Инт. (M/I002.) $\int_0^L dz \int_0^L dz' \frac{1}{\sqrt{\Delta^2+(z-z')^2}} = 2\left[L \operatorname{Arsh} \frac{L}{\Delta} - \sqrt{L^2+\Delta^2} + |\Delta| \right]$, $\Delta^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2$

$\frac{\partial \Delta}{\partial y} = \frac{1}{\Delta}(y-y')$.

$$g_{yy}(xy,x') = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{L} \int dz dz' \frac{1}{|r-r'|} \Big|_{y'=-\ell/2}^{y'=\ell/2} = \frac{2}{L} \frac{\partial}{\partial y} \left[L \operatorname{Arsh} \frac{L}{\Delta} + |\Delta| - \sqrt{L^2+\Delta^2} \right]_{y'=-\ell/2}^{y'=\ell/2}$$

Если сейчас усредн. по y, то получим формулу вида Eq.(5).

Диф. по y: $g_{yy}(xy,x') = \frac{2}{L} \left[L \frac{1}{\sqrt{1+L^2/\Delta^2}} \frac{L(-1)}{\Delta^2} \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \frac{\partial \Delta}{\partial y} - \frac{1}{2\sqrt{L^2+\Delta^2}} 2\Delta \frac{\partial \Delta}{\partial y} \right]_{y'=-\ell/2}^{y'=\ell/2} =$

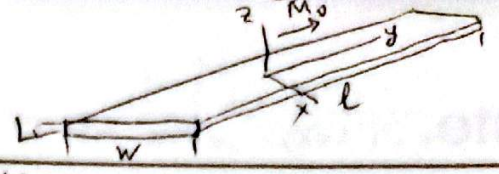
$$= \frac{2}{L} \frac{\partial \Delta}{\partial y} \left[-\frac{L^2}{\Delta} \frac{1}{\sqrt{L^2+\Delta^2}} + 1 - \frac{\Delta}{\sqrt{L^2+\Delta^2}} \right]_{y'=-\ell/2}^{y'=\ell/2} = \frac{2}{L} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial y} \right) \frac{1}{\Delta} \left[\Delta - \sqrt{L^2+\Delta^2} \right]_{y'=-\ell/2}^{y'=\ell/2} =$$

$$g_{yy}(xy,x') = \frac{2}{L} \left[\frac{(y-y')}{\Delta^2} \left(\Delta - \sqrt{L^2+\Delta^2} \right) \right]_{y'=-\ell/2}^{y'=\ell/2}, \text{ где } \Delta = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}.$$

для rectan. dot с любыми L, w, ℓ по $\vec{M}_0 \parallel Oy$, усредн. по z, z'.

Escaneado con CamScanner

ФГ и дин. поле rectan. dot



Date. . .

Для rect. dot надо еще знать $H_d^{(0)x} = H_d^x(\vec{r})$ и $H_d^{(0)z} = H_d^z(\vec{r})$, $\langle H_d^{x(z)} \rangle_z$, чтобы найти их max значение для SW расчета 23/III. Т.е. найти g_{xy} и g_{zy}.

$$H_d^x(\vec{r}) = -\frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial x} = M_s^y \frac{\partial}{\partial x} \int dx' \int dz' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \Big|_{y'=-l/2}^{y'=l/2}$$

Прежде найти $\langle \dots \rangle_z$: $H_d^x(x,y) = \frac{1}{L}\int dz H_d^x(r) = \frac{1}{L} M_s^y \frac{\partial}{\partial x} \int dx' \int dz dz' \frac{1}{|r-r'|}\Big|_{\cdot} =$

$$= M_s^y \int dx' \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{L} \int dz dz' \left(\frac{1}{|r-r'|} \right) \Big|_{\cdot} \right] = M_s^y \int dx' \, g_{xy}(xy, x')$$

$$g_{xy}(xy,x') = \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial x} \int dz dz' \left(\frac{1}{|r-r'|} \right)\Big|_{\cdot} = \frac{2}{L}\frac{\partial}{\partial x}\left[L \operatorname{Arsh}\frac{L}{\Delta} + \Delta - \sqrt{L^2+\Delta^2} \right]_{y'=-l/2}^{y'=l/2}$$

Сразу $g_{xy}(xy,x') = \frac{2}{L}\left[\frac{(x-x')}{\Delta^2}\left(\Delta - \sqrt{L^2+\Delta^2}\right) \right]_{y'=-l/2}^{y'=l/2}$, $H_d^x(x,y) = M_s^y \int dx' g_{xy}(xy,x')$

$\Delta = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ — rect. dot, через $\langle \dots \rangle_z$, L, w, l

$$H_d^x(x,y) = M_s^y \int dx' g_{xy}(x-x', y) = \left| x'-x = \xi \right| = M_s \int_{-\frac{w}{2}-x}^{w/2-x} d\xi \, g_{xy}(\xi, y) =$$

$$= -M_s \frac{2}{L} \int d\xi \frac{\xi}{\xi^2+\Delta y^2} \left\{ \sqrt{\xi^2+\Delta y'^2} - \sqrt{\xi^2+L^2+\Delta y^2} \right\} \Big|_{y'=-l/2}^{y'=l/2} = \left| \begin{matrix} \xi^2 = u \\ u+\Delta y^2 = t \end{matrix} \right| =$$

$$= -M_s \frac{1}{L} \int du \frac{1}{u+\Delta y^2} \left(\sqrt{u+\Delta y^2} - \sqrt{u+L^2+\Delta y^2} \right)\Big|_{\cdot} = -\frac{M_s}{L} \int \frac{dt}{t} \left(\sqrt{t} - \sqrt{t+L^2} \right)\Big|_{\cdot} =$$

$$= -\frac{M_s}{L} \int dt \left[\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{\sqrt{t+L^2}}{t} \right]_{\cdot} = -\frac{M_s}{L} \left[2\sqrt{t} - 2\sqrt{L^2+t} - L^2 \frac{1}{L} \ln\left(\frac{\sqrt{t+L^2}-L}{\sqrt{t+L^2}+L} \right) \right]_{\cdot} =$$

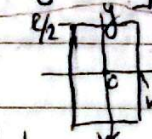
$$= -2\frac{M_s}{L}\left[\sqrt{t} - \sqrt{L^2+t} + L \operatorname{Arth}\frac{L}{\sqrt{L^2+t}} \right]_{\cdot} = -2\frac{M_s}{L}\left[\sqrt{\xi^2+\Delta y^2} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{L^2+\xi^2+\Delta y^2} + L \operatorname{Arth}\frac{L}{\sqrt{L^2+\xi^2+\Delta y^2}} \right] \Big|_{\xi=-w/2-x}^{\xi=w/2-x} \Big|_{y'=-l/2}^{y'=l/2}$$

$$H_d^x(x,y) = -2M_s\frac{1}{L}\left[\sqrt{(w/2-x)^2+\Delta y^2} - \sqrt{(w/2-x)^2+\Delta y^2+L^2} + L \operatorname{Arth}\frac{L}{\sqrt{(w/2-x)^2+\Delta y^2+L^2}} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{(w/2+x)^2+\Delta y^2} + \sqrt{(w/2+x)^2+\Delta y^2+L^2} - L \operatorname{Arth}\frac{L}{\sqrt{(w/2+x)^2+\Delta y^2+L^2}} \right]_{y'=-l/2}^{y'=l/2}, \quad y-y' = \Delta y.$$

Сравни. дин. поле rect. dot, $\langle \dots \rangle_z$, L, w, l — любые



$H_d^x(x,y)$ — четн. функция „x", и четн. ф. „y". → Имеет смысл $y = \pm\frac{l}{2}$, $x \neq 0$

$$H_d^x(x, l/2) = -2M_s\frac{1}{L}\left[|w/2-x| - \sqrt{(w/2-x)^2+L^2} + L \operatorname{Arth}\frac{L}{\sqrt{(w/2-x)^2+L^2}} - |w/2+x| + \right.$$

$$+ \sqrt{(w/2+x)^2+L^2} - L \operatorname{Arth}\frac{L}{\sqrt{(w/2+x)^2+L^2}} - \sqrt{(w/2-x)^2+l^2} + \sqrt{(w/2-x)^2+L^2+l^2} - L \operatorname{Arth}\frac{L}{\sqrt{(w/2-x)^2+l^2+L^2}} +$$

$$\left. + \sqrt{(w/2+x)^2+l^2} - \sqrt{(w/2+x)^2+L^2+l^2} + L \operatorname{Arth}\frac{L}{\sqrt{(w/2+x)^2+L^2+l^2}} \right], \quad H_d^x(0,y) = 0$$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

ln-расходится.

$$\max H_d^x(w/2, l/2) = -\frac{2M_s}{L}\left[-L + L\,\mathrm{Arth}\frac{L}{\sqrt{(x-w/2)^2+L^2}}\Big|_{x\to\frac{w}{2}} - w + \sqrt{w^2+L^2} - L\,\mathrm{Arth}\frac{L}{\sqrt{}}\right.$$

$$\left. - l + \sqrt{L^2+l^2} - L\,\mathrm{Arth}\frac{L}{\sqrt{l^2+L^2}} + \sqrt{w^2+l^2} - \sqrt{w^2+l^2+L^2} + L\,\mathrm{Arth}\frac{L}{\sqrt{l^2+w^2+L^2}}\right]$$

Итак: $t = \xi^2 + \Delta y^2 = (w/2 \pm x)^2 + (l/2 \pm y)^2$.

Рассм. $H_d^x(x,y)$, где $t \neq 0$, т.е. $|x| = w/2$, $|y| \neq l/2$ – одновременно.

$$\frac{1}{L}\left(\sqrt{t} - \sqrt{L^2+t^2} + L\,\mathrm{Arth}\frac{L}{\sqrt{L^2+t}}\right) = \frac{1}{L}\left(\sqrt{t} - \sqrt{t}\left[1+\frac{L^2}{2t}\right] + L\cdot\frac{L}{\sqrt{L^2+t}}\right) =$$

$$= -\frac{L}{2\sqrt{t}} + \frac{L}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\frac{L}{\sqrt{t}} \quad \text{и}$$

$$H_d^x(x,y) \approx -2M_s\,\frac{1}{2}\,\frac{L}{\sqrt{\xi^2+\Delta y^2}}\Bigg|_{\xi}^{\substack{w/2-x\\-w/2-x}}\Bigg|_{y'}^{\substack{l/2\\-l/2}} = -M_s\,\frac{L}{\sqrt{\xi^2+\Delta y^2}}\Bigg|\Bigg|_{\xi}^{y'},$$

→ Т.е. во всех точках кроме углов доа $\frac{1}{M_s}H_d^x(x,y) \sim \frac{L}{w}$ $(w \sim l) \ll 1$,
а в углах H_d^x ln-расходится. Но все дин.поля $\sim (L/w)^2$.

→ Тогда $\left(\frac{H_d^x}{\omega}\right)^2 \approx \left(\frac{H_d^x}{2M_s}\right)^2 \sim \frac{1}{4}\left(\frac{L}{w}\right)^2 \ll 1$ в УД 23/III можно всюду пренебрегать, кроме углов доа.

где $\Omega_2\omega \approx 0{,}1 \div 0{,}2 \cdot \omega_M = 0{,}1 \div 0{,}2\,(\text{и т.}M_s) \sim 2M_s$.

Если локализация осн. моды в rect.dot у, то углы не запрещены, если $l > w$ лучше использовать l/w – далеко от квадрата.

$$\mathrm{Arth}\frac{L}{\sqrt{(w/2-x)^2+\Delta y^2+L^2}} - \mathrm{Arth}\frac{L}{\sqrt{(w/2+x)^2+\Delta y^2+L^2}} = \mathrm{Arth}\left(\frac{\frac{L}{\sqrt{(-)}} - \frac{L}{\sqrt{(+)}}}{1 - \frac{L^2}{\sqrt{(-)}\sqrt{(+)}}}\right) =$$

$$= \mathrm{Arth}\left(L\,\frac{\sqrt{(w/2+x)^2+\Delta y^2+L^2} - \sqrt{(w/2-x)^2+\Delta y^2+L^2}}{\sqrt{(w/2-x)^2+\Delta y^2+L^2}\sqrt{(w/2+x)^2+\Delta y^2+L^2} - L^2}\right) - \text{не помогает.}$$

$g_{yy}(xy,x')$ и $g_{xy}(xy,x') \sim \frac{1}{\Delta}$ и $H_d^{y,x} = M_s \int dx'\, g(xy,x') \sim \ln\Delta$,

где $\Delta = \sqrt{(w/2 \pm x)^2 + (l/2 \pm y)^2}$ – расстояние до угла доа.

→ Ранее я использовал лишь $H_d^y(x=0,y)$ или $\langle H_d^y(x,y)\rangle_x$ и $\sim \ln\Delta$ (не проявился в т-ре и интегрировался во второй).

В расчет для Славика, rect.dots

30/III Смена процессора и пере-инсталляция Software. Письма Славику, Мрыкову ~ Л.

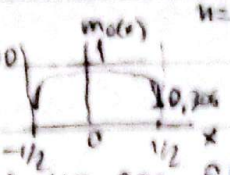
SW wires (интерфейсы)

$$\tilde{\Lambda} m(x) = \frac{\rho}{\pi}\int_{-1/2}^{1/2} dx' \frac{m(x')}{(x-x')^2+\rho^2}$$

Date. 31 · 03. 31/III

Вернемся к расчету СФ и СЗ wires методом итерации с Затравочных функций $m_0(x) = \cos(\pi n x)$, $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

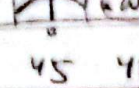
и $m_0(x) = 1$ после 3-х итераций дало (первая итер. - аналитически) и $\omega_0^c = 0{,}263$ (по $\overline{x(x)}$).



(wires $\rho = 0{,}011$)

$m_3(x)$ / x	0	0,05	0,10	0,15	20	25	30	35	40	45	0,50	0,48
	0,957	957	955	953	949	942	932	915	879	782	0,306	0,598

Затравочная $u_0(x) = \cos(\pi x)$, $x \in [-1/2, 1/2]$ дает (после 2-х итераций): $\omega_1^s = 0{,}228$



x	0	0,05	10	15	20	25	30	35	40	45	48	0,50
	0,945	935	905	855	787	702	603	491	370	242	158	0,084
$m_2(x)$	0,942	931	897	841	766	672	563	441	311	179	103	0,055
$m_3(x)$	0,914											0,062

после 3-х итер.

после 2-х итер. с затравочной функцией $\cos(\pi x)$, $\rho = 0{,}043$ от $S/\overline{w}$.

$$m_1(x) = \frac{\rho}{\pi}\int_{-1/2}^{1/2} dx' \frac{\cos(\pi x')}{(x-x')^2+\rho^2} = \left|x'-x=\xi\right| = \frac{\rho}{\pi}\int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi \frac{\cos\pi(x+\xi)}{\xi^2+\rho^2} =$$

$$= \frac{\rho}{\pi}\int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi \frac{1}{\xi^2+\rho^2}\left[\cos\pi x\cos\pi\xi - \sin\pi x\sin\pi\xi\right]$$

$$\frac{\partial m_1(x)}{\partial x} = \frac{\rho}{\pi}\frac{\cos\pi(1/2+x)}{(1/2-x)^2+\rho^2}(-1) - \frac{\rho}{\pi}(-1)\frac{\cos\pi(-1/2)}{(x+1/2)^2+\rho^2} + \frac{\rho}{\pi}\int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi \frac{1}{\xi^2+\rho^2}(-1)\sin\pi(x+\xi)\cdot\pi =$$

$\omega_1^s = 0{,}245$

$$= -\frac{\rho}{\pi}\pi\int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi \frac{\sin\pi(x+\xi)}{\xi^2+\rho^2} = -\frac{\rho}{\pi}\int d\xi \frac{1}{\xi^2+\rho^2}\left[\sin\pi x\cos\pi\xi + \sin\pi\xi\cdot\cos\pi x\right]\pi$$

$$\frac{\partial m_1}{\partial x}\cos\pi x + m_1(x)\sin\pi x = -\frac{\rho}{\pi}\pi\int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi \frac{\sin\pi\xi}{\xi^2+\rho^2} \Rightarrow m_1(1/2) = \rho\int_0^1 d\xi \frac{\sin\pi\xi}{\xi^2+\rho^2}$$

$$\frac{\partial m_1}{\partial x}\sin\pi x - m_1(x)\cos\pi x = -\frac{\rho}{\pi}\pi\int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi \frac{\cos\pi\xi}{\xi^2+\rho^2} \Rightarrow \left(\frac{\partial m_1}{\partial x}\right)_{x=1/2} = -\rho\int_0^1 d\xi \frac{\cos\pi\xi}{\xi^2+\rho^2}$$

Или $\frac{\partial^2 m_1(x)}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\pi}\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{(1/2-x)^2+\rho^2}(-1)\pi + \frac{\rho}{\pi}(-1)\frac{\sin(-\pi/2)}{(1/2+x)^2+\rho^2}\pi - \frac{\rho}{\pi}\int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi \frac{\cos\pi(x+\xi)}{\xi^2+\rho^2}\cdot\pi^2 =$

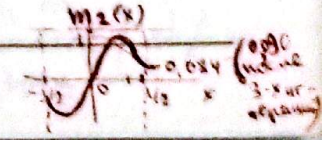
$$= \rho\frac{1}{(1/2-x)^2+\rho^2} + \frac{\rho}{(1/2+x)^2+\rho^2} - \pi^2 m_1(x)$$

$$\frac{\partial^2 m_1(x)}{\partial x} + \pi^2 m_1(x) = \frac{\rho}{(1/2-x)^2+\rho^2} + \frac{\rho}{(1/2+x)^2+\rho^2}$$ — диф. ур. для СФ wire после 1 итерации

При $\rho = 0$ $m_1^{(0)}(x) = \cos(\pi x)$, $m_1^{(0)}(1/2) = 0$, $\frac{\partial m_1^{(0)}}{\partial x}(1/2) = -\pi$

При $\rho > 0$, $m_1(1/2) \neq 0$, $m_1(1/2)$ растет с ρ > 0, $\frac{\partial m_1}{\partial x}(1/2) < 0$ по модулю меньше, чем π

Note: Затравочная $\sin(2\pi x)$ дает $\omega_2^s = 0{,}269$ и СФ (2 итер.) (больше $\omega_0^c = 0{,}263$)



после 3-х итер. практически

Escaneado con CamScanner

Date. 01 . 04 .

(28-3/8)

Да по бис. зад. исходя из Лорана-инт. ур-я: $\tilde{\Lambda}m(x) = \frac{P}{\pi}\int_{-1/2}^{1/2} dx' \frac{m(x')}{(x-x')^2+P^2}$

где $m(x)$ - любая непрерывная ф-ция, $m(x)$ - СФ не зависит от "P".

$m_0(x) = 1$ тогда 1-ая итер. дает $m_1^L(x) = \frac{P}{\pi}\int_{-1/2}^{1/2} dx' \frac{1}{(x-x')^2+P^2} = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{1/2-x}{P} + \operatorname{arctg}\frac{1/2+x}{P}\right]$

Ядро λ-я (без предположения о четности $m(x)$ от "P") все же:

$$\lambda m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g(x,x') m(x') \quad \text{и} \quad g(\xi) = \frac{2}{P}\ln\left(\frac{\xi^2}{\xi^2+P^2}\right)$$

Начнем наше построение: $m_0(x)=1$ будет $m_1(x)$:

$$m_1(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g(xx') m_0(x') = \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, g(\xi) = I_0(x,P) = \left[\xi g(\xi) - 4\operatorname{arctg}\frac{\xi}{P}\right]_{-1/2-x}^{1/2-x} =$$

$$= (1/2-x)g(1/2-x) + (1/2+x)g(1/2+x) - 4\operatorname{arctg}\frac{1/2-x}{P} - 4\operatorname{arctg}\frac{1/2+x}{P} -$$

несколько другая функция, чем $m_1^L(x)$ из Лорана инт.-ур.

В нашей МСРД-перенормировке $\left(\frac{\lambda}{(-\pi)}\to\lambda\right)$: $m_n(x) = \frac{(-1)}{4\pi}\int dx' g(xx') m_{n-1}(x')$, $n=1,2\ldots$

и $m_1(x) = -\frac{1}{4\pi}\left[\xi g(\xi) - 4\operatorname{arctg}\frac{\xi}{P}\right]_{-1/2-x}^{1/2-x} =$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left[\xi g(\xi)\right]_{-1/2-x}^{1/2-x} + \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{1/2-x}{P} + \operatorname{arctg}\frac{1/2+x}{P}\right] = -\frac{1}{4\pi}\xi g(\xi)\Big|_{-1}^{1} + m_1^L(x)$$

$m_1^L(x) \approx 1$ (сделаем проще), $\delta m(x) = -\frac{1}{4\pi}\xi g(\xi)\Big|_{-1/2-x}^{1/2-x}$ - рассм., $\delta m(x) \ll 1$.

$$\delta m(x=\pm 1/2) = -\frac{1}{4\pi}\xi g(\xi)\Big|_{-1}^{0} = -\frac{1}{4\pi}\left[0\cdot g(0) - (-1)g(-1)\right] = -\frac{1}{4\pi}g(1) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{2}{P}\ln\left(\frac{1}{1+P^2}\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{P}\ln(1+P^2) \underset{P\ll 1}{=} \frac{1}{2\pi P}P^2 = \frac{1}{2\pi}P \ll 1.$$

$$\delta m(0) = -\frac{1}{4\pi}\xi g(\xi)\Big|_{-1/2}^{1/2} = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{2}g(1/2) - (-\tfrac{1}{2})g(-1/2)\right] = -\frac{1}{4\pi}g(1/2) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{2}{P}\ln\left(\frac{1/4}{1/4+P^2}\right) = \frac{1}{2\pi P}\ln(1+4P^2) = \frac{2}{\pi}P \ll 1$$

$\Rightarrow$ $m_1^L(x)$ и $m_1(x) = m_1^L(x) + \delta m(x)$ - различаются очень мало, $m_1(x)$ чуть $> m_1^L(x)$.

Вместо $m_1(x)$ - более сложной можно тоже $m_1^L(x)$.

Пусть $m(x,P)$ - точное СФ $\lambda m(x) = \int dx' g(xx') m(x')$,

разложим ее по P: $m(x,P) = m(x,0) + O(P) = m(x,0) + \mu(x)P$

$\lambda m(x,0) + \lambda O(P) = \int dx' g(xx')\left[m(x',0) + \mu(x')P\right]$, $g(xx',P) = g(xx',0) + \delta g(xx')\cdot P$

$\lambda m(x,0) + \lambda\mu(x)P = \int dx' \left[g(xx',0) + \delta g(xx')P\right]\left[m(x',0) + \mu(x')P\right] =$

$= \int dx' \left[g(xx',0)\,m(x',0) + P\,\delta g(xx')\,m(x',0) + P\,g(xx',0)\,\mu(x')\right] =$

$= \lambda m(x,0)$

Escaneado con CamScanner

Date. . . Док-во сходимости Лоренц. инт. ур до ρ^2

$= \int dx' \left[g(xx',\rho)\, m(x',0) + g(xx',0)\mu(x')\cdot\rho \right] = \int dx' g(xx',\rho) m(x',0) - 4\pi\rho\mu(x)\rho$

$\lambda = -4\pi + O(\rho) \to \lambda m(x,0) + [\lambda + 4\pi]\rho\mu(x) = \int dx' g(xx') m(x',0)$

до $[\lambda+4\pi]\rho = O(\rho)\cdot\rho \sim \rho^2$ — можно пренебречь в инт. ур ρ^n и выше.

$\Rightarrow \lambda m(x,0) = \int dx' g(xx';\rho) m(x',0)$ с точн. до ρ^2, т.е. можно считать,

что $m(x,\rho) = m(x,0)$ от ρ не зависит, дифф. $\frac{\partial}{\partial\rho}$ инт. ур. и получаем ур Лоренц-формы (более простую). Это оправдывает Лоренц. инт. ур (!) и позволяет численно.

$\left(-\frac{1}{4\pi}\right)\lambda_n = \frac{1}{2}(\tilde{\Lambda}_n + 1)$ — связь между СЗ обычного и Лоренц. инт. ур - уровень в MCAD (SW-wizes, mcad)

SW-wizes - численно

Матрич. метод $\tilde{\Lambda} m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g_L(x,x') m(x')$ заменяется на

$$\tilde{\Lambda} m(x_i) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g_L(x_i,x') m(x') = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} g_L(x_i,x_j) m(x_j)$$

Вообще, строго говоря $\frac{1}{N} \to A_j$ - квадратурные коэффициенты. (Гаусса-Лагранжа) Лежандра

$m(x_i) = m_i$ — образуют N-вектор, $g_{ij} = g_L(x_i,x_j)$.

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} g_{ij} m_j = \tilde{\Lambda} m_i, \quad \hat{G}\vec{m} = \tilde{\Lambda}\vec{m} \text{ - задача}$$

поиска СЗ и СФ $\vec{m} = (m(x_1), m(x_2) \dots m(x_N))$ $N\times N$ матрицы $G_{ij} = \frac{1}{N} g_{ij}$.

Нормировка $\int_{-1/2}^{1/2} dx f(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x_k)$ обеспечивает $\int_{-1/2}^{1/2} dx = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(1) = 1$.

но правильно $\int_{-1/2}^{1/2} dx f(x) = \sum_{k=1}^{N} A_k f(x_k)$ и $\int dx' g(x_i,x') m(x') = \sum_{j=1}^{N} A_j g_{ij} m(x_j)$

Тогда $\sum_{k=1}^{N} A_k = 1$, можно взять $A_k = \frac{1}{N}$ - но это очень неточно.

A_k - считаются через корни ортогональных полиномов на $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

Сектор $\tilde{\Lambda}$ полученная при $A_k = \frac{1}{N}$ зависимости от N, 2/N

хоть и СФ - разумные. Используем квадратур. коэф A_k и точки x_k методом Гаусса-Лежандра (Arzkan, p.910, 1011-13).

$$\tilde{\Lambda} m(x_i) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g_L(x_i,x') m(x') = \sum_{k=1}^{N} A_k g(x_i,x_k) m(x_k)$$

$$\tilde{\Lambda} m_i = \sum_{k=1}^{N} A_k g_{ik} m_k \to \underset{\text{симметр.}}{\tilde{\Lambda} m_i A_i^{1/2}} = \sum_k \left(A_i^{1/2} g_{ik} A_k^{1/2}\right) A_k^{1/2} m_k$$

Замена $A_i^{1/2} m_i = \psi_i$, $A_i^{1/2} g_{ik} A_k^{1/2} = G_{ik}$, тогда

Date. . .

$\sum_{k=1}^{N} G_{ik}\psi_k = \tilde{\Lambda}\psi_i$ обычная матр. ур. $\hat{G}\vec{\psi} = \tilde{\Lambda}\vec{\psi}$, $\hat{G}$ – $N\times N$ матр., $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2)_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$

$x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, интервал $\Delta x = 1$, поэтому $\chi_k[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] = \frac{1}{2}\chi_k[-1,1]$, $A_k = \frac{1}{2}A_k[-1,1]$ с стандартной инт-ии

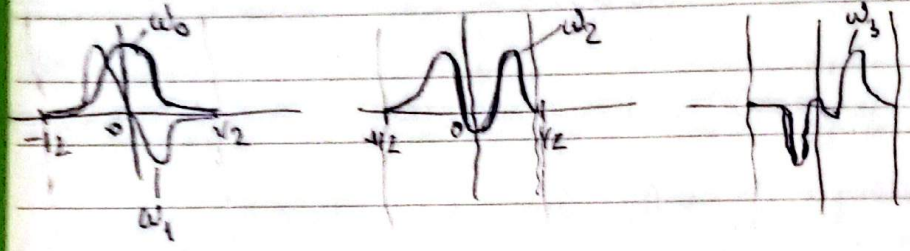
$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} f(x_k)A_k$, $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \cdot 1 = \sum_{k=1}^{N} A_k = 1$.

$x_k[-1,1]$ и $A_k[-1,1]$ берем из Arfken, P 1012 – 1013, $N = 10$, что хорошо если $f(x)$ есть полином степени $\le 2N-1 = 19$, Ядро $g_L(\xi) = \frac{\rho}{\pi}\frac{1}{\xi^2+\rho^2}$

должно хорошо аппроксимироваться полиномами, т.к. сингулярностей нет.

$G_{mn} = A_m^{1/2} g_{mn} A_n^{1/2}$, $g_{mn} = g_L(x_m, x_n)$.

Получаем (Cw-wires.mcd) спектр $\tilde{\Lambda}_n$ и $(-\frac{1}{4\pi})\lambda_n = \frac{1}{2}(\tilde{\Lambda}_n + 1)$ оказывается в интервале $[0{,}98,\ 2{,}65]$?, хотя $(-\frac{1}{4\pi})\lambda_n < 1$ должны быть.



, $\omega_0 \approx \omega_1$, $\omega_2 \approx \omega_3$, но ω_n четных мод ниже.

Для $\int_{-1}^{1} dx f(x) = \sum_{k=1}^{N} A_k f(x_k)$, $A_k = \frac{(-2)}{(N+1)P_{N+1}(x_k)P'_N(x_k)}$,

где x_k есть N штук корней $P_N(x) = 0$, $P_N(x)$ – полином Лежандра.

P. Zwillinger дает (p.697) таблицу x_k, A_k для $N \le 12$.

$A_k = \frac{1}{N}$ (но с другими x_k) – квадратура Чебышева.

Выберем квадратуру Radau (p.700), т.к. там есть $N = 13$ и $x_k = 0, \pm\frac{1}{2}$.

Спектр $\tilde{\Lambda}$ дает $(-\frac{1}{4\pi})\lambda_n = \frac{1}{2}(\tilde{\Lambda}_n + 1)$ ищем в инт. $[0{,}59,\ 2{,}33]$ – немного лучше, чем в методе Гаусса-Лежандра.

	wires, $\rho = 0{,}011$, Собств. вектора m_i							
x_i	$-0{,}5$	$-0{,}477$	$-0{,}423$	$-0{,}333$	$-0{,}241$	$-0{,}125$ ●	○	
ω_0 m_{0i}	$2{,}16\cdot10^{-3}$	$7{,}35\cdot10^{-3}$	$0{,}020$	$0{,}063$	$0{,}308$	$2{,}252$	$9{,}469$ чет. ←	ум. на $0{,}1$
ω_1 m_{1i}	$2{,}16\cdot10^{-3}$	$8{,}01\cdot10^{-3}$	$0{,}022$	$0{,}086$	$0{,}596$	$6{,}669$	$-3{,}212$ чет.	
ω_2 m_{2i}	$-1{,}44\cdot10^{-3}$	$-5{,}46\cdot10^{-3}$	$-0{,}016$	$-0{,}071$	$-0{,}567$	$-7{,}048$	0 нечет.	$\omega_1 \approx \omega_2$, ω_1 ум. на $0{,}1$
ω_3 m_{3i}	$4{,}77\cdot10^{-3}$	$0{,}019$	$0{,}069$	$0{,}448$	$7{,}024$	$-0{,}669$	$-0{,}145$ чет.	$\omega_3 \approx \omega_4$, ω_3 ум. на $0{,}1$
ω_4 m_{4i}	$3{,}96\cdot10^{-3}$	$0{,}017$	$0{,}062$	$0{,}428$	$7{,}035$	$-0{,}571$	0 нечет.	

Escaneado con CamScanner

Date.

Вывод: $\omega_0 = 2\pi k \cdot m_0(x)$ – невырожденное,
$\omega_{1,2}$ – вырожденное, одна из СФ чет, вторая нечет.
$\omega_{3,4}$

$$\tilde{\Lambda}m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g_L(xx')m(x') = \int_{-1/2}^{0} dx' g_L(xx')m(x') + \int_{0}^{1/2} dx' g_L(xx')m(x') =$$

$$= \left|x' = -\xi\right| = -\int_{0}^{1/2} d\xi\, g_L(|x+\xi|)m(-\xi) + \int_{0}^{1/2} dx' g_L(|x-x'|)m(x')$$

$$\tilde{\Lambda}m(x) = \int_{0}^{1/2} d\xi\, g_L(|x+\xi|)m(-\xi) + \int_{0}^{1/2} dx' g_L(|x-x'|)m(x')$$

Если $m(x)$ чет: $\tilde{\Lambda}m(-x) = \tilde{\Lambda}m(x) = \int_{0}^{1/2} d\xi\, g_L(|x-\xi|)m(\xi) + \int_{0}^{1/2} dx' g_L(|x-x'|)m(x') =$

$$= 2\int_{0}^{1/2} dx' g_L(|x-x'|)m(x'), \quad \tilde{\Lambda}m(x) = 2\int_{0}^{1/2} dx' g_L(x,x')m(x')$$ – ядро чет. $m(x)$

б) $m(x)$ – нечет. $\tilde{\Lambda}m(-x) = -\tilde{\Lambda}m(x) = -\int_{0}^{1/2} d\xi\, g_L(|x-\xi|)m(\xi) + \int_{0}^{1/2} dx' g_L(|x+x'|)m(x') =$

$$= -(\cdot) - \int_{0}^{-1/2} d\xi\, g_L(|x-\xi|)m(-\xi) = -\int_{0}^{1/2} d\xi\, g_L(|x-\xi|)m(\xi) + \int_{-1/2}^{0} d\xi\, g_L(|x-\xi|)m(\xi)$$

$$\tilde{\Lambda}m(x) = \left\{ \int_{0}^{1/2} d\xi\, g_L(|x-\xi|) + \int_{-0.5}^{0} d\xi\, g_L(|x-\xi|)m(\xi) \right\} = \int_{-1/2}^{1/2} d\xi\, g_L(|x-\xi|)m(\xi)$$

Точно для нечет СФ: $\tilde{\Lambda}m(x) = \int_{0}^{1/2} d\xi\, g_L(|x-\xi|)m(\xi) - \int_{0}^{1/2} d\xi\, g_L(|x+\xi|)m(\xi)$

$$\tilde{\Lambda}m(x) = \int_{0}^{1/2} dx' G(x,x')m(x'), \quad G(x,x') = g_L(|x-x'|) - g_L(|x+x'|)$$

$G(x',x) = G(x,x')$ – сим., но не разностное.

для нечет. СФ

Для чет. СФ $\left(\frac{\tilde{\Lambda}}{2}\right)m(x) = \int_{0}^{1/2} dx' g_L(x,x')m(x')$, $x \in [0, 1/2]$ – сжали сег. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

Так позволило сосредоточить на $[0, 1/2]$ все 13 точек метода Радо,

$x_k^{[0,1/2]} = \frac{1}{4}\left(x_k^{[-1,1]} + 1\right)$, т.е. более точно найти $m(x_k) = m_k$.

$A_k^{[0,1/2]} = (1/4) A_k^{[-1,1]}$.

Для $x \in [0, 1/2]$: $\tilde{\Lambda}m(x) = \int_{0}^{1/2} dx' G(x,x')m(x')$, $G(x,x') = g_L(|x-x'|) \pm g_L(|x+x'|)$,

'+' чет, '−' нечет. СФ.

Видимо, задача на СФ, СЗ с $x \in [0, 1/2]$ не эквивалентна ли на $[-1/2, 1/2]$.

В выходе док-ва – дефект.

Escaneado con CamScanner

Date. 03.04.

Погрешность $m_0(x)$ by Лоренц $FL(x) = \frac{a^2}{x^2+a^2} \to 0.5$ и ширина $\Gamma_0(x)$ по начальной кривой функции.

Сильное падение $\frac{m_0(x)}{\Gamma_0(x)}$ - удвоение от x_1, $\left(\frac{1}{\pi x}\right)h_0 = 1{,}011 \Rightarrow \omega_0 = 0{,}95$

Как в самолёте - метода Гаусса $\left(\frac{1}{\pi\pi}\right)h_0 = 3{,}65$ (!?) для

Сферическая формула $\int_{-1}^{1} dx\, f(x) = \sum_{k=1}^{N} A_k f(x_k)$ очень нужна для

$N=13$ и матрица $\hat{G}\vec{\varphi} = \hat{\Lambda}\vec{\varphi}$ на СФ,СЗ - решение верно.

но вообще для $m(x_k)$ важна функция.

→ Вопрос об аналитическом методе для инт. ур. с $g_L(\xi) = \frac{\rho}{\pi}\frac{1}{\xi^2+\rho^2}$ не работает. Ведь ест для $g^2(\xi) = |\xi|$ нужен.

Наверное дело в том, что точки x_k мало. $g_L(\xi)$ имеет резкий пик при $\xi = 0$ и он плохо воспроизводится при $\xi = x_m$.

3/IV В Abramowitz-Stegun есть A_k метода Гаусса-Лежа. до $N=96$

Требовал $(N=24)$, $m_0(x)$ была более плоской → ко СЗ $\tilde{\Lambda}_1$, $\tilde{\Lambda}_2\left(-\frac{1}{4\pi}\right) > 1$. $\max\left|\frac{\lambda_n}{4\pi}\right| \approx 1{,}4$, что гораздо лучше чем для $N=10$ и $N=13$ used ранее.

→ День писем. Написал - 12 шт.

Подготовил 5 стр. Fax для А. Славина о SW-wires и нашу

4/IV Разговор по с R. Chantrell из Seagate. Письмо to R. Chantrell

Анализ письма N. Smith и писем Slavina. Письмо Славину.

5/IV Метод итераций для СФ,СЗ wires работает медленно

Можно, можно:

1) Искать решения в виде Фурье-разложения СФ:

а) четных (вначале осн. моду) СФ по $\cos(2\pi n x)$

б) нечетных СФ — по $\sin(2\pi n x)$

2) Описать основную моду ($\approx \cos(\pi x)$ как $\cos(\pi a x)$ с $a<1$, а моду $\propto \sin(2\pi x)$ описать как $\sin(2\pi b x)$ и найти a, b подгонкой из вар. принц.

Escaneado con CamScanner

Date.

SW - wires (собственная модель - trial functions)

Метод 2) дает собственные (ф - функции, через которые выражается)

пусть $m_0(x) = \cos(\pi a x)$ на инт. $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$\hat{\Lambda} m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' \, g_L(xx') m(x')$$

$$\cos(\pi a x) = \cos\left[2\pi\left(\frac{a}{2}\right)x\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x), \quad a_n = \frac{(-1)^n \left(\frac{a}{2}\right) \sin\frac{\pi a}{2}}{\pi \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - n^2\right)}$$

Зотин с. 321.

$$g_L(\xi) = \frac{P}{\pi} \frac{1}{p^2 + \xi^2} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\pi n x), \quad A_n = \int_{-1}^{1} d\xi \, g_L(\xi) \cos(\pi n \xi)$$

на инт. $\xi \in [-1, 1]$

$$\tilde{\Lambda}(a) = \frac{\int dx\, dx' \, g_L(xx') m_0(x) m_0(x')}{\int dx \, m_0^2(x)}, \quad \lambda(a) \text{ удобнее через } \tilde{\Lambda}(a) \quad (m \to a)$$

$$\left(-\frac{1}{4\pi}\right)\lambda = \frac{1}{2}\left(\tilde{\Lambda} + 1\right).$$

I Зависимость $\tilde{\Lambda}$ от a: $\max \tilde{\Lambda}(a)$?

II Как найти $\tilde{\Lambda}(x,a) = \frac{1}{m_0(x)} \int_{-1/2}^{1/2} dx' \, g_L(xx') m_0(x)$ и зависимость от a: $F(a) = \int_{-1/2}^{1/2} dx \left[\tilde{\Lambda}(x,a) - \tilde{\Lambda}_{SZ}(a)\right]^2 \to \min$. $\tilde{\Lambda}_{SZ}(a) = \int_{-1/2}^{1/2} dx \, \tilde{\Lambda}(x,a)$.

$$J(x,a) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' \, g_L(xx') m_0(x') = \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi \, g_L(\xi) m_0(\xi + x) = \left| \begin{matrix} \epsilon_n = 2 - \delta_{n0} \\ x' - x = \xi \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi \sum_{n=0} \frac{\epsilon_n}{2} A_n \cos(\pi n \xi) \cos(\pi a(\xi + x)) = \sum_{n=0} \frac{\epsilon_n}{2} A_n \frac{1}{2} \int d\xi \left[\cos\pi(n-a)\xi + \cos\pi(n+a)\xi\right] =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=0} \epsilon_n A_n \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin\pi(n-a)(\xi+x)}{(n-a)} + \frac{\sin\pi(n+a)(\xi+x)}{(n+a)}\right]_{-1/2-x}^{1/2-x}$$

$$\tilde{\Lambda}(x,a) = \frac{1}{\cos(\pi a x)} J(x,a)$$

По методу Ритца для первого случая

I - метод для $m_0(x) = \cos(\pi a x)$ с a из $\max \tilde{\Lambda}(a)$:

$a_0 = 0{,}883$. $\tilde{\Lambda}(a_0) = 0{,}975 \to \lambda_0 = (-4\pi) \cdot 0{,}988$ и $\omega_0 = 0{,}252$ - мимо, т.к. $f_0 = 0{,}256$ - экспер.

T.k. trial function $\cos(\pi a x)$ не такая уже и хорошая.

$\Rightarrow$ Если вообще не сходится $\cos(\pi a x)$ как пробную, то π = const, как в интегральных 31/III

II - метод минимизации ср.-кв. невязки для $a_0 = 0{,}943$. $\tilde{\Lambda}(a_0) = 0{,}994$

$\lambda_0 = (-4\pi) \cdot 0{,}992$ и $\omega_0 = 0{,}244$ - довольно близко к $f_0^{\text{эксп}} = 0{,}256$.

$\frac{1}{\nu_{00}} m_0(1/2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0{,}943\right) = 0{,}089$ (!). Тогда как 31/III было для $\cos(\pi x)$ после 3-х итераций $\frac{m_0(1/2)}{a_0(a)} = \frac{0{,}062}{0{,}919} = 0{,}068$.

$F(a_0) = 0{,}374 \cdot 10^{-3}$ - немного.

Escaneado con CamScanner

Many Figure give wires

Date. . .

Разложим СФ осн. составляющей по $\cos(2\pi n x)$ на $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$\Lambda m(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g_L(x-x') m(x'), \quad m(x) = \sum_{n=0} \frac{\epsilon_n}{2} a_n \cos(2\pi n x)$$

$$\Lambda \sum_{n=0} \frac{\epsilon_n}{2} a_n \cos(2\pi n x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx' g_L(x-x') \sum_{n'=0} \frac{\epsilon_{n'}}{2} a_{n'} \cos(2\pi n' x') = \left| x'-x=\xi \right| =$$

$$= \sum_{n'=0} \frac{\epsilon_{n'}}{2} a_{n'} \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, g_L(\xi) \cos 2\pi n'(\xi+x) = \sum_{n'=0} \frac{\epsilon_{n'}}{2} a_{n'} \cdot$$

$$\cdot \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi \cos(2\pi n'(x+\xi)) \sum_{\nu=0} \frac{\epsilon_\nu}{2} A_\nu \cos(\pi\nu\xi) = \sum_{n'\nu} \frac{\epsilon_{n'}}{2}\frac{\epsilon_\nu}{2} a_{n'} A_\nu \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi \cos 2\pi n'(x+\xi) \cos\pi\nu\xi$$

$$= \sum_{n'\nu} \left(\frac{1}{2} \int d\xi \left[\cos\left\{ 2\pi n' x + \pi(2n'+\nu)\xi \right\} + \cos\left\{ 2\pi n' x + \pi(2n'-\nu)\xi \right\} \right] \right.$$

$$= \sum_{n'\nu} \frac{1}{4} \epsilon_{n'} \epsilon_\nu a_{n'} A_\nu \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin\left\{2\pi n' x + \pi(2n'+\nu)\xi\right\}}{(2n'+\nu)} + \frac{\sin\left\{2\pi n' x + \pi(2n'-\nu)\xi\right\}}{(2n'-\nu)} \right]_{-\frac{1}{2}-x}^{\frac{1}{2}-x}$$

$$= \frac{1}{8\pi} \sum_{n'\nu} \epsilon_{n'} \epsilon_\nu a_{n'} A_\nu \left[\frac{1}{(2n'+\nu)} \left[\sin\left\{ \pi n' + \pi\nu(\tfrac{1}{2}-x) \right\} - \sin\left\{ -\pi n' - \pi\nu(\tfrac{1}{2}+x) \right\} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(2n'-\nu)} \left[\sin\left\{ \pi n' - \pi\nu(\tfrac{1}{2}-x) \right\} - \sin\left\{ -\pi n' + \pi\nu(\tfrac{1}{2}+x) \right\} \right] \right] =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \sum_{n'\nu} (\cdot) \left[\frac{1}{(2n'+\nu)} \left[(-1)^{n'} \sin\pi\nu(\tfrac{1}{2}-x) + (-1)^{n'} \sin\pi\nu(\tfrac{1}{2}+x) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(2n'-\nu)} \left[-(-1)^{n'} \sin\pi\nu(\tfrac{1}{2}-x) + (-1)(-1)^{n'} \sin\pi\nu(\tfrac{1}{2}+x) \right] \right] =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \sum_{n'\nu} (\cdot)(-1)^{n'} \left[\sin\pi\nu(\tfrac{1}{2}-x) + \sin\pi\nu(\tfrac{1}{2}+x) \right] \left[\frac{1}{(2n'+\nu)} - \frac{1}{(2n'-\nu)} \right] =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \sum_{n'\nu} (\cdot)(-1)^{n'} 2\sin\tfrac{1}{2}\pi\nu \cdot \cos\pi\nu x \cdot \frac{(-2)\nu}{(2n'+\nu)(2n'-\nu)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n'\nu} (\cdot)(-1)^{n'+1} \frac{\nu \sin\left[\frac{1}{2}\pi\nu\right]}{(2n')^2 - \nu^2} \cos\pi\nu x$$

При $\nu = 2k$ - четном (то $n'+k$) $\quad \frac{\sin(\pi k)}{4[n'^2-k^2]}$ или $(-1)^{n'+1} \sin\frac{\pi\nu}{2} = \sin\frac{\pi}{2}(2n'-\nu)$

$$\Rightarrow \Lambda \sum_{n} \frac{\epsilon_n}{2} a_n \cos(2\pi n x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n'\nu} \epsilon_{n'} \epsilon_\nu a_{n'} A_\nu \frac{\nu \sin\frac{\pi}{2}(2n'-\nu)}{(2n')^2 - \nu^2} \cos(\pi\nu x)$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}(2n-\nu)}{(2n-\nu)} = \begin{cases} \pi/2, & \nu = 2n \\ 0, & \nu = 2k,\ k \neq n \\ -\frac{(-1)^{n-k}}{(2n-\nu)}, & \nu = 2k+1 \end{cases}$$

Членом с $\cos\pi(2k+1)x$ не исчезают справа - чтд

Escaneado con CamScanner

Escaneado con CamScanner

но разве $g_L(x,x')$ "плохая" функция по x и x' по отдельности?

Окт. 9/IV

Опять. $g_L(x,x') = \sum_{nn'} A_{nn'} \cos(2\pi n x)\cos(2\pi n' x')$

Видимо надо разлож. по x и x' одновр.

$$\lambda \sum_{n=0} \frac{\epsilon_n}{2} a_n \cos 2\pi n x = \int_{-1/2}^{1/2} dx' \sum_{\nu\nu'} A_{\nu\nu'} \cos(2\pi\nu x)\cos(2\pi\nu' x') \sum_{n'} \frac{\epsilon_{n'}}{2} a_{n'} \cos 2\pi n' x' =$$

$$= \sum_{\nu\nu'} A_{\nu\nu'} \frac{\epsilon_{n'}}{2} a_{n'} \cos(2\pi\nu x) \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} dx' \cos(2\pi\nu' x')\cos(2\pi n' x')}_{\frac{1}{2}\frac{2\pi}{\epsilon_{n'}}\delta_{n'\nu'}} = \sum_{\nu\nu' n'} A_{\nu\nu'} \frac{\epsilon_{n'}}{2} a_{n'} \cos(2\pi\nu x)$$

$$\frac{2\pi}{\epsilon_{n'}}\delta_{n'\nu'} = \frac{1}{2}\sum_{\nu n'} A_{\nu n'} a_{n'} \cos(2\pi\nu x) = \frac{1}{2}\sum_{nn'} A_{nn'} a_{n'} \cos(2\pi n x)$$

$$\lambda \sum_n \frac{\epsilon_n}{2} a_n \qquad \lambda \frac{\epsilon_n}{2} a_n = \frac{1}{2}\sum_{n'} A_{nn'} a_{n'} \Rightarrow \boxed{\lambda a_n = \sum_{n'} \frac{1}{\epsilon_n} A_{nn'} a_{n'}}$$

Найдем ядро. на СФ,СЗ дана матрица $\boxed{B_{nn'} = \frac{1}{\epsilon_n} A_{nn'}}$.

$$\int dx\,dx'\, g_L(xx')\cos(\pi\nu x)\cos(\pi\nu' x') = \sum_{nn'} A_{nn'} \int_{-1/2}^{1/2} dx \cos(2\pi n x)\cos(2\pi\nu x) \times$$

$$\times \int dx' \cos(2\pi n' x')\cos(2\pi\nu' x') = \sum_{nn'} A_{nn'} \frac{1}{\epsilon_n}\delta_{n\nu}\frac{1}{\epsilon_{n'}}\delta_{n\nu'} = A_{\nu\nu'}\frac{1}{\epsilon_\nu \epsilon_{\nu'}}$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} d\xi \cos(2\pi n\xi)\cos(2\pi n'\xi) = \frac{1}{2}\int d\xi\left[\cos 2\pi(n-n')\xi + \cos 2\pi(n+n')\xi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin 2\pi(n-n')\xi}{(n-n')} + \frac{\sin 2\pi(n+n')\xi}{(n+n')}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{\epsilon_n}\delta_{nn'}, \quad \epsilon_n = 2 - \epsilon_{n0}.$$

где $\boxed{A_{\nu\nu'} = \epsilon_\nu \epsilon_{\nu'} \int_{-1/2}^{1/2} dx\,dx'\, g_L(xx')\cos(2\pi\nu x)\cos(2\pi\nu' x')}$, $\nu,\nu' = 0,1,2\ldots$

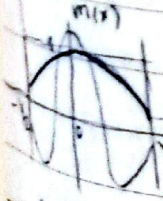
$$\to \boxed{B_{nn'} = \frac{1}{\epsilon_n} A_{nn'} = \epsilon_{n'} \int dx\,dx'\, g_L(xx')\cos(2\pi n x)\cos(2\pi n' x')}$$

$$\sum_{n'}\left(B_{nn'} - \lambda\delta_{nn'}\right)a_{n'} = 0 \quad \text{или} \quad \boxed{\hat{B}\vec{a} = \lambda\vec{a}}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \end{pmatrix}, (\hat{B})_{nn'} = B_{nn'}$$

Аксс. ур. на коэф. a_n разложения СФ

$$B_{nn'} = \epsilon_{n'} \int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, g_L(\xi)\cos(2\pi n x)\cos\left[2\pi n'(\xi + x)\right] =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} dx \cos(2\pi n x) \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, g_L(\xi)\left[\cos 2\pi n'\xi\cdot\cos 2\pi n' x - \sin 2\pi n'\xi\cdot\sin 2\pi n' x\right]$$ — не дает преимуществ.



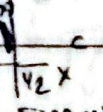
численно $\to N = 30$ — число слагаемых в ряде Ф.

Получим две низшие четные моды $x \in [-1/2, 1/2]$

$\approx \cos(\pi x)$ с $\omega_1^c = 0{,}252$ и $\approx \cos(3\pi x)$ с $\omega_3^c = 0{,}307$

Взяли $N = 100$ Сохранился этот "расклад".

В аксс. к. $x \in [0,1]$ или соотв. $\approx \sin(\pi x)$ и $\approx \sin(3\pi x)$.

~~А где же четная мода~~  ~~с $\omega_0^c \approx 0{,}263$ как в методе итераций~~ ?

Видимо, что нечетными СФ будут $\approx \sin(2\pi x)$, $\sin(4\pi x)$ — сохран. вид в $[0,1]$.

SW - wires

Date. 06 · 04 ·

Попробуем trial function $u_0(x) = \sin(2\pi b x)$ – это 3-я итерация модели

I метод. b_0 опр. из $\max \tilde{\Lambda}(b)$: $b_0 = 0{,}921$, $\tilde{\Lambda}(b_0) = 0{,}942$, $\left(-\frac{1}{4\pi}\right)\lambda = 0{,}971$ и $\omega_2^S = 0{,}282$ – великовато, ведь эксп. $f_1 = 0{,}266$.

II метод минимизации невязки дает $b_0 = 0{,}942$, $\tilde{\Lambda}(b_0) = 0{,}943$; $\left(-\frac{1}{4\pi}\right)\lambda = 0{,}972$ и частота $\omega_2^S = 0{,}281$.

Используем эту trial function в качестве затравочной итерации. После 2-х итераций получим

для $x \in [0; 0{,}48]$ – монотонно

x	0	0,05	0,10	15	20	25	30	35	40	45	0,48	0,50
$u_2(x)$	0	0,258	494	688	819	880	865	775	619	412	264	0,134

Частота (по λ) $\omega_2^S = 0{,}281$; $\tilde{\Lambda} = 0{,}944$; $\lambda\left(-\frac{1}{4\pi}\right) = 0{,}972$.

Т.е. итерации немного изменяют затравочную ф. $m_0(x) = \sin(2\pi \cdot 0{,}948 \cdot x)$, но не изменяют частоту $\omega_2^S = 0{,}281$.

Note, что эта ω_2^S заметно больше $\omega_1^S = 0{,}269$, рассчит. 31/III на затравочной $\sin(2\pi x)$.

Но с trial function $m_0^c \approx 1$ просто ввести fitting parameter a, в как для $\cos(\pi a x)$, $\sin(2\pi b x)$, нежели.

Boundary Conditions

6/IV Граничные условия с учетом магнитостатики

Ур. Л.-Л. $\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} + \vec{M} \times \vec{H}_{ef} = 0$, $\vec{H}_{ef} = d\nabla^2 \vec{M} + \vec{H}_d + \vec{H}$

Будем считать, что $\vec{H}_d(\vec{r})$ – магнитостат. поле имеет поверхностную часть.

$$\varphi(\vec{r}) = -\operatorname{div} \int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}' = -\int_V \frac{\operatorname{div}\vec{M}(r')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' + \oint_S \frac{\vec{n}' \cdot \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} ds', \quad r \in S'$$

$$\vec{H}_d(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) = \nabla_{\vec{r}} \int_V \frac{\operatorname{div}\vec{M}(r')}{|r-r'|} d^3r' - \nabla_{\vec{r}} \oint_S \frac{\vec{n}:\vec{M}(\vec{r}')}{|r-r'|} ds'$$

$$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 = 0 \qquad \vec{I}_1 = \int_{V_\varepsilon} d\vec{M} \times \nabla^2 \vec{M}\, dv = -\int_{S_\varepsilon} d\vec{M} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial n} ds = -d \int_{S_\varepsilon} \vec{M} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial n}$$

$$\Rightarrow \vec{I}_2 = \int_{V_\varepsilon} dv\, \vec{M} \times \vec{H}_d = \int_{V_\varepsilon} dv\, \vec{M}(r) \times \left[-\int_V \rho(r') \nabla_r \frac{1}{|r-r'|} d^3r' - \oint_S \sigma(r') \nabla_r \frac{1}{|r-r'|} ds' \right] =$$

Date.

$\vec{I}_3 = \left| \vec{M}(\vec{r}) \text{ берется } \text{в т. } \vec{r}' \text{ на поверхности} \right| = -\vec{M}(\vec{r}) \times \int_{V_\varepsilon} dV \left[\int_V d^3r' \rho(\vec{r}') \nabla_{\vec{r}} \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) + \int_S dS' \vartheta(\vec{r}') \nabla_{\vec{r}} \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \right] =$

$\int_{V_\varepsilon} dV \nabla_{\vec{r}} \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) = \int_{S_\varepsilon} dS \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{n} \approx S_\varepsilon \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{n}$

$\vec{I}_2 = -\vec{M}(\vec{r}) \times \left[\int_{\vec{r}' \in V, \vec{r} \in S_\varepsilon} d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \int_{\vec{r}' \in S, \vec{r} \in S_\varepsilon} dS' \vartheta(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] S_\varepsilon \vec{n} \approx$ — главн. вклад, т.к. $\vec{r}$ можно совп. с $\vec{r}'$.

$\approx -S_\varepsilon \vec{M} \times \vec{n} \left[\int dS' \frac{\vartheta(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right]$

$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 = -dS_\varepsilon \vec{M} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial n} - S_\varepsilon \vec{M} \times \vec{n} \int dS' \frac{\vartheta(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 0, \quad \vartheta(\vec{r}') = \vec{n}' \cdot \vec{M}(\vec{r}')$

$-d\vec{M} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial n} - \vec{M} \times \vec{n} \int_S dS' \frac{\vartheta(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 0$ в точке поверхности тела $\vec{r} \in S$.

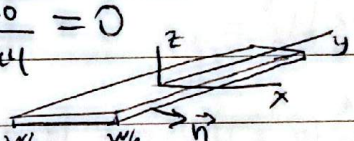
Линеаризация $\vec{M}(\vec{r},t) = \vec{M}_0 + m(\vec{r},t)$ где $\frac{\partial \vec{M}}{\partial n} = \frac{\partial \vec{m}}{\partial n}$

$d(\vec{M}_0+\vec{m}) \times \frac{\partial \vec{m}}{\partial n} + (\vec{M}_0+\vec{m}) \times \vec{n} \int dS' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{n}' \cdot [\vec{M}_0 + \vec{m}(\vec{r}')] = 0$

$\vec{m}$: $d\vec{M}_0 \times \frac{\partial \vec{m}}{\partial n} + (\vec{M}_0 \times \vec{n}) \int_S dS' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{n}' \cdot \vec{m}(\vec{r}') + (\vec{m} \times \vec{n}) \int_S dS' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{n}' \cdot \vec{M}_0 = 0$

$\vec{M}_0$: $(\vec{M}_0 \times \vec{n}) \int dS' \frac{\vec{n}' \cdot \vec{M}_0}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 0$

Для wires примем



$\vec{M}_0 = (0, M_y^0, 0)$

$\vec{m} = (m_x, 0, m_z)$

Гр. усл. при $\vec{r} \in$ плоск. $x \in \pm \frac{w}{2}$.

$\vec{n} = \vec{i}, \ x = w/2$

$\vec{n} = -\vec{i}, \ x = -w/2$.

$\vec{M}_0 \times \vec{m} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & M_0^y & 0 \\ m_x & 0 & m_z \end{vmatrix} = \vec{i} M_0^y m_z - \vec{k} M_0^y m_x$

$\vec{m} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ n_x & 0 & 0 \\ m_x & 0 & m_z \end{vmatrix} = -\vec{j} n_x m_z, \quad \vec{M}_0 \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & M_0^y & 0 \\ n_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k} M_0^y n_x$

$\vec{i}$: $d M_0 \frac{\partial m_z}{\partial n} = 0$ $\quad$ $\vec{j}$: $-n_x m_z \int_S dS' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} (\vec{n}' \cdot \vec{M}_0) = 0$

$\vec{k}$: $-d M_0 \frac{\partial m_x}{\partial x} - M_0 n_x \int_S dS' \frac{\vec{n}' \cdot \vec{m}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 0, \quad \vec{n}' \cdot \vec{m} = n_x' m_x + n_z' m_z$

при $x = \pm \frac{w}{2}$: $\frac{\partial m_z}{\partial n} = 0, \ m_z = 0, \quad d \frac{\partial m_x}{\partial x} + n_x \int_S dS' \frac{\vec{n}' \cdot \vec{m}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 0$

Если объема нет, то гран. условия для wires при $x = \pm \frac{w}{2}$: $m_z(\pm w/2) = 0$

и $\int_S dS' \frac{\vec{n}' \cdot \vec{m}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 0$. $\quad \int_S dS' \frac{\vec{n}' \cdot \vec{m}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int_{S: z=\pm\frac{w}{2}} dS' \frac{\vec{n}' \cdot \vec{m}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \int_{S: x=\pm\frac{w}{2}} dS' \frac{\vec{n}' \cdot \vec{m}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} =$

$= \int_{z'=0} dx' dy' \frac{\vec{n}' \cdot \vec{m}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \int_{x'=\pm\frac{w}{2}} dy' dz' \frac{\vec{n}' \cdot \vec{m}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = (\pm) \int_{z'=0} dx' dy' \frac{m_z(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + (\pm) \int_{x'=\pm\frac{w}{2}} dy' dz' \frac{m_x(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 0$

Escaneado con CamScanner

Date.

ВО - малый цилиндр на границе:



$\vec{n}(r) = \begin{cases} \vec{n}_0 \text{ сверху } S \\ -\vec{n}_0 \text{ снизу } S \end{cases}$

$$\vec{I}_2 = \int_{V_\varepsilon} dV\, \vec{M}(r) \times \vec{H}_d(r) \approx M(\vec{r}) \times \int_{V_\varepsilon} dV\, \vec{H}_d(\vec{r}) = -\vec{M}(r) \times \int_{V_\varepsilon} dV\, \nabla_r \varphi(\vec{r}) =$$

$$= -\vec{M}(\vec{r}) \times \oint_{S_\varepsilon} dS\, \varphi(\vec{r})\vec{n} = -\vec{M}(r) \times \left[\int_{S_\varepsilon^+} dS\, \varphi(r)\vec{n}_0 - \int_{S_\varepsilon^-} dS\, \varphi(r)\vec{n}_0 + \int_{S_{бок}} dS\, \varphi(r)\vec{n} \right]$$

$$= -\vec{M}(\vec{r}) \times \vec{n}_0 \left[\int_{S_\varepsilon^+} dS\, \varphi(r) - \int_{S_\varepsilon^-} dS\, \varphi(r) \right] = -\vec{M}(\vec{r}) \times \vec{n}_0 \left[\varphi_+ - \varphi_- \right] S_\varepsilon$$

Но магнитостат. потенциал φ непрерывен на поверхности S и $\varphi_+ = \varphi_-$,

$\Rightarrow \vec{I}_2 = 0$. Вклад $S_{бок}$: $\int_{S_{бок}} dS\, \varphi(r)\vec{n} \approx \bar{\varphi}(r)\vec{n} S_{бок} \approx \bar{\varphi}\vec{n}(2d \cdot 2\pi R_\varepsilon) =$

$\approx \bar{\varphi}\vec{n}\, 4S_\varepsilon \cdot \left(\frac{d}{R}\right) \xrightarrow{\text{т.к. } \frac{d}{R_\varepsilon} \to 0} 0$

Или иначе:

$$\vec{I}_2 = M(r) \times \int_{V_\varepsilon} dV\, \vec{H}_d(r) = \vec{M} \times S_\varepsilon \int_0^{2d} d\xi\, \vec{H}_d(\xi), \quad \xi \text{ координата } \parallel \vec{n}_0.$$

$$\int_0^{2d} d\xi\, H_d^\xi(\xi) = -\int_0^{2d} d\xi\, \nabla_\xi \varphi(r) \cdot \vec{n}_0 = -\int_0^{2d} d\xi\, \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = -\left[\varphi_+ - \varphi_-\right] = 0$$

$$\int_0^{2d} d\xi\, H_d^{\eta,\xi}(\xi) = -\int_\varepsilon^{2d} d\xi\, \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial \eta} = -\frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^{2d} d\xi\, \varphi(\xi)$$

$$\int_{V_\varepsilon} dV\, H_d^\alpha(r) = \int d\xi\, d\eta\, d\zeta\, H_d^\alpha(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) = S_\varepsilon \int_{-d}^{d} d\xi \underbrace{\left\langle H_d^\alpha(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) \right\rangle_{\eta,\zeta}}_{} =$$

$$= S_\varepsilon \int_{-d}^{d} d\xi\, \bar{H}_d^\alpha(\xi, \vec{r})$$

$$\langle H_d^\xi \rangle_{\eta,\zeta} = \frac{1}{S_\varepsilon} \int d\eta\, d\zeta\, H_d^\xi =$$

$$\hookrightarrow = \frac{1}{S_\varepsilon^{(-1)}} \int d\eta\, d\zeta\, \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}; \quad \int_{V_\varepsilon} H_d^\xi(\vec{r}, \vec{\xi})\, dV = -\int d\eta\, d\zeta \int_{-d}^{d} d\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = -\int d\eta\, d\zeta \left[\varphi(+0) - \varphi(-0)\right] =$$

$$= -S_\varepsilon \left[\varphi_+ - \varphi_-\right] = 0$$

Но $\int_{V_\varepsilon} H_d^\eta(\vec{r}, \vec{\xi})\, dV = -\int d\xi \int d\zeta \int d\eta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\int d\xi \int d\zeta \underbrace{\left[\varphi_+ - \varphi_-\right]}_{\text{вдоль } \eta \perp \xi} = 0.$ (вдоль ξ)

т.е. $\int_{V_\varepsilon} dV\, H_d^{\eta,\xi} = 0$ в силу непрерывности $\varphi(r)$ вдоль S - поверхности тела.

$\int_{V_\varepsilon} dV\, H_d^\xi = 0$ в силу $\varphi(\xi = +0) - \varphi(\xi = -0) = 0$ непрерывности $\varphi(r)$ вдоль нормали $\vec{n}_0 \perp S$.

→ Сам вид $\varphi(r) = \int_V \frac{\rho(r')}{|r - r'|} dV' + \oint_S \frac{\sigma(r')}{|r - r'|} dS'$ - говорит об отсутствии зарядов дипольного слоя и непрерывности $\varphi(r)$ на S.

Чтобы давать вклад в гран. условие скачка, энергетич. член должен содержать $\delta(\xi)$ - дельта ф. от координаты $\xi \parallel \vec{n}_0$ нормали к S.

Только тогда $\int_{-d}^{d} F(\xi)\, d\xi = \text{const}$, иначе $\int_{-d}^{d} d\xi F(\xi) \approx \bar{F} \cdot d \xrightarrow[d \to 0]{} 0$.

Т.е. при расчёте в лоб из Л.-Л. уравнение магнитостатики не приводит к гранич. условиям.

Escaneado con CamScanner

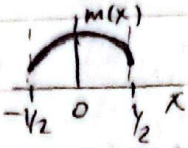
SW wires

date. 07. 04.

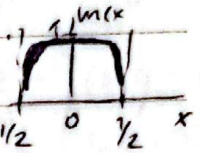
(Все расчеты по $\overline{\lambda(x)} = \int_{-1/2}^{1/2} \lambda(x)$, т.к. λ слабо (а не) зависит от x.)

Выводы и предположения по SW-wires:

① Числен. расчеты СФ, СЗ wires (метод дискретизации инт. ур. 2-3/IV и метод разложения в ряд Фурье инт. ур. 5/IV) дают СФ, близкие к $\sin(\pi n x)$, $x \in [0,1]$ (т.е. $\cos(\pi n x)$ - н-нечет при $x \in [-1/2, 1/2]$, $\sin(\pi n x)$ - н-чет) без всяких граничных условий. И на долю гл. моды $\sim m_0(x) \approx 1$.

② Первая SW мода – это 

$\approx \cos(\pi x)$ с $\omega_1^S = 0{,}245$.
Она получена методом Ритца из $\cos(\pi x)$ и 2-мя интегральными дает.

③ За вторую моду идея конкурирования $m_0(x) \approx 1$ 

и $\sim \sin(2\pi x)$. За $m_0(x) \approx 1$ моду ее частота $\omega_0^c = 0{,}263$ близкая к жест. f_1, а против – ее нет в числ. расчете и интегрируя она превратится в $\approx \cos(\pi x)$. Противоположно и проведя больше число итераций $m_0(x) \approx 1$ – она не сформулировалась $\cos(\pi x)$!
Note: просто затравочная $\sin(2\pi x)$ после 2-х итер. дает $\omega_2^S = 0{,}269$ (3/III).
За $\sim \sin(2\pi x)$ моду ее собственное значение в числ. расчетах, против – ее частота после нач. в методе Ритца и 2-х итераций $\omega_2^S = 0{,}281$ заметно $> f_1^{жест.}$.

→ Нужен более точный расчет $m_0(x) \approx 1$ и $\sim \sin(2\pi x)$ мод. – См. 11/IV

Сделать по статьям SW-PRB, Rect.dots-PRL (localiz.) и SW-wires:

1) по PRL – критически прочесть Fax Славина и послать ему поправки и замечания

2) по PRB – пересчитать Table 1 – rect. dots на $\sin(\pi m x)$, в смысле $m_{mn}^{\text{н}}(x,y) = M_S \sin(\pi m x) \cos(\pi n y)$ с $n = 0$ (см 1/II 002)

3) Написать draft новой статьи SW-wires, СФ, СЗ и ввести новое гран. условие. (объяснение экс. Hillebrands and cheriy.)

4) Попытаться уточнить СФ, СЗ wires (первых 2-3 х) одним из числ. (Фурье-, дискретизации инт. ур., Ритца) или аналитических методов.

Date. 08 · 04 · Попытка найти диф. ур., соответ. л.-инт. ур. для СФ Wiener

Ядро $g(x,x') = \frac{\rho}{\pi}\frac{1}{(x-x')^2+\rho^2}$. Можно ли записать уравнение Ш.-Лувилля для $g(x,0) = \frac{\rho}{\pi}\frac{1}{x^2+\rho^2}$?

$$\mathcal{L}(y) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y(x), \quad \mathcal{L}[g(x,0)] = -\delta(x)$$

Если $x \neq 0$, то должно $\mathcal{L}[g(x)] = 0$.

$$\mathcal{L}[g(x)] = p(x)\frac{d^2g}{dx^2} + p'(x)\frac{dg}{dx} + q(x)g(x) = 0$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2+\rho^2}, \quad g'(x) = -\frac{2x}{(x^2+\rho^2)^2}, \quad g''(x) = -\frac{2}{(x^2+\rho^2)^2} + \frac{8x^2}{(x^2+\rho^2)^3}$$

$$p(x)\left[-\frac{2}{(x^2+\rho^2)^2} + \frac{8x^2}{(x^2+\rho^2)^3}\right] + p'(x)\frac{(-2x)}{(x^2+\rho^2)^2} + q(x)\frac{1}{x^2+\rho^2} = 0$$

Def. $P(x) = \frac{p'(x)}{p(x)}$, $Q(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$, тогда легко найти

$P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = 4\frac{\rho^2-x^2}{(\rho^2+x^2)^2}$ уравнение коэф. при x^2 и x^0.

$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{1}{x}$, $\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$, $p(x) = Cx$. $q(x) = p(x)Q(x) = Cx\cdot 4\frac{\rho^2-x^2}{(x^2+\rho^2)^2}$,

Можно $C=1$ в силу однородности ур. $\mathcal{L}(g)=0$

$$\mathcal{L}[g(x)] = xg''(x) + g'(x) + 4x\frac{(\rho^2-x^2)}{(\rho^2+x^2)^2}g(x) = 0.$$

Теперь проверим вывод $p(x)$.

Если $g(x,x')$ – ФГ (для ш.-л. ур.) удовлетв. $\mathcal{L}_x[g(x,x')] = -\delta(x-x')$, то

$$\left.\frac{dg(x,x')}{dx}\right|_{x\to x'+0} - \left.\frac{dg(x,x')}{dx}\right|_{x\to x'-0} = -\frac{1}{p(x')}$$

$$g(x,x') = \frac{1}{|x-x'|^2+\rho^2}, \quad \frac{d}{dx}g(x,x') = -\frac{1}{\left[(x-x')^2+\rho^2\right]^2}\frac{d}{dx}|x-x'|^2 =$$

$$= -\frac{2|x-x'|\cdot \operatorname{sign}(x-x')}{\left[(x-x')^2+\rho^2\right]^2}; \quad \left.\frac{dg(xx')}{dx}\right|_{\substack{x=x'+\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}} = -\frac{2\varepsilon\cdot 1}{\left[\varepsilon^2+\rho^2\right]^2}$$

$$\left.\frac{dg(xx')}{dx}\right|_{x=x'-\varepsilon} = -\frac{2\cdot\varepsilon\cdot(-1)}{\left[\varepsilon^2+\rho^2\right]^2}. \quad \left(\frac{dg}{dx}\right)_{x=x'+\varepsilon} - \left(\frac{dg}{dx}\right)_{x=x'-\varepsilon} = -\frac{4\varepsilon}{\left[\varepsilon^2+\rho^2\right]^2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

Но $-\frac{1}{p(x')} = -\frac{1}{x'}$. И $\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x'+\varepsilon} - \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x'-\varepsilon}\right] \neq -\frac{1}{x'}$ – ?

Сандерс. ФГ для ур. ш.-л. на $[a,b]$ $G(x,x') = \begin{cases} -\frac{1}{A}u(x)v(x'), & a<x<x' \\ -\frac{1}{A}u(x')v(x), & x'<x<b \end{cases}$,

где $u(x)$ удовлетв. гр. условиям при $x=a$

а $v(x)$ удовл. гр. условиям при $x=b$.

Escaneado con CamScanner

Опр. $G(x,x')$ делает УР: $y(x) = \lambda \int_a^b dx' G(x,x') f(x') y(x')$ и $\mathcal{L}[y(x)] + \lambda \rho(x) y(x) = 0$

эквивалентным. А именно диф. ур. ш.-л., эквивалентное инт. ур. на ф-ии $f(x) = \frac{1}{(x-x')^2 + p^2}$ – имеет непрерывную $\frac{df}{dx}$ в точке $x = x'$.

$\mathcal{L}[y(x)] = \frac{d}{dx}[p(x) y(x)] + q(x) y(x) = 0$ – очень близко к ур. Бесселя при $p = 0$.

При $p:0$ $\frac{1}{x}\mathcal{L}(y(x)) = y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) - \frac{4}{x^2} y(x) = 0$.

Ур-ие ШЛ: $\mathcal{L}[y_n(x)] = -\lambda_n \times y_n(x)$, $y_n'' + \frac{1}{x} y_n' + \left[\lambda_n - \frac{4}{x^2}\right] y_n(x) = 0$,

Его решение $y_n(x) = J_2(\sqrt{\lambda_n} x)$ (!) $y_n(\pm\frac{1}{2}) = J_2(\sqrt{\lambda_n}\frac{1}{2}) = C_n$ тогда задает спектр λ_n.

Если $x \in [0,1]$ тогда взять $\sqrt{x} J_2(\underbrace{\mu_{2n}}_{\text{корни } J_2(\mu_{2n})=0} x) = u_n(x)$ – ортогон. набор на $x \in [0,1]$.

Если $x \in [-1/2, 1/2]$ и СФ – чет., то можно и $\sqrt{x} J_2(\mu_{2n} \cdot 2x) = u_n(x)$ взять. Тогда μ_{2n} корни уравнения Дини: $J_2'(x) + \alpha J_2(x) = 0$, $x = 1/2$.

Если если на $x \in [a,b]$: $\mathcal{L}(y) = \frac{d}{dx}[p(x) y] + g(x) y = -f(x)$ – неоднородное ур. ш.-л., то в функции Грина $G(x,x')$ удовл. условиям из следующих $\mathcal{L} G(x,x') = -\delta(x-x')$:

1) $G(x,x')$ удовл. $\mathcal{L}_x G(x,x') = 0$ при $x \neq x'$
2) $G(x,x')$ удовл. гр. условиям по x $\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha\, G(a,x') + \sin\alpha\, G_x'(a,x') = 0 \\ \cos\beta\, G(b,x') + \sin\beta\, G_x'(b,x') = 0 \end{array}\right\}$
3) $G(x,x')$ непрерывна при $x = x'$
4) $\left.\frac{\partial G(x,x')}{\partial x}\right|_{x=x'+\varepsilon} - \left.\frac{\partial G(x,x')}{\partial x}\right|_{x=x'-\varepsilon} = -\frac{1}{p(x')}$
5) $G(x,x') = G(x',x)$ симм. отн. $x \geq x'$. И тогда $y(x) = \int_a^b dx' G(x,x') f(x')$

$f(x,x') = \frac{1}{(x-x')^2 + p^2}$ имеет $\frac{df}{dx} = -\frac{2(x-x')}{[\Delta^2 + p^2]^2}$, $f_x'' = -\frac{2}{[\Delta^2+p^2]^2} + \frac{8(x-x')^2}{[\Delta^2+p^2]^3}$

удовлетв. ур. $(x-x') f_x''(x,x') + f_x'(x,x') + 4(x-x')\frac{[p^2-(x-x')^2]}{[(x-x')^2+p^2]^2} f(x,x') = 0$,

из которого зависит от x' и которое не может решен. как ур-е ш.-л. И усл. 2), 4) не выполн.

⇒ Уравнение ш.-л. для инт. ур. и ядра $f(x,x')$ неизвестно.

Escaneado con CamScanner

Date. . .

Неоднородная зад. условия 4). Ведь если $g(x,x') = \frac{1}{(x-x')^{1/2}}$ зад. ФГ для некоторого диф. ур. Ш.-Л., то $\Delta g'_x = g'_x(x'+\varepsilon, x') - g'_x(x'-\varepsilon, x') = -\frac{1}{p(x')}$, но $\Delta g'_x = 0 \Rightarrow p(x') = \infty$ - нарушение и диф. ур. 2-го порядка (типа Ш.-Л.) эквивалентного $\lambda m(x) = [(p(x)y')' + q(x)y]/m(x)$ не существует. И не удивительно, ведь нет диф. эквивалентного диф. ур. ∞-порядка для СФ $m_n(x)$. Отсюда нет СФ для диф. ур. Ш.-Л., удовлетворяющее диф. ур. 2-го порядка $L[y_n(x)] = -\lambda_n$

I. Stakgold Green's Functions

Пусть $\lambda u(x) = \int_a^b K(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi = Ku(x)$.

Ит-ерированное ядро (iterated kernel) $K_m(x,\xi) = \int_a^b K(x,\xi') K_{m-1}(\xi',\xi)\, d\xi'$

тогда на СФ $e_n(x)$ $Ke_n = \lambda_n e_n$ и $K^m e_n = \lambda_n^m e_n$

разложение $K_m(x,\xi) = \sum_n \lambda_n^m e_n^*(\xi) e_n(x)$.

→ Т-ма Mercer (Mercer's theorem) !

Если $K(x,\xi)$ есть непрерывна and if all but finite number of eigenvalues are of one sign, then

$$K(x,\xi) = \sum_n \lambda_n e_n(x) e_n(\xi) \quad \text{однородно на } x,\xi \in [a,b]$$

$\sum_n \lambda_n^m = \int_a^b K_m(x,x)\,dx$. И если K is positive operator, то для любого СЗ $\lambda_1 \le \left[\int_a^b dx\, K_m(x,x)\right]^{1/m}$, $m = 1,2,\dots$

Если $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots$, λ_1 - max корень по абс. знач., то $\lambda_1 = \lim_{m\to\infty} \left[\int_a^b K_m(x,x)\,dx\right]^{1/m}$.

У меня $K_1(x,\xi) = K(x,\xi) = g_L(x,\xi) = \frac{p}{\pi}\frac{1}{(x-\xi)^2 + p^2}$

$J_1 = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, K(x,x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, g(x,x) = \frac{1}{\pi p}$, $\sum_n \tilde\lambda_n = \frac{1}{\pi p}$ $(\lambda_n \to \tilde\lambda_n)$

$J_2 = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, K_2(x,x) = \int dx \int dx'\, K(x,x') K(x',x) = \int dx\, dx'\, g_L^2(x,x')$

$J_3 = \int dx\, K_3(x,x) = \int dx \int dx' \int d\xi\, K(x,x') K(x',\xi) K(\xi,x)$

Уравнение $\int_{-\pi}^{\pi} K(\varphi-\varphi')\, u(\varphi')\, d\varphi' = \lambda u(\varphi)$ имеет простое решение (Пальмина) только если $K(x)$ имеет период 2π, т.е. $K(\varphi) = F(\cos\varphi, \sin\varphi)$.

Escaneado con CamScanner

Date. 09. 04.

Конечно, если функционал $R(u) = \frac{\langle Ku, u\rangle}{\|u\|^2}$, то $\lambda_1 = \max R(u)$

Вернемся к теории. Нашему СФ, СВ which are $\sin/\cos$ линейных функ

с разложением $g_L(x,x')$ и тогда повторение. Ведь $g_L(x,x')$

есть только функция от $(x-x')$, но не от x, x' по отдельности.

$$g_L(x,x') = \sum_{n=0}\left[\frac{\epsilon_n}{2} A_n(x)\cos 2\pi n x'\right] + \sum_{n=1} B_n(x)\sin 2\pi n x'$$

$$A_n(x) = \sum_{m=0}\frac{\epsilon_m}{2} A^c_{nm}\cos 2\pi m x + \sum_{m=1} A^s_{nm}\sin 2\pi m x, \text{ или}$$

$$g_L(x,x') = g_L(x-x') = g_L(\xi) = \sum_{n=0} A_n \frac{\epsilon_n}{2}\cos(2\pi n\xi) = \sum_{n=0}\frac{\epsilon_n}{2} A_n \cos 2\pi n(x-x')$$

Видимо надо $g_L(x-x') = \sum_{n=0}\frac{\epsilon_n}{2} A_n \cos 2\pi n(x-x')$ - ?

Условия сим. отн. $x \rightleftarrows x'$ и $x \to -x$, $x' \to -x$ обладает только

$$g_L(x,x') = g_L(x-x') = \sum_{nn'} A^c_{nn'}\cos(2\pi n x)\cos(2\pi n' x') + \sum_{nn'} A^s_{nn'}\sin(2\pi n x)\sin(2\pi n' x')$$

$x, x' \in [-1/2, 1/2]$ (*)

С другой стороны $g_L(\xi) = \sum_{\nu=0} A_\nu \cos(\pi\nu\xi)$, $\xi \in [-1,1]$

$$\to A^c_{nn'} = \epsilon_n\epsilon_{n'}\int_{-1/2}^{1/2} dx\,dx'\, g_L(x,x')\cos(2\pi n x)\cos(2\pi n' x'), \quad \epsilon_n = \begin{cases}1, n=0\\ 2, n>0\end{cases}$$

$$\int dx\,dx'\, g_L(x,x')\sin(2\pi\nu x)\sin(2\pi\nu' x') = \sum_{nn'} A^s_{nn'}\int_{-1/2}^{1/2} dx\,\sin(2\pi n x)\sin(2\pi\nu x)\times$$

$$\times\int_{-1/2}^{1/2} dx'\,\sin(2\pi n' x')\sin(2\pi\nu' x') = \frac{1}{4}\sum_{nn'} A^s_{nn'}\delta_{n\nu}\delta_{n'\nu'} = \frac{1}{4}A^s_{\nu\nu'}.$$

($\int\sin\sin = \frac{1}{2}\delta_{n\nu}$; $\int\sin\sin = \frac{1}{2}\delta_{n'\nu'}$)

$$\to A^s_{nn'} = 4\cdot\int_{-1/2}^{1/2} dx\int dx'\, g_L(x,x')\sin(2\pi n x)\sin(2\pi n' x')$$

Ортог. $\int_{-1/2}^{1/2} dx\cos(2\pi n x)\cos(2\pi n' x) = \frac{1}{\epsilon_n}\delta_{nn'}$, $\int_{-1/2}^{1/2} dx\sin(2\pi n x)\sin(2\pi n' x) = \frac{1}{2}\delta_{nn'}$

$\int_{-1/2}^{1/2} dx\cos(2\pi n x)\sin(2\pi n' x) = 0$ $\forall n, n'$ - целых.

Поэтому надо $g_L(x,x')$ как (*), но дать разложение тог. $m(x)$

по $\cos(2\pi n x)$ как $\sin/\cos$ ошибки нет, т.к. все $\int dx\cos(\cdot)\sin(\cdot) = 0$.

(Если имеем только СФ, то $\Lambda\sum_{n=1} B_n\sin(2\pi n x) = \int dx'\sum_{nn'} A^s_{nn'}\sin(2\pi\nu x)\sin(2\pi\nu' x')\times$

$\times\sum_{n'} B_{n'}\sin(2\pi n' x') = \sum_{\nu\nu'n'} A^s_{\nu\nu'} B_{n'}\sin(2\pi\nu x)\frac{1}{2}\delta_{n'\nu'} =$

$= \frac{1}{2}\sum_{\nu n'} A^s_{\nu n'} B_{n'}\sin(2\pi\nu x)$

$m(x) = \sum B_n\sin(2\pi n x)$

$B_n = 2\int_{-1/2}^{1/2} dx\, m(x)\sin(2\pi n x)$)

Escaneado con CamScanner

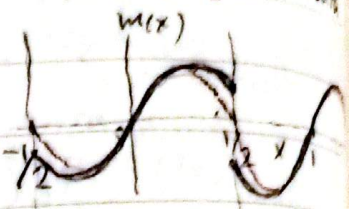
Date. 10 · 04.

$$\Lambda b_n = \frac{1}{2}\sum_{n'} A^s_{nn'} b_{n'}, \quad \sum_{n'}\left(\frac{1}{2}A^s_{nn'} - \Lambda\delta_{nn'}\right)b_{n'} = 0, \text{ ср. с 5/IV.}$$

$$\hat{B}^s \vec{b} = \Lambda \vec{b}, \quad B^s_{nn'} = \frac{1}{2}A^s_{nn'} = 2\int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{-1/2}^{1/2} dx' \, g_L(x,x') \sin(2\pi n x) \sin(2\pi n' x')$$

Рунге-Ритц с $N=20$ дает $w_2^s = 0{,}282$ — занижено за счет неточных СФ. Это совпадает с w_2^s, найден. методом Ritcl function $\sin(2\pi b x)$ (до или после интегрир.) 5/IV. w_2^s величина

Хуже другое: $m(x) = \sum_{n=1} b_n \sin(2\pi n x)$ для неточных СФ, $x \in [-1/2, 1/2]$



Фурье — $m(\pm 1/2) = 0$ (!?)

Здесь — точная СФ плоская
— ее Фурье приближение $\forall N$

→ Фурье-приближение в принципе неверно воспроизводит точную плоск. СФ вблизи $x = \pm 1/2$. $m_{точн.}(\pm 1/2) \neq 0$, а $m_{Фурье}(\pm 1/2) = 0$.

Метод дискретизации инт. ур.

10/IV Заменим квадратурами — численный метод поиска СФ, (3 шага) более основательно, чем 3/IV, $\forall N$.

Ген. ф-ла. $$\int_a^b dy\, f(y) = \frac{(b-a)}{2}\sum_{i=1}^{N} w_i f(y_i) + R_N$$

$$y_i = \frac{(b-a)}{2}x_i + \frac{(b+a)}{2}, \quad w_i = \frac{2}{(1-x_i^2)\left[P_N'(x_i)\right]^2}, \quad x_i - i\text{-ый корень } P_N(x).$$

N-полинома Лежандра

Ошибка $R_N = (b-a)^{2N+1}\frac{(N!)^4}{(2N+1)[(2N)!]^3} f^{(2N)}(\xi)$, $\xi \in [a,b]$. $\sum_{i=1}^{N} w_i = 2$

У меня $a = -1/2$, $b = 1/2$, $f(y) = g_L(x,y)m(y)$.

$$\int_{-1/2}^{1/2} dy\, f(y) = \sum_{k=1}^{N} A_k f(y_k), \quad A_k = \frac{1}{2}w_k, \quad y_k = \frac{1}{2}x_k, \quad x_k \in [-1,1]$$

→ $A_k = \frac{1}{2}\frac{(-2)}{(N+1)P_{N+1}(x_k)P_N'(x_k)}$ — проверим.

Рекурр. $(1-x^2)P_N'(x) = (N+1)xP_N(x) - (N+1)P_{N+1}(x)$

Если x_k корень $P_N(x)$, $P_N(x_k) = 0$ и $(1-x_k^2)P_N'(x_k) = -(N+1)P_{N+1}(x_k)$

и $A_k = \frac{1}{2}\frac{(-2)}{P_N'(x_k)(-1)(1-x_k^2)P_N'(x_k)} = \frac{1}{2}\frac{2}{(1-x_k^2)\left[P_N'(x_k)\right]^2} = \frac{1}{2}w_k$. Верно.

Удобнее $$A_k = \frac{(-1)}{(N+1)P_{N+1}(x_k)\left[-\frac{(N+1)}{(1-x_k^2)}P_{N+1}(x_k)\right]} = \frac{(1-x_k^2)}{(N+1)^2 P_{N+1}^2(x_k)}$$

Escaneado con CamScanner

$(N+1)P_{N+1}(x) = (2N+1)xP_N(x) - NP_{N-1}(x)$

$P'_{N+1}(x) = -\frac{N}{N+1}P'_{N-1}(x_k)$, где $A_k = \frac{(1-x_k^2)}{N^2 P_{N-1}^2(x_k)}$, где

$P_{N+1}(x) = 2xP_N(x) - P_{N-1}(x) - \frac{1}{(N+1)}\left[xP'_N(x) - P'_{N-1}(x)\right]$

где A_k положительна $\forall N$ на отрезке $[-1;1]$ и x_k — корни $P_N(x)$.

Асимптотика: $x_m^{(N)} = 1 - \frac{1}{2N^2}(j_{0m})^2\left[1 - \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right]$, j_{0m} — корни $J_0(x)=0$.

$j_{0m} \approx \frac{\pi}{4}(4m-1) + \frac{1}{2\pi(4m-1)} - \frac{31}{6\pi^3(4m-1)^3} + \frac{3779}{15\pi^5(4m-1)^5} - \dots$, $m = \overline{1,N}$

с точностью $\frac{1}{N^2}$ равномерно $\forall m$, кроме $m=1$ (для нуля).

Пусть $\theta_m^{(N)} = \arccos x_{N-m+1}$ $(0 < \theta_1 < \dots < \theta_N < \pi)$, то

$\theta_m^{(N)} = \frac{4m-1}{4N+2}\pi + \frac{1}{8N^2}\operatorname{ctg}\left(\frac{4m-1}{4N+2}\pi\right) + O\left(\frac{1}{N^3}\right)$, $x_k = \cos\theta_{N-k+1}$.

Корни симметрии, x_k можно считать если $x_k > 0$.

Не надо считать корни $x_k < 0$.

Значит, для корней $x_m^{(N)} = 1 - \frac{\xi_m}{2N+1+\xi_m}$, где

$\xi_m = \frac{(j_{0m})^2}{(N+2)}\left[1 + \frac{(j_{0m}-2)^2}{12(2N+1)^2}\right] + O(1/N^5)$, j_{0m} корни $J_0(x)=0$.

Корни $P_N(x) = 0$ теперь для ξ_m можно использовать

Значит, для всех больших N можно считать

Веса $A_k = \frac{1}{P_{N-1}^2(x_k)}$ можно считать, видно из (1)

что для корней x_k $P_N(x) = 0$ всегда, определяется ξ_m для

корней $P_{N-1}(x) = 0$. Используем асимптотику ф. Лежандра

$$P_N(\cos\theta) = \left(\frac{2}{\pi N \sin\theta}\right)^{1/2}\cos\left[(N+1/2)\theta - \frac{\pi}{4}\right] + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right), N \gg 1$$

для корней $P_{N-1}(x_k)$.

Также проверяется, что A_k сходится $\sum_{k=1}^{N} A_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} w_k = 1$.

Escaneado con CamScanner

Date. 12.04.

Метод дискретизации (весовые)

(Возьмем узлы $x_k = \frac{k}{N} - \frac{1}{2}$, $A_k = \frac{1}{N+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots N$)

Наш расчет с $N = 500$ (!) дал две четные eigenfunct.



Для осн. моды ($\approx \cos \pi x$) $\frac{m(0.5)}{m(0)} = 0,127$, для $\approx \sin 2\pi x$ $\frac{m(1/2)}{m_{max}} = 0,189$.

Дискр.-узловые мод: $\omega_0 = 0,254$ ($\approx \cos \pi x$); $\omega_1 = 0,283$ ($\approx \sin 2\pi x$); $\omega_2 = 0,308$ ($\approx \cos 3\pi x$); $\omega_3 = 0,329$; $\omega_4 = 0,3$

Так как расчет очень точный, а согласие с экп. Hill-Dimokritov нет ($f_0 = 0,236$), то может у них M_s неверно?

→ Уменьшение M_s на ~10% дало бы неплохое согласие этого расчета с экспериментом, уменьшив ω_m.

→ Надо еще с эксп. Cherif et al. сравнить. $\frac{m_0(1/2)}{m_0(0)} = 0,12$

Дискрет. узлы более точно: ($N = 360$ с верной перенормировкой, метод правых) $\omega_0 = 0,252$, $\omega_1 = 0,282$, $\omega_2 = 0,307$, $\omega_3 = 0,329$, $\omega_4 = 0,3$ — практически те же.

12/IV Метод Ритца от 5/IV дает (после итераций) для двух низших мод: $\omega_0 = 0,245$ ($\approx \cos \pi x$), $\omega_1 = 0,281$ ($\approx \sin 2\pi x$)

→ Метод Фурье-рядов дает: $\omega_0 = 0,252$ ($\approx \cos \pi x$); $\omega_1 = 0,282$ ($\approx \sin 2\pi x$); $\omega_2 = 0,307$ ($\approx \cos 3\pi x$)

Очевидно, что метод р. Фурье и дискретизации (очень точный, $N = 500$) дают практически совпадающие "гладкие" мод и "одинаковый вид $m_n(x)$"

Нарисовать расчет спектра $\tilde{\Lambda}_n$ и Λ_n.

Аналитически $J_1 = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, g_L(x,x) = \frac{1}{\pi\rho} = \sum_n \tilde{\Lambda}_n$

$$J_2 = \int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{-1/2}^{1/2} dx'\, g_L^2(x,x') = \rho \int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, g_L^2(\xi) = \frac{\rho^2}{\pi^2} \int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi \frac{1}{(\xi^2+\rho^2)^2} =$$

$$= \left| \frac{\xi}{\rho} = u \right| = \frac{\rho^2}{\pi^2} \int dx \int du \cdot \rho \frac{1}{\rho^4} \frac{1}{(u^2+1)^2} = \frac{1}{\pi^2\rho} \int dx \int du \frac{1}{(1+u^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2\rho} \int dx \left[\frac{1}{2} \frac{u}{1+u^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} u \right]_{(-1/2-x)\frac{1}{\rho}}^{(1/2-x)\frac{1}{\rho}} = \frac{1}{2\pi^2\rho} \int dx \left[\frac{1}{\rho} \frac{(1/2-x)}{1+(1/2-x)^2\frac{1}{\rho^2}} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arctg} \frac{1/2-x}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{(1/2+x)}{1+(1/2+x)^2\frac{1}{\rho^2}} + \operatorname{arctg} \frac{1/2+x}{\rho} \right] = \left| \begin{matrix} y = (1/2-x)\frac{1}{\rho} \\ z = (1/2+x)\frac{1}{\rho} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2\rho} \left[-\rho \int dy \left[\frac{y}{1+y^2} + \operatorname{arctg} y \right] + \rho \int dz \left[\frac{z}{1+z^2} + \operatorname{arctg} z \right] \right]_{1/\rho}^{1/\rho} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{1}{2} \ln(1+y^2) + y \operatorname{arctg} y - \frac{1}{2} \ln(1+y^2) \right]_{1/\rho}^{1/\rho} + \frac{1}{2\pi^2} \left[z \operatorname{arctg} z \right]_{1/\rho}^{1/\rho} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2} \left[y \operatorname{arctg} y \right]_{1/\rho}^{0} + \frac{1}{2\pi^2} \left[z \operatorname{arctg} z \right]_{0}^{1/\rho} = \frac{1}{\pi^2\rho} \operatorname{arctg} \frac{1}{\rho} \approx \frac{1}{\pi^2\rho} \left(\frac{\pi}{2} - \rho \right)$$

Escaneado con CamScanner

Осе.

С другой стороны $J_2 = \int dx dx' g_L^2(x,x') = \sum_n \tilde{\lambda}_n^2$

$\lambda_n = 1 - \frac{\rho}{2\pi} c_n$, где c_n из $\lambda_n = -4\pi + c_n \rho$.

$\tilde{\lambda}_n = 1 - \frac{\rho}{2\pi} c_n \approx e^{-\frac{\rho}{2\pi} c_n}$ и $\sum_n \tilde{\lambda}_n^m = \sum_n \left[e^{-\frac{\rho}{2\pi} c_n} \right]^m$ можно

продифференцировать по "n" если предположить простую зависимость c_n от "n". $n = 0, 1, 2, \ldots$

Пусть $c_n = a + bn$, $\tilde{\lambda}_n = e^{-\frac{\rho}{2\pi}(a+bn)} = e^{-\frac{\rho}{2\pi} a} \left[e^{-\frac{\rho}{2\pi} b} \right]^n$, $q = e^{-\frac{\rho}{2\pi} b}$

$\sum_{n=0} \tilde{\lambda}_n = e^{-\frac{\rho}{2\pi} a} \sum_{n=0} q^n = e^{-\frac{\rho a}{2\pi}} \frac{1}{1-q} = e^{-\frac{\rho a}{2\pi}} \frac{1}{1 - e^{-\frac{\rho b}{2\pi}}} = \frac{1}{\pi\rho} = J_1$

$e^{-\frac{\rho a}{2\pi}} \pi\rho = 1 - e^{-\frac{\rho b}{2\pi}}$, $\pi\rho \left[1 - \frac{\rho a}{2\pi} + \ldots \right] = 1 - \left[1 - \frac{\rho b}{2\pi} + \left(\frac{\rho b}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{2} - \ldots \right] =$

$= \frac{\rho b}{2\pi} - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho b}{2\pi} \right)^2$, $\rho^1 : \pi = \frac{b}{2\pi}$; $\rho^2 : -\frac{a}{2} = -\frac{1}{2} \frac{b^2}{(2\pi)^2}$

Откуда $b = 2\pi^2$, $a = \left(\frac{b}{2\pi} \right)^2 = \pi^2$, т.е. $c_n = \pi^2 + 2\pi^2 n = \pi^2(1+2n)$

$\lambda_n \approx -4\pi + \pi^2(2n+1)\rho$ — похожее соотн. $\lambda_n = -4\pi + 8(2n+1)\rho$, $n = 0, 1, 2 \ldots$ я получил еще 10/VII 00 г. из дир. ур. для $m_n(x)$.

Найдем эти λ_n при расчете на основе $J_2 = \int dx dx' g_L^2(x,x')$ $^{1/2}$

$J_2 = \sum_n \tilde{\lambda}_n^2 = \sum_{n=0} \left[e^{-\frac{\rho c_n}{2\pi}} \right]^2 = \sum_n e^{-\frac{\rho}{\pi} c_n} = e^{-\frac{\rho}{\pi} a} \sum_{n=0} \left[e^{-\frac{\rho}{\pi} b} \right]^n =$

$= e^{-\frac{\rho}{\pi} a} \frac{1}{1 - e^{-\frac{\rho}{\pi} b}} = \frac{1}{\pi^2 \rho} \left(\frac{\pi}{2} - \rho \right)$.

$\left(1 - \frac{\rho}{\pi} a \right) \pi^2 \rho = \left(\frac{\pi}{2} - \rho \right) \left(1 - e^{-\frac{\rho}{\pi} b} \right)$; $\pi^2 \left(1 - \frac{a}{\pi} \rho \right) \rho = \left(\frac{\pi}{2} - \rho \right) \left(\frac{b}{\pi} \rho - \frac{1}{2} \frac{\rho^2 b^2}{\pi^2} \right)$

$\rho^1 : \pi^2 = \frac{b}{2}$; $\rho^2 : -\frac{a}{\pi} \pi^2 = -\frac{b}{\pi} - \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \frac{b^2}{\pi^2} = -\frac{b}{\pi} - \frac{\pi}{4} \left(\frac{b}{\pi} \right)^2$

$b = 2\pi^2$, $a = \frac{1}{\pi} \left[\frac{b}{\pi} + \frac{\pi}{4} \left(\frac{b}{\pi} \right)^2 \right] = \frac{1}{\pi} \left[2\pi + \frac{\pi}{4} (2\pi)^2 \right] = \pi^2 + 2$.

Таким образом условие $b = 2\pi^2$ по прежнему, а вот $a = \pi^2 + 2$ немного выросло.

$\frac{\lambda_n}{4\pi} = 1 - \frac{\pi}{4}(2n+1)\rho$ — эти λ_n и частоты дискретиз. расчета от 11/IX немного отличаются.

n	0	1	2	3	4
ω_n	0,245	0,277	0,305	0,329	0,351
f_n	0,236	0,266	0,257	0,319	0,339

Согласие рассчит. по этим λ_n частот с эксп., хотя и не блестящее, но вполне приемлемое для такой грубой формулы.

$\tilde{\lambda}_n = 1 - \frac{\rho}{2\pi} c_n \approx e^{-\frac{\rho}{2\pi} c_n} = e^{-\frac{\rho}{2} \pi (2n+1)}$, $\sum_{n=0} \tilde{\lambda}_n = \sum_{n=0} e^{-\frac{\rho\pi}{2}(2n+1)} = \frac{1}{2} \operatorname{cosech}\left(\frac{\rho\pi}{2} \right)$

$\sum_{n=0} \tilde{\lambda}_n = \frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2} \rho \right)} \overset{(\rho \ll 1)}{\approx} \frac{1}{\pi\rho} = J_1$

Date. . .

Сравнение с эксп. Roussigné – Cherif'01 – W.Zhu

→ Попробуем объяснить экспериментально Roussigné – Cherif'01.

$H = 550$ Oe, $4\pi M_s = 7{,}8$ kOe, $\frac{\gamma}{2\pi} = 2{,}97 \frac{GHz}{kOe}$

$L = 29$ mm, $w = 0{,}5\,\mu m$; $1\,\mu m$; $1{,}5\,\mu m$. $\omega_M = \gamma \cdot 4\pi M_s = 2\pi f_M$

$\frac{\omega_H}{\omega_M} = \frac{\gamma H}{\gamma 4\pi M_s} = \frac{H}{4\pi M_s} = \frac{0{,}55\ kOe}{7{,}8\ kOe} = 0{,}071$. $f_M = \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right) 4\pi M_s = 2{,}97 \frac{GHz}{kOe} \cdot 7{,}8\ kOe = 23$

а) Возьмем $w = 1\,\mu m$ (ось 0-кода): тогда $p = \frac{L}{w} = \frac{29\ mm}{1\,\mu m} = 0{,}029$

Эксп. f_n: $f_0 = 6{,}45$ GHz, $f_1 = 7{,}42$ GHz; $f_2 = 8{,}63$ GHz, $f_3 = 9{,}65$ и $f_4 = 10{,}35$
(0,278) (0,320) (0,372) (0,416) (0,446)

Расчет ω_m: $\omega_0 = 0{,}329$ $\omega_1 = 0{,}379$ $\omega_2 = 0{,}416$ $\omega_3 = 0{,}445$ $\omega_4' = 0{,}$
(дискретиз. $N = 200$)

Согласие с эксп. плохое, но сохранится хорошим если не считать первую эксп. частоту f_0, т.е. $\omega_m \approx f_{m+1}$, $m = 0, 1, 2 \ldots$
ост. нер. $\frac{m_0(1/2)}{m_0(0)} = 0{,}204$ – вообще с увелич. p, $p = 0{,}029$.

б) Возьмем $W = 1{,}5\,\mu m$: $p = \frac{L}{w} = \frac{29\ mm}{1{,}5\,\mu m} = 0{,}019$

Эксп. f_m: ? $f_0 = 6{,}45$ GHz; $f_1 = 7{,}18$; $f_2 = 8{,}07$; $f_3 = 8{,}8$; $f_4 = 9{,}40$ GHz
(0,278) (0,310) (0,348) (0,380) (0,406)

Расчет ω_m: $\omega_0 = 0{,}314$; $\omega_1 = 0{,}352$; $\omega_2 = 0{,}382$; $\omega_3 = 0{,}407$; $\omega_4' = 0{,}$
(дискретиз. $N = 200$)

Опять согласие хорошее без f_0, $\omega_m = f_{m+1}$
Для осн. моды $\frac{m_0(1/2)}{m_0(0)} = 0{,}170$, $p = 0{,}019$.

в) Возьмем $W = 0{,}5\,\mu m$: $p = \frac{29\ mm}{0{,}5\,\mu m} = 0{,}058$ – велико.
(дискр. $N = 196$)

Эксп. f_m: ? $f_0 = 6{,}45$ GHz; $f_1 = 8{,}40$ $f_2 = 10{,}20$ $f_3 = 11{,}15$ GHz
(0,278) (0,363) (0,440) (0,481)

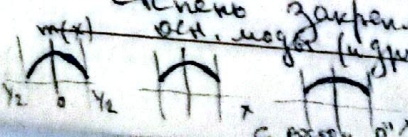
Расчет ω_m: $\omega_0 = 0{,}365$; $\omega_1 = 0{,}436$; $\omega_2 = 0{,}479$; $\omega_3 = 0{,}508$; $\omega_4' =$
(дискретиз. $N = 200$)

Опять согласие $\omega_m \approx f_{m+1}$ хорошее, если f_0 не считать.
$m_0(1/2)/m_0(0) = 0{,}282$.

Нетрудно видеть, что $f_0 = 0{,}278$ это частота FMR $\omega_{FMR} = \sqrt{\omega_H(\omega_H + \omega_M)}$ – пленки

А без f_0 согласие дискретиз. расчета с экспериментами Cherif'01 вполне хорошее, и это для 3-х значений „p" (!), что сильно контрастирует с полному непониманию теоретиков.

→ Степень закрепления осн. моды (и других)



$\frac{m_0(1/2)}{m_0(0)} = 0{,}170$; $0{,}204$; $0{,}282$ } расчет

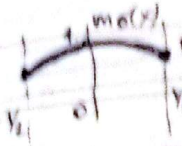
$p = 0{,}058$

Итак, отличие моих $m_0(x) \approx \cos \pi x$. Сбежать чуть-чуть с решением...

$m_0(x) = \cos\left|\frac{\pi}{W}(1+\beta)x\right|$ или $\cos(\pi(1+\beta)x)$. $\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+\beta)\right) = m_0(V_2)$

для $\beta = -1/3$ для всех β, то $m_0(V_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-V_2)\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ — отлично!

$\frac{m_0(V_2)}{m_0(0)} = 1/2$



— нереалистично. У меня $\frac{m_0(V_2)}{m_0(0)} = 0,11 : 0,28$ и зависит от "p".

У Chen'01 переключает β из-за использования ф-ла DE для всех кривых.

Для $p=0,01$ между Лонга даёт $m_0(x) = \cos(\pi \cdot 0,943 \cdot x)$ или $\beta = 0,943 - 1 = -0,057$ всего.

А как вообще найти β? Или $\frac{m(V_2)}{m(0)}$ для полной СФ?

Подгонка M_s для SW-модели Демокритова

Вернёмся к $p=0,011$ — эксперименту Демокритова-Hillebrands (см. 21/XII и 4/I'00) в сх. Mathieu'98 и Jorzick'99: $L = 20$ nm, $W = 1,8$ μm, $dH = 500$ Oe, $4\pi M_s = 10,2$ kOe (по мнению авторов), $\left(\frac{\gamma}{2\pi}\right) = 2,95 \frac{GHz}{kOe}$. $p = \frac{20\,nm}{1,8\,\mu m} = 0,011$.

Эксп. f_m: $f_0 = 7,1$ GHz; $f_1 = 8,0$ GHz; $f_2 = 8,9$ GHz; $f_3 = 9,6$ GHz; $f_4 = 10,2$ GHz
($f_2 = 8,8$ GHz по Hill. MSSM'99)

Попробуем уменьшить M_s. Аббенанет. $\frac{\omega_m^2}{\gamma^2} = [H + M_s(4\pi + \lambda_m)][H - M_s\lambda_m]$

$\omega_m = 2\pi\nu_m$, $\nu_m = \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)\sqrt{[H + M_s(4\pi+\lambda_m)][H - M_s\lambda_m]}$

→ Предполагаем, что метод дискретизации (с $N \geq 200$) достаточно точно считает ω_m и λ_m

и подгоним M_s из условия $\nu_0 = f_0$. $\nu_{FMR} = \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)\sqrt{H(H+4\pi M_s)}$ при $\lambda_m = -4\pi$.

И воспроизведем все остальные ν_m.

Остановимся на $N=360$ и крайние точки возьмем с весом $\frac{1}{2}\frac{1}{N+1}$, все остальные — $\frac{1}{N+1}$ (это неточно, см 14/XII).

Расчет. частоты: 0,255 — 0,284 — 0,308 — 0,330 — 0,349
($4\pi M_s = 10,2$ kOe)

практически совпадают с расчетом ($N=500$) от 14/XII. $\frac{m_0(V_2)}{m_0(0)} = 0,143$.

$\frac{2W_s}{\delta} = 2,4$ kOe; $\left(-\frac{1}{4\pi}\right)\lambda_0 = 0,986 \Rightarrow$ получим $4\pi\hat{M}_s = 8,93$ kOe.

Новое $W_H = \frac{500}{8,93 \cdot 10^3} = 0,056$. $f_M = \frac{\omega_M}{2\pi} = \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right) \cdot 4\pi M_s = 2,95 \frac{GHz}{kOe} \cdot 8,93\,kOe = 26,34$ GHz

Теперь эксп. f_m: 0,270; 0,304; 0,338; 0,364; 0,387

Расчет. новые ν_m: 0,270; 0,297; 0,321; 0,341; 0,360

→ Согласие неважное. Оставим $4\pi M_s = 10,2$ kOe Демокритова как ранее ко

Date. 13. 04.

с дефект. K_s магнитная происходящая.

Введение гран. условия $A\frac{\partial m_x}{\partial n} - K_s m_t = 0$ при $x = \pm 1/2$ приводит к $m_n(x) \sim \cos q_n\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{K_s}{A q_n}\sin q_n\left(x+\frac{1}{2}\right)$, т.е. к нарушению требования что намагниченность $m_n(x)$ должна быть либо чётной либо нечётной отн. центра при $x=0$.

Можно ли придумать такое гран. условие (без обмена), чтобы и $m_n(1/2)$ и $\frac{\partial m_n}{\partial x}\Big|_{1/2}$ были конечны при $|A|=1/2$?

→ Для дискретиз. начала используем метод трапеций (т.к. корни $P_N(x)=0$ и коэф. A_k сильно постоянны для больших N).

$$\int_{x_0}^{x_N} dx\, f(x) = \frac{1}{N}\left[\frac{1}{2}f(x_0) + \sum_{n=1}^{N-1} f(x_n) + \frac{1}{2}f(x_N)\right], \quad A_n = \begin{cases} 1/N, & n \neq 0, N \\ \frac{1}{2}\frac{1}{N}, & n = 0, N \end{cases}, \quad \sum_{n=0}^{N} A_n = 1$$

Погрешн. ω_n - см. посл. страницу II/IV. $x_n = x_0 + n\cdot h$, $x_N - x_0 = Nh$.

Эффект. Гранич. условие. Разл. ур. $\lambda m(x) = \sum_{s=0} \frac{1}{s!} I_s(x,p)\, m^{[s]}(x)$, $I_s(x,p) = \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\xi\, \{g(\xi)\}^s$

При $x = -\frac{1}{2}$: $I_0\left(-\frac{1}{2},p\right) = \left[\xi g(\xi) - 4p\operatorname{arctg}\frac{\xi}{p}\right]_0^1 = |\text{см. 24/III}| = \underline{-2\pi + 2p}$, $p \ll 1$.

$$I_1\left(-\tfrac{1}{2},p\right) = \left[\tfrac{1}{2}\xi^2 g(\xi) - p\ln(\xi^2+p^2)\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}g(1) - p\ln(1+p^2) - \left[-p\ln p^2\right] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{p}\ln\frac{1}{1+p^2} - p\ln(1+p^2) + 2p\ln p \approx \frac{1}{p}(-1)p^2 - p\cdot p^2 + 2p\ln p = -p + 2p\ln p$$

Остальные I_s $(s\geq 2)$ $I_s(x, p\to 0) = -\frac{2p}{(s-1)}\left[(1/2-x)^{s-1} - (-1)^{s-1}(1/2+x)^{s-1}\right]$

$$I_{s\,(s\geq 2)}\left(-\tfrac{1}{2},p\right) = -\frac{2p}{(s-1)}\left[1 - (-1)^{s-1}\cdot 0\right] = -\frac{2p}{(s-1)}$$

$$\lambda m(-1/2) = (-2\pi + 2p)\, m(-1/2) + p\left(2\ln p - 1\right) m'(-1/2) - 2p\sum_{s=2}\frac{1}{s!}\frac{1}{(s-1)} m^{[s]}(-1/2)$$

Но $\lambda_n = -4\pi + C_n p$, поэтому при $p=0$ $(-4\pi)\, m(-1/2) = (-2\pi)\, m(-1/2)$, т.е. $m(-1/2) = 0$, $p=0$.

Если $p \neq 0$, но $p \ll 1$: $(-4\pi + C_n p)\, m_n(-1/2) = (-2\pi + 2p)\, m_n(-1/2) + p(2\ln p - 1) m_n'(-1/2)$

$$\left[-2\pi + (C_n - 2)p\right] m_n(-1/2) = p(2\ln p - 1)\, m_n'(-1/2) - \dots$$

Предполагаем, что член с m_n' - главный, т.к. он $\sim p\ln p$, а остальные $m^{[s]} \sim p$ и входят с весом $\frac{1}{s!(s-1)}$.

Тогда $m_n'(-1/2) - \frac{[-2\pi + (C_n-2)p]}{p(2\ln p - 1)} m_n(-1/2) = 0$, $\boxed{\frac{\partial m_n}{\partial x} - d_n(p)\, m_n(x) = 0}$ $(x=-1/2)$

где эф. pinning parameter $d_n(p) = \frac{[-2\pi + (C_n-2)p]}{p(2\ln p - 1)}$ анализ. в ст. Hill. JMS

$d_n > 0$  , pinning - закрепление спинов с ростом p^n, что

согласуется с анализом Эксп. Cherif '01 от 12/IV

$d_n(p)$ от n зависит слабо, с хорошей точностью для $p \ll 1$: $d(p) = \frac{-2\pi}{p(2\ln p)}$

Escaneado con CamScanner

Note: и метод Ритца и метод Фурье-разложения применимы и к синг. ln-ядру $g(\zeta)$, но самый лучший метод дискретизации, увы, не применим.

Note. $d(p=0{,}011) = 57{,}0$. В обозначениях Hill. JMSJ'99: $d = D \cdot w$, откуда

$D = \frac{d(0{,}011)}{w} = \frac{5{,}7 \cdot 10}{1{,}8 \cdot 10^{-4}\,cm} = 3{,}2 \cdot 10^5 \frac{1}{cm}$ или $K_s^{ef} = A \cdot D = 1 \cdot 10^{-6} \frac{erg}{cm} \cdot 3{,}2 \cdot 10^5 \frac{1}{cm} \approx 3{,}2 \cdot 10^{-1} \frac{erg}{cm^2}$.

Тогда как Славин (JMSJ'99) получил $D = 3 \cdot 10^3 cm^{-1}$ и $K_s^{ef} = 3 \cdot 10^{-3} \frac{erg}{cm^2}$ – существенно меньшее значение эф. поверх. анизотропии K_s^{ef} для осн. моды.

Подгонка M_s (продолж. 13/IV).

Для уточнения Ак метода сравнения экспер. расчета нужно знать $\lambda_0\left(-\frac{1}{4\pi}\right) = 0{,}9876$ → получим из $\nu_0 = f_0$ $4\pi M_s = 9{,}07$ kOe.

Далее $\omega_H = \frac{500\ Oe}{9{,}07\ kOe} = 0{,}055$. $f_M = \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right) \cdot 4\pi M_s = 2{,}95 \frac{GHz}{kOe} \cdot 9{,}07\ kOe = 26{,}76\ GHz$.

Номера провалов					
Экспер. f_m:	0,265	0,299	0,333 (0,329)	0,359	0,381
Расчет. новые ν_m:	0,265	0,294	0,318	0,339	0,357

Отличия 0,1 GHz соотв. $\Delta f \approx 0{,}004$.

Согласие ν_m с эксп. f_m немного лучше, чем 13/IV. Но все равно плохое. Таки оставим $4\pi M_s = 10{,}2$ kOe Демокритова.

Эффективн. гр. условия – Wires

→ А какой „pinning" будет для Лорентц-ядра $g_L(\zeta) = \frac{p}{\pi} \frac{1}{p^2 + \zeta^2}$?

$$I_0^L(x,p) = \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\zeta\, g_L(\zeta) = \frac{p}{\pi} \int d\zeta \frac{1}{\zeta^2 + p^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\zeta}{p} \Big|_{-1/2-x}^{1/2-x}$$

$$I_0^L\left(-\tfrac{1}{2}, p\right) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\zeta}{p} \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{p} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - p\right).$$

$$I_1^L(x,p) = \int_{-1/2-x}^{1/2-x} d\zeta\, g_L(\zeta)\,\zeta = \frac{p}{\pi} \int d\zeta \frac{\zeta}{\zeta^2 + p^2} = \frac{p}{2\pi} \ln(\zeta^2 + p^2) \Big|_{-1/2-x}^{1/2-x},$$

Фурье-функ. ур.

$$I_1^L\left(-\tfrac{1}{2}, p\right) = \frac{p}{2\pi} \ln(\zeta^2 + p^2) \Big|_0^1 = \frac{p}{2\pi}\left[\ln(1+p^2) - 2\ln p\right] = \frac{p}{2\pi}\left[p^2 - 2\ln p\right] \approx -\frac{1}{\pi} p \ln p, \quad p \ll 1.$$

$$\Lambda m(x) = \sum_{s=0} \frac{1}{s!} I_s^L(x,p)\, m^{[s]}(x)$$

$$I_2^L(x,p) = \frac{p}{\pi} \int d\zeta \frac{\zeta^2}{\zeta^2 + p^2} = \frac{p}{\pi}\left[\zeta - p^2 \frac{1}{p} \operatorname{arctg} \frac{\zeta}{p}\right]_{-1/2-x}^{1/2-x}$$

$$I_2^L\left(x=-\tfrac{1}{2}, p\right) = \frac{p}{\pi}\left[\zeta - p \operatorname{arctg} \frac{\zeta}{p}\right]_0^1 = \frac{p}{\pi}\left[1 - p \operatorname{arctg} \frac{1}{p}\right] \approx \frac{p}{\pi}$$

$$\Lambda m(-1/2) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - p\right) m(-1/2) + \frac{(-1)}{\pi} p \ln p \cdot m'(-1/2) + \dots, \quad \tilde{\Lambda} = 1 - \frac{p}{2\pi} C_n.$$

$$\left[1 - \frac{C_n}{2\pi} p - \frac{1}{2} + \frac{p}{\pi}\right] m(-1/2) = -\frac{p}{\pi} \ln p \cdot m'(-1/2)$$

$$\left[\frac{1}{2} + \frac{p}{\pi}\left(1 - \frac{C_n}{2}\right)\right] m(-1/2) = -\frac{p}{\pi} \ln p \cdot m'(-1/2), \quad \frac{\partial m}{\partial x} - d^L m(x) = 0 \Big|_{x=-1/2},$$

где $d_n^L(p) = \frac{\left[1/2 + \frac{p}{\pi}(1 - C_n/2)\right]}{-\frac{1}{\pi} p \ln p} = \frac{\left[-\pi + p(C_n - 2)\right]}{2p \ln p} \approx -\frac{\pi}{2p \ln p}$, $d^L(0{,}011) = 31{,}7$

тогда как для ln-ядра было $d(p) = \frac{-2\pi}{p(2\ln p - 1)}$. Видно $d^L(p) < d(p)$ примерно в 1.5 раза для $p \sim 0{,}01 - 0{,}02$.

Escaneado con CamScanner

Date. . .

Если метод Ритца (5/12) применить к ядру $g(3)=\frac{2}{p}\ln\left(\frac{3^2}{3^2+p^2}\right)$ то для пробной СФ $\cos(\pi a x)$ получим $I_{из}\max\lambda(a)$ $a=0{,}920$ и $\omega_0=0{,}252$. Недостаток $\varepsilon=3\cdot10^{-5}$ великовато, а меньшие ε^* – не считал.

Метод II-Ритца, min невязки дает $a=0{,}942$ и $\omega_0=0{,}264$ – еще хуже чем I (и $\varepsilon=10\cdot10^{-5}$ еще больше в $\ln\left(\frac{3^2+\varepsilon^2}{3^2+p^2}\right)$).

⇒ Вывод: метод Ритца плохо применим к ln-ядру для расчета СФ,СЗ даже основного состояния – ω_0.
(Метод Фурье для ln-ядра не пробовал – коэф-ты медленно считаются, а метод дискретизации не применим из-за сингулярности).

О затухании при $|x|=\frac{1}{2}$:
Разность параметров затухания в ln- и Лорентц-подходе, видимо, связано с тем, что из-за полюсов $\sim p\ln p$ метод Лорентц-уравнения плохо работает на границе wire $|x|=\frac{1}{2}$.

Вывод: метод итераций медленно сходится к правильной СФ для Лорентц-ядра если δ-итерация далекая, и очень медленно сходится для ln-ядра.
Т.е. плохо применим.

Escaneado con CamScanner

Дата: 14.04.

Подготовка презентации и материалов для поездки в JAPAN.

Направления работы с August-1998:

I Arrays of coupled single-domain dots (APL'99, APL'00) — прозрачки докл. в SNU, July'99; прозрачки докл. в Taejon, Nov.'99; (прозрачки докл. на конф. Taejon, Jan.'99)

II Arrays of coupled non-uniform dots (PLA'01) — d.d. и vort. dots, K(-induced — poster на SMM'14, Sept.99

III SW in non-ellipsoidal single-domain (≈uniform) dots

a) cylindrical dots (JAP'00, JMMM'00, G.EMMA'00) — прозрачки докл. Oakland, Nov.'99 (почти копия JAP'00); poster MMM'99, Nov.'99 (адаптир. и сокращ. JAP'00)

b) wires

c) rectangular dots (заготовки PRB, Natal-abs., G.EMMA'00)

IV Vortex – rigid v. model с Новосадом (IEEE Tr.Magn., APL-accepted, заот. JMMM)

a) isolated cylinder — прозрачки poster докл. Tokyo, Sept.'00 с малки вставками для докл. Oakland, Jan.'01

b) rectan. lattice of coupled cylindr. dots — poster докл. Tokyo, March'

V Vortex – conformal etc. models – с Металовым —— (PRB'01, заот. JMMM)

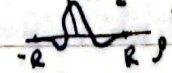
VI SW in Vortex state с Новосадом и Ивановым (только оценки и предварит. эксперименты)

Escaneado con CamScanner

Date. . .

16-21/IV Поездка в Japan, Sendai, Tohoku Univ.
Доклад на сем. по conform. vortex и SW - в домах. Предложение Y. Otani во Japan.
Написание JMMM-Taipei сб. и начало vortex - PRB с Новосадом.
Подготовка программы для семинара в Seagate.

22/IV План работы на ближ. время

1) Закончить и отправить PRB статью по SW со Славиным
2) Написать статью со Славиным по Wires - SW
3) Уточнить/продвинуть SW - PRL статью с Славиным - Domain walls in SW в rectan. dots
до 01.06.01 → 4) Ст. с Металовым в Grenoble по стабильности vortex at H=0 (кривая выхода с $\nu=2$ и $\nu=1$ - MFM)
5) Начать с Ивановым расчеты по колебаниям vortexa
→ 6) Ст. PRB с Новосадом - подробное изложение rigid vortex mod. и эксперимента на oxides и coupled vortex
7) Разослать статьи по запросам конф. San Antonio
23-30.04 → 8) Организовать поездку в Seagate, Pittsburgh, 22-27 May (письма E. Theis в "Moritz", T. Thacker), перезарезервировать tickets.
9) Построить МФМ $R_c(L)$ vortexa с  - другими "core"
10) Построить $R_c(L)$ сразу из z-sampling в пленочка дотов или в square array (т. взаимодействие стабилизирует s.d. state)
11) fourfold anisotropy $\gamma(\varphi_H)$, $H_{an}(\varphi_H)$ для square array с Новосад
12) Организация и интерпретация т.м. $\gamma(\omega)$ и ФМР с Валей и Глебом (vortex gr. state, s.d. - wires and dots)
до 21.05 → 13) Подготовка доклада в Pittsburgh и appl. forms (~30/IV), устного доклада о себе
14) Организация поездки на JEMS в Grenoble
~~23.04 → 15) Письма благодарности Y. Otani и K. Fukamichi~~
1-2/V → 16) Оформить Appl. Form в Seagate и подать Travel Appl. в KIAS

Vortex - new



Vtt. 22.04.

Връщам се към описанието на vortex за пределните решения.
Тъкъ (ур. за Брауна для vortex Усова ел. 24/2002.)
От "z" и "φ" - зависимост нат: точкий дос и описанието
симетрия $\vec{M}(r^2)$ of vortex при $H=0$. $\vec{M} = (0, M_\varphi, M_z)$
Гледаме в цил. координати: $M_\rho = 0$, M_φ и $M_z = f(\rho)$ только.

ур. а равновесия: $\vec{M}(\vec{r}) \times \vec{H}_{ef}(\vec{r}) = 0$ — ур-е Брауна. Ако $M_\rho = 0$, нетно нямо ни „сила"
Условие „core" of vortex на ввода.

$$\vec{M} \times \vec{H}_{ef} = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\varphi} & \hat{z} \\ 0 & M_\varphi & M_z \\ H^\rho_{ef} & H^\varphi_{ef} & H^z_{ef} \end{vmatrix} = \hat{\rho}\left(M_\varphi H^z_{ef} - M_z H^\varphi_{ef}\right) + \hat{\varphi}\left(M_z H^\rho_{ef}\right) + \hat{z}\left(-M_\varphi H^\rho_{ef}\right)$$

$H^\alpha_{ef} = H^\alpha_m + H^\alpha_{ex}$, $H^\alpha_{ex} = \lambda \nabla^2 M_\alpha$, тогава $\vec{H}_{ex} = \lambda \nabla^2 \vec{M}$

$$\frac{1}{\lambda} H^\rho_{ex} = (\nabla^2 \vec{M})^\rho = \nabla^2 M_\rho - \frac{1}{\rho^2} M_\rho - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{1}{\lambda} H^\varphi_{ex} = (\nabla^2 \vec{M})^\varphi = \nabla^2 M_\varphi - \frac{1}{\rho^2} M_\varphi + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial M_\rho}{\partial \varphi} = \nabla^2 M_\varphi - \frac{1}{\rho^2} M_\varphi$$

$$\frac{1}{\lambda} H^z_{ex} = (\nabla^2 \vec{M})^z = \nabla^2 M_z \longrightarrow \vec{H}_{ex} = \left(0, H^\varphi_{ex}, H^z_{ex}\right)$$

$$H^\rho_m(\vec{r}) = \int d^3r' \left[G_{\rho\rho}(r,r') M_\rho(r') + G_{\rho\varphi} M_\varphi + G_{\rho z} M_z \right] =$$

$$= \int_0^\infty d\rho' \rho' \int d\varphi' \left[G_{\rho\varphi}(\vec{\rho}, z; \rho', \varphi', z') M_\varphi(\rho') + G_{\rho z}(\vec{\rho}, z; \rho', \varphi', z') M_z(\rho') \right]$$

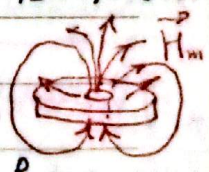
$\int d\varphi'(\ldots)$ оставяме само компонентите $G_{\alpha\beta}$ с $\alpha, \beta \neq \varphi$, и силно упрощаваме ФГ.

$$H^\rho_m(\rho, \varphi, z) = \int dz' \int d\rho' \rho' \int d\varphi' \, G_{\rho z}(\vec{\rho}, z; \rho' \varphi' z') M_z(\rho')$$

$$H^\varphi_m(\vec{r}) = \int d^3r' \left[G_{\varphi\rho} M_\rho(r') + G_{\varphi\varphi} M_\varphi(r') + G_{\varphi z} M_z(r') \right] = 0 \quad \text{ако } \vec{M} = \vec{M}(\rho) \text{ само.}$$

$$H^z_m(\vec{r}) = \int d^3r' \left[G_{z\rho} M_\rho + G_{z\varphi} M_\varphi + G_{zz} M_z \right] = \int d^3r' \, G_{zz}(\vec{\rho} z; \rho' \varphi' z') M_z(\rho')$$

($M_\rho = 0$, M_φ след $\int d\varphi'(\cdot)$)



Т.е. $\vec{H}_m = \left(H^\rho_m, 0, H^z_m\right)$ и зависи само от $M_z(\rho)$. (до уравн. по „z")

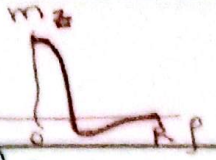
$\hat{\rho}$: $M_\varphi H^z_{ef} = M_z H^\varphi_{ef}$, $\hat{\varphi}$: $M_z H^\rho_{ef} = 0$, $\hat{z}$: $M_\varphi H^\rho_{ef} = 0$.

Вземам $H^\rho_{ef} = H^\rho_m(r) = \int dz' \int d\rho' \rho' d\varphi' \, G_{\rho z}(\vec{\rho}, z; \rho' \varphi' z') M_z(\rho') = 0$ (!?)

$$G_{\rho z}(r,r') = -(\nabla_r)_\rho (\nabla_{r'})_z \frac{1}{|r-r'|} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial z'} \int_0^\infty dk \, e^{-k|z-z'|} \sum_\mu e^{i\mu(\varphi-\varphi')} J_\mu(k\rho) J_\mu(k\rho')$$

~~$\int_0^\infty d\rho' \int d\varphi' G_{\rho z}(r,r') = -\frac{\partial}{\partial \rho} \int d\varphi' \int_0^\infty d\rho' \frac{\partial}{\partial z'} \int dk e^{-k|z-z'|} \sum_\mu e^{i\mu(\varphi-\varphi')} J_\mu(k\rho) J_\mu(k\rho') =$~~

Escaneado con CamScanner



$$= -\frac{\partial}{\partial\rho}\int_0^{2\pi}d\varphi'\int dk\left[e^{-k|z-L|}-e^{-kz}\right]\sum_\mu e^{i\mu(\varphi-\varphi')}J_\mu J_\mu(\cdot) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\rho}\int dk[\dots]\sum_\mu J_\mu J_\mu(\cdot)e^{i\mu\varphi}\cdot 2\pi\delta_{\mu 0} = -2\pi\frac{\partial}{\partial\rho}\int dk\left[e^{-k|z-L|}-e^{-kz}\right]J_0(k\rho)J_0(k\rho')$$

$$\Rightarrow H_m^\rho(\rho,\varphi,z) = \int d\rho'\rho'\left(-2\pi\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\int dk\left[e^{-k|z-L|}-e^{-kz}\right]J_0(k\rho)J_0(k\rho')M_z(\rho')$$

↑ нелег. отн. "$z-\frac{L}{2}$" и не зависит от "φ"

$\langle H_m^\rho(z)\rangle_z = 0$. В этом неточная аналогия $\vec{M}=(0,M_\varphi(\rho),M_z(\rho))$ – надо $\int dz(\dots)$ или просто класть $H_m^\rho=0$. Иначе надо считать $M_{\varphi,z}=f(\rho,z)$

$$\hat{\rho}:\quad M_\varphi\left[\alpha\nabla^2M_z+\int d^3r'G_{zz}(r,r')M_z(r')\right] =$$

$$= M_z\left[\alpha\nabla^2M_\varphi-\frac{\alpha}{\rho^2}M_\varphi\right] - \text{ур-е бр. с } H_m^\rho=0 \text{ (следствие)}$$

и $M_z^2+M_\varphi^2=M_s^2=\text{const}$. $\quad \vec{M}/M_s=\vec{m}$

$$m_\varphi\left[\alpha\nabla^2m_z+\int d^3r'G_{zz}m_z\right]=m_z\left[\alpha\nabla^2m_\varphi-\frac{\alpha}{\rho^2}m_\varphi\right]$$

Ясно, что $m_z=0$ удовл. этому ур.

$$G_{zz}(\vec{\rho}\vec{\rho}',zz') = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z'}\int dk\,e^{-k|z-z'|}\sum_\mu e^{i\mu(\varphi-\varphi')}J_\mu(k\rho)J_\mu(k\rho')$$

$$\int d\rho'\int d\varphi' G_{zz}(r,r') = -\frac{\partial}{\partial z}\int d\varphi'\int dz'\frac{\partial}{\partial z'}\int dk\,e^{-k|z-z'|}\sum_\mu e^{i\mu(\varphi-\varphi')}J_\mu J_\mu(\cdot)=$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z}\int d\varphi'\int dk\left[e^{-k|z-L|}-e^{-kz}\right]\sum_\mu e^{i\mu(\varphi-\varphi')}J_\mu J_\mu(\cdot) = -2\pi\frac{\partial}{\partial z}\int dk\left[e^{-k|z-L|}-e^{-kz}\right]J_0(k\rho)J_0$$

$\nabla^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial z^2}$. Если уже считали $m_{\varphi,z}=f(\rho)$, то можно по z' все же усреднить.

$$g_{zz} = \frac{1}{L}\int dz\int dz'\int d\varphi' G_{zz}(r,r') = (2\pi)\int\frac{dz}{L}\frac{\partial}{\partial z}\int dk[\dots]J_0(k\rho)J_0(k\rho') =$$

$$= -\frac{2\pi}{L}\int dk\left[e^{-k|z-L|}-e^{-kz}\right]_0^L J_0(k\rho)J_0(k\rho') = -\frac{4\pi}{L}\int dk\left[1-e^{-kL}\right]J_0(k\rho)J_0(k\rho')$$

$$m_\varphi\left[\alpha\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial m_z}{\partial\rho}\right)+\int d\rho'\rho'\left(-\frac{4\pi}{L}\right)\int dk\left[1-e^{-kL}\right]J_0(k\rho)J_0(k\rho')m_z(\rho')\right] =$$

$$= \alpha m_z\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial m_\varphi}{\partial\rho}\right)-\frac{1}{\rho^2}m_\varphi\right] - \text{интегро-дифф. ур. для } m_z(\rho),\ m_\varphi=\sqrt{1-m_z^2}.$$

* а) В основной области доля с вортех $m_z\approx 0$ ($m_z\ll 1$), $m_\varphi\approx 1-\frac{1}{2}m_z^2$

"Вне core"

$$\alpha\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial m_z}{\partial\rho}\right)-\frac{4\pi}{L}\int d\rho'\rho'\int dk\left[1-e^{-kL}\right]J_0(k\rho)J_0(k\rho')m_z(\rho') =$$

$$= -\frac{\alpha}{\rho^2}m_z \quad - \text{в лин. по } m_z \text{ приближении}.\quad g(\rho,\rho')\equiv-\frac{4\pi}{L}\int dk\left[1-e^{-kL}\right]J_0(k\rho)$$

$$\frac{\partial^2m_z}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial m_z}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}m_z+\frac{1}{\alpha}\int d\rho'\rho' g(\rho,\rho')m_z(\rho')=0 \quad - \text{искомое}$$

интегродифф. ур. на m_z достаточно далеко от центра доли $\rho=0$ ($m_z\ll 1$).

Это ур-е совпадает с ур. на отклонение от вихря Уэлла от 24.IV.001, если там взять $m_\rho=0$.

Escaneado con CamScanner

Упр. 26. ρ4.

Ур-е Бесселя: $\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} J_\nu(\varkappa\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} J_\nu(\varkappa\rho) + \left(\varkappa^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) J_\nu(\varkappa\rho) = 0$

Какво ни трябва?

Обобщ. числа „собствени" $m_\varphi \approx 0$, $m_z = 1 - \frac{1}{2}m_\varphi^2 \approx 1$

$$m_\varphi\left[\frac{d}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial m_\varphi}{\partial\rho}\right) + \int d\rho' s' g(\rho,\rho')\right] = \alpha\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial m_\varphi}{\partial\rho}\right) - \frac{1}{\rho^2}m_\varphi\right]$$

≈ 0 в лин. случай.

$$\frac{\partial^2 m_\varphi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial m_\varphi}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}m_\varphi + \frac{(-1)}{\alpha}\int d\rho' s' g(\rho,\rho')\cdot m_\varphi = 0$$

$$\frac{\partial^2 m_\varphi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial m_\varphi}{\partial\rho} + \left[\frac{(-1)}{\alpha}\int d\rho' s' g(\rho,\rho') - \frac{1}{\rho^2}\right] m_\varphi(\rho) = 0$$

$\int_0^R d\rho' s' J_0(k\rho') = |k\rho' = x| = \int_0^{kR}\frac{dx\cdot x}{k^2} J_0(x) = \frac{1}{k^2}(kR)\,J_1(kR) = \frac{R}{k}J_1(kR)$

$\int d\rho' s' g(\rho\rho') = \int d\rho' s'\left(-\frac{4\pi}{L}\right)\int dk[\cdot]\, J_0(k\rho)J_0(k\rho') = -\frac{4\pi R}{L}\int dk\left[1-e^{-kL}\right]J_0(k\rho)\frac{1}{k}J_1(kR)$

$J(\rho)$ в окрестност $\rho = 0$ $\quad J(0) = -\frac{4\pi R}{L}\int dk\,\frac{(1-e^{-kL})}{k}J_1(kR) = \text{const}$.

При $\rho \approx 0$: $\frac{\partial^2 m_\varphi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial m_\varphi}{\partial\rho} + \left[-\frac{J(0)}{\alpha} - \frac{1}{\rho^2}\right]m_\varphi = 0$ – зад. ур. Бесел ($\varkappa^2 < 0$)

с решение $m_\varphi(\rho) = c\cdot J_1\left(\sqrt{-\frac{J(0)}{\alpha}}\,\rho\right)$, $\quad \varkappa^2 = \frac{(-1)}{\alpha}J(0) > 0$

$$J(0) = -4\pi\frac{R}{L}\int_0^\infty dk\,\frac{(1-e^{-kL})}{k}J_1(kR) = \left|kR = x, L/k = \beta\right| = -\frac{4\pi}{\beta}\int_0^\infty\frac{dx}{x}(1-e^{-\beta x})J_1(x) =$$

$$= -\frac{4\pi}{\beta}\left[\int_0^\infty\frac{dx}{x}J_1(x) - \int_0^\infty\frac{dx}{x}e^{-\beta x}J_1(x)\right] = -\frac{4\pi}{\beta}\left[2^{-1}\frac{\Gamma(1/2+1/2-1/2)}{\Gamma(1/2+1/2+1/2)} - \right.$$

$$\left. - \left\{\sqrt{1+\beta^2} - \beta\right\}\right] = -\frac{4\pi}{\beta}\left[\frac{1}{2}\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/2)} + \beta - \sqrt{1+\beta^2}\right] = -\frac{4\pi}{\beta}\left[1+\beta-\sqrt{1+\beta^2}\right]$$

$\varkappa^2 = +\frac{4\pi}{\beta\alpha}\left[1+\beta-\sqrt{1+\beta^2}\right] > 0$ при $\beta < 1$. $J_1(z) \sim z$ – а Бесел пресича

При $\beta \to 0$ $\quad \varkappa^2 = +\frac{4\pi}{\alpha} = +\frac{4\pi M_s^2}{(\alpha M_s^2)} = +\frac{4\pi M_s^2}{c} = +4\pi\frac{1}{R_0^2}$, $R_0^2 = \frac{c}{M_s^2}$ – обл. дължина.

$m_\varphi(\rho) \sim J_1(|\varkappa|\rho) \sim \rho$, $\rho \to 0$, $m_z = \sqrt{1-m_\varphi^2} \approx 1 - \frac{m_\varphi^2}{2} = 1 - a\rho^2$ при $\rho \to 0$.

$m_z(\rho) = 1 - a\rho^2$ – похожа на вихрово условие $m_z(\rho) = \frac{b^2-\rho^2}{b^2+\rho^2}$ при $\rho/b \ll 1$.

$$J(\rho) = -\frac{4\pi}{\beta}\int_0^\infty dx\left[1-e^{-\beta x}\right]\frac{1}{x}J_0\left(\frac{\rho}{R}x\right)J_1(x)$$ – но ρ – разстояние напосл.

$$g(\rho,\rho') = -\frac{4\pi}{RL}\int_0^\infty dx\left[1-e^{-\beta x}\right]J_0\left(\frac{\rho}{R}x\right)J_0\left(\frac{\rho'}{R}x\right)$$ – можем найти явно като функционал от ρ,ρ'.

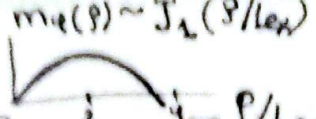
23/IV

Какво ако разглеждаме по β будем имать смисъл?

$$J(\rho) \underset{\beta\ll 1}{\approx} -\frac{4\pi}{\beta}\int dx\,\frac{\beta x}{x}J_0\left(\frac{\rho}{R}x\right)J_1(x) = -4\pi\int_0^\infty dx\,J_0\left(\frac{\rho}{R}x\right)J_1(x) = \left|\text{с.т. 16 Гр.-Р.}\right| =$$

$$= -4\pi\frac{1}{\Gamma(1)} = -4\pi,$$ и не от β не от ρ не зависи (!)

Escaneado con CamScanner



Date.

а) Возьмём $\rho \ll 1$ (Добавочно $\rho \gg 1$ — смотри дальше) бесс. ($\nu = 1$): $m_\varphi \ll 1$):

$$\frac{\partial^2 m_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial m_\varphi}{\partial \rho} + \left(\frac{4\pi}{\alpha} - \frac{1}{\rho^2}\right) m_\varphi = 0,$$ которое имеет решение

$m_\varphi(\rho) = C \cdot J_1\left(\sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}}\,\rho\right)$, $J_1(x)$ — ф-я Бесселя ~~мнимого аргумента~~ с $\nu = 1$.

$\sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}} = \frac{\sqrt{4\pi}}{R_0}$, $L_{ex} = \frac{R_0}{\sqrt{4\pi}}$ $\left(\approx \frac{18\,nm}{3,5} \simeq 5\,nm\right)$ — даёт масштаб изменения $m_\varphi(\rho)$.

А бог $g(\rho, \rho') \underset{\rho \to 0}{=} -\frac{4\pi}{L}\int_0^\infty dk\, k\, I_0(k\rho) J_0(k\rho') = -4\pi \frac{1}{\rho}\delta(\rho - \rho')$,

это даёт в главном приближении по $\rho \ll 1$ в области $m_z \ll 1$ (а):

$$\frac{\partial^2 m_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial m_z}{\partial \rho} + \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{4\pi}{\alpha}\right) m_z(\rho) = 0.$$ — это совп. с ур-ем By Wysin'98 - Eq. (29)

Это ур-е на функцию Бесселя мнимого аргумента $I_\nu(x\rho)$ с $\nu = i$.

$$\rho^2 \frac{\partial^2 m_z}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial m_z}{\partial \rho} + \left(1 - \frac{4\pi}{\alpha}\rho^2\right) m_z(\rho) = 0, \quad x^2 = \frac{4\pi}{\alpha}$$

$\frac{4\pi}{\alpha}\rho^2 = 4\pi\frac{\rho^2}{R_0^2}$, для $\rho \lesssim R$ $4\pi\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^2 \gg 1$ и диф. ур. для $m_z \approx$

$$\frac{\partial^2 m_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial m_z}{\partial \rho} - \frac{4\pi}{R_0^2} m_z = 0$$ — а это уже ур-е для ф.Б. $I_0(x)$ и $K_0(x)$.

Его решение $m_z(\rho) = C_1 I_0(x\rho) + C_2 K_0(x\rho)$, $x^2 = \frac{4\pi}{\alpha} = \frac{4\pi}{R_0^2}$

$\left(\frac{\partial m_z}{\partial \rho}\right)_{\rho = R} = 0 \to \left(\frac{\partial m_z}{\partial \rho}\right)_{\rho = R} = C_1 x I_1(xR) - C_2 x K_1(xR) = 0$, т.е.

$C_1/C_2 = \frac{K_1(xR)}{I_1(xR)}$, $m_z(\rho) = C_2 I_0(x\rho)\frac{K_1(xR)}{I_1(xR)} + C_2 K_0(x\rho) =$

$= \frac{C_2}{I_1(xR)}\left[I_0(x\rho) K_1(xR) + K_0(x\rho) I_1(xR)\right]$

$$m_z(\rho) = C\left[I_0(x\rho) K_1(xR) + K_0(x\rho) I_1(xR)\right], \quad m_z \ll 1$$ — даёт "то же" при $\rho \ll 1$

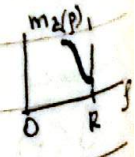
Если $\rho = R$, то $m_z(R) = C\left[I_0(x) K_1(x) + K_0(x) I_1(x)\right]_{x = xR} = \frac{C}{xR}$ в силу свойств Wronskians. $xR = \sqrt{4\pi}\frac{R}{R_0} \gg 1$

Вблизи $\rho = R$ $I_0(x\rho) \cong \frac{e^{x\rho}}{\sqrt{2\pi x\rho}}$, $K_0(x\rho) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x\rho}} e^{-x\rho}$

$K_1(xR) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2xR}} e^{-xR}$, $I_1(xR) = \frac{1}{\sqrt{2\pi xR}} e^{xR}$

$$m_z(\rho) \approx C\left[\frac{e^{x\rho}}{\sqrt{2\pi x\rho}}\sqrt{\frac{\pi}{2xR}} e^{-xR} + \sqrt{\frac{\pi}{2x\rho}} e^{-x\rho}\frac{1}{\sqrt{2\pi xR}} e^{xR}\right] =$$

$$= C\,\frac{1}{2x}\frac{1}{\sqrt{\rho R}}\left[e^{x(\rho - R)} + e^{-x(\rho - R)}\right] = \frac{C}{x\sqrt{\rho R}}\operatorname{ch} x(\rho - R)$$



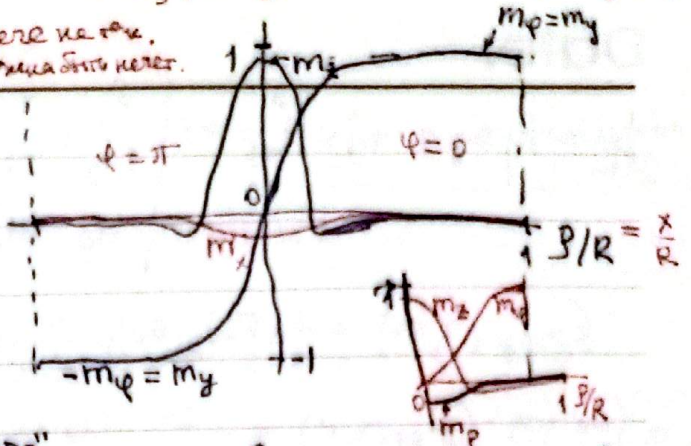
~~Одну $K_0(x\rho)$ в решении диф. ур. для $m_z(\rho)$ нельзя выбросить, т.к. тогда $\left(\frac{\partial m_z}{\partial \rho}\right)_{\rho = R} = 0$ не выполнить.~~

Точнее $\varphi = \begin{cases} 0, & x>0 \\ \pi, & x<0 \end{cases}$ и $M_x = \begin{cases} M_\rho, & x>0 \\ -M_\rho, & x<0 \end{cases}$, $M_y = \begin{cases} M_\varphi, & x>0 \\ -M_\varphi, & x<0 \end{cases}$, $M>0$

C_{mx} что-то в solvere на т.ч. $m_x(x)$ – должна быть нечет.

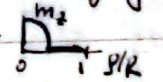
Дата: 24.04.

Новосад численно посчитал разницу Ахиза вдоль $y=0$ ($\varphi=0$), тогда $M_x = M_\rho$, $M_y = M_\varphi$.

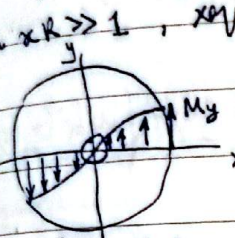


Качественно: а) немалая осцилляция $m_z(\rho)$ с изменением знака за пределами "core" б) наличие заметной $m_\rho \neq 0$ с max при $\rho = 0$. ⇒ Все это может привести к правильной моде вихря устойчивости vortex при $H=0$.

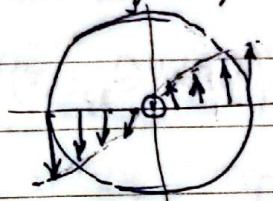
Выводы: а) $m_\rho = 0$ можно полагать вне "core" только (иначе учитывать при $\rho \approx 0$) и решение $m_\varphi(\rho) \sim J_1(\varkappa\rho)$ вблизи центра диска надо уточнить

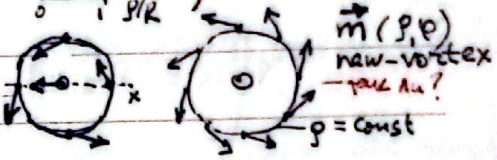
б) величину m_ρ и осцилляции m_z видимо определяет $\varkappa R = \sqrt{4\pi \frac{R}{R_0}}$ (при $\varkappa R \gg 1$, хорошо выч. $m_\rho = 0$, а m_z – 

).



вихрь Усова


искажения из-за $m_x = m_\rho \neq 0$, существенные для малых R



в) даже вне "core" m_ρ и m_z примерно одинаковы и малы, а при $\rho \approx 0$ надо считать $m_\rho > m_\varphi$ (и линеаризация вне "core" только по m_z очень грубо)

$$\operatorname{div}\vec{m} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho m_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial m_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial m_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho m_\rho) \neq 0$$ для области "core"

$m_\rho \neq 0$ приводит к росту W_m^{vor} за счет объемных зарядов и росту W_{ex}, но к уменьшению $W_m^{торц}$ за счет осцилляции m_z. Видимо $m_\rho \neq 0$ возможно лишь для малых $R \sim R_0$, но для кривой устойчивости vortex state может оказаться принципиально важным.

Нужен new анзатц $\vec{m}(\rho)$, переходящий при $R \gg R_0$ в вихрь Усова.

→ В решениях 22-23/IV надо учесть $m_\rho \neq 0$, но $m_\rho \ll 1$.

Тогда $\frac{1}{\alpha}H_{ax}^\rho = \nabla^2 m_\rho - \frac{1}{\rho^2}m_\rho$, $\frac{1}{\alpha}H_{ex}^\varphi = \nabla^2 m_\rho - \frac{1}{\rho^2}m_\rho$, $\frac{1}{\alpha}H_{ex}^z = \nabla^2 m_z$

$H_m^\varphi = 0$ по предпол. $H_m^\rho(r) = \int d^3r' \left[G_{\rho\rho} m_\rho(\rho') + G_{\rho z} m_z(\rho') \right]$

$H_m^z(r) = \int d^3r' \left[G_{z\rho} m_\rho(\rho') + G_{zz} m_z(\rho') \right]$ → $\vec{H}_m = (H_m^\rho, 0, H_m^z)$,

а для $\vec{H}_{ex} = (H_{ex}^\rho, H_{ex}^\varphi, H_{ex}^z)$ имеем все компоненты.

Escaneado con CamScanner

Дано.

(Ур-е Пуассона $\vec{m}$ + H_{ext} = $\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\varphi} & \hat{z} \\ m_\rho & m_\varphi & m_z \\ H^\rho_{ext} & H^\varphi_{ext} & H^z_{ext} \end{vmatrix}$ = $-\hat{\rho}(m_\varphi H^z_{ext} - m_z H^\varphi_{ext}) + \hat{\varphi}(m_z H^\rho_{ext} - m_\rho H^z_{ext}) + \hat{z}(m_\rho H^\varphi_{ext} - m_\varphi H^\rho_{ext}) = 0$

$G_{\rho\rho}(r,r') = -(\nabla_r)_\rho (\nabla_{r'})_\rho \frac{1}{|r-r'|} = -\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial\rho'}\int dk\, e^{ik(z-z')} \sum_n e^{in(\varphi-\varphi')} J_n(k\rho) J_n(k\rho')$

$\hat{g}_{\rho\rho} = \int d\varphi' \int dz' \, G_{\rho\rho}(r,r') = -\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\rho'} \int d\varphi' \int dz' \int dk\, e^{ik(z-z')} \sum_n e^{in(\varphi-\varphi')} J_n(k\rho) J_n(k\rho') =$

$= -\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\rho'} \int d\varphi' \int dk\, e^{-ikz'} \sum_n e^{in\varphi} 2\pi\delta_{n0} J_n J_n(\cdot) =$

$= -\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\rho'} (2\pi) \int_0^1 d\varphi' \int dk\, e^{ik(z-z')} J_0(k\rho) J_0(k\rho') =$

$= -(2\pi)\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial\rho'} \int_0^\infty dk \frac{1}{k}\left[2 - e^{-kz} - e^{-k(1-z)}\right] J_0(k\rho) J_0(k\rho')$

$\hat{\rho}$: $m_\rho\left[\alpha\nabla^2 m_z + \int d\rho'\rho'\left\{\int dz'dz' G_{z\rho}(r,r')\right\} m_\rho(\rho') + \int d\rho'\rho'\left\{\int dz'dz' G_{zz}(r,r')\right\} m_z(\rho')\right]$

$= m_z\left[\alpha\nabla^2 m_\varphi - \frac{\alpha}{\rho^2} m_\varphi\right]$

$\hat{\varphi}$: $m_z\left[\alpha\nabla^2 m_\rho - \frac{\alpha}{\rho^2} m_\rho + \int d\rho'\rho'\left\{\int dz'dz' G_{\rho\rho}(rr')\right\} m_\rho(\rho') + \int d\rho'\rho'\left\{\int dz'dz' G_{\rho z}(rr')\right\} m_z(\rho')\right]$

Ур. связи на $\vec{m}(\rho)$ нет

$= m_\rho\left[\alpha\nabla^2 m_z + \int d\rho'\rho'\left\{\cdots\right\} m_\rho(\rho') + \int d\rho'\rho'\left\{\cdots\right\} m_z(\rho')\right]$

$\hat{z}$: $m_\rho\left[\alpha\nabla^2 m_\varphi - \frac{\alpha}{\rho^2} m_\varphi\right] = m_\varphi\left[\alpha\nabla^2 m_\rho - \frac{\alpha}{\rho^2} m_\rho + \int d\rho'\rho'\left\{\cdots\right\} m_\rho(\rho') + \int d\rho'\rho'\left\{\cdots\right\}\right]$

сокращаются

*а) В основном области газа (вне „core") $\frac{m_z, m_\rho}{m_\varphi} \ll 1$; $m_\varphi \approx 1$; $m_\varphi = 1 - \frac{1}{2}m_z^2 - \frac{1}{2}m_\rho^2$

$\hat{\rho}$: $\alpha\nabla^2 m_z + \int d\rho'\rho' \hat{g}_{z\rho}(\rho,\rho') m_\rho(\rho') + \int d\rho'\rho' \hat{g}_{zz}(\rho,\rho') m_z(\rho') = -\frac{\alpha}{\rho^2} m_z(\rho)$

$\hat{z}$: $-\frac{\alpha}{\rho^2} m_\rho = \alpha\nabla^2 m_\rho - \frac{\alpha}{\rho^2} m_\rho + \int d\rho'\rho' \hat{g}_{\rho\rho}(\rho\rho') m_\rho(\rho') + \int d\rho'\rho' \hat{g}_{\rho z}(\rho\rho') m_z(\rho')$

$\hat{\varphi}$: тождество $0=0$ в лин. приближении

Уж. вида если $\hat{g}_{\rho z} = \hat{g}_{z\rho}$ усредним по „z" то $\langle \hat{g}_{\rho z} \rangle_z = 0$,

Ур. по z: а вот $\langle \hat{g}_{\rho\rho} \rangle_z \neq 0 \neq \langle \hat{g}_{zz} \rangle_z \neq 0$. (в самом деле $\hat{g}_{z\rho} = \hat{g}_{z\rho}(\rho\rho', z)$ зависит

→ А вдоль по „z" приходится усреднять если считать $\vec{m}(\vec{r}) + f(z)$.

Иначе противоречие $F_{магн}(z) + F_{маг.}(z) = Const$ в общем уравнении

$\frac{1}{L}\int_0^L dz\, \hat{g}_{z\rho}(\rho\rho', z) \underset{def}{=} g_{z\rho}(\rho,\rho')$ как 22/12. $\hat{g}_{z\rho}(\rho\rho', z) = \int dz'dz' G_{z\rho}(r,r')$

Date.

Уравнения дают: $\begin{cases} \alpha\nabla^2 m_z + \int d\rho' \rho' g_{zz}(\rho,\rho') m_z(\rho') = -\frac{\alpha}{\rho^2} m_z(\rho) \\ \alpha\nabla^2 m_\rho + \int d\rho' \rho' g_{\rho\rho}(\rho,\rho') m_\rho(\rho') = 0 \end{cases}$ — совпадает с 22/IV

Вблизи центра диска $\rho=0$ $m_z \approx 1 - \frac{1}{2}m_\varphi^2 - \frac{1}{2}m_\rho^2$, $m_\varphi, m_\rho \ll 1$

$m_\varphi \int d\rho' \rho' \hat{g}_{zz}(\rho\rho') = \alpha\nabla^2 m_\varphi - \frac{\alpha}{\rho^2} m_\varphi$

$\alpha\nabla^2 m_\rho - \frac{\alpha}{\rho^2} m_\rho + \int d\rho' \rho' \hat{g}_{\rho\rho}(\rho\rho') m_\rho(\rho') + \int d\rho' \rho' \hat{g}_{\rho z}(\rho,\rho') =$

$= m_\rho \int d\rho' \rho' \hat{g}_{zz}(\rho,\rho')$

тождество $0=0$ в лин. приближении

Уравнения дают: $\begin{cases} \alpha\nabla^2 m_\varphi - \frac{\alpha}{\rho^2} m_\varphi = m_\varphi \int d\rho' \rho' g_{zz}(\rho,\rho') \\ \alpha\nabla^2 m_\rho - \frac{\alpha}{\rho^2} m_\rho - m_\rho \underbrace{\int d\rho' \rho' g_{zz}(\rho,\rho')}_{J(\rho)} + \int d\rho' \rho' g_{\rho\rho}(\rho\rho') m_\rho(\rho') = 0 \end{cases}$ — совпадает с 22/IV; вблизи $\rho=0$

Т.е. уравнение от 22/IV для m_φ вблизи $\rho=0$ и для m_z вне „core" условия. Но добавились к ним уравнение на $m_\rho(\rho)$.

Вблизи $\rho=0$ ур-е на m_ρ: $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho m_\rho) + (\varkappa^2 - \frac{1}{\rho^2}) m_\rho(\rho) + \frac{1}{\alpha}\int d\rho' \rho' g_{\rho\rho}(\rho\rho') m_\rho(\rho') = 0$

$g_{\rho\rho}(\rho\rho') = \frac{1}{L}\int dz\, \hat{g}_{\rho\rho}(\rho\rho', z) = \left| \frac{1}{L}\int_0^L dz \left(2 - e^{-kz} - e^{-kL}e^{kz}\right) = 2 - \frac{1}{L}\frac{(-1)}{k}e^{-kz}\Big|_0^L - \right.$

$\left. - \frac{1}{L}e^{-kL}\frac{1}{k}e^{kz}\Big|_0^L = 2 + \frac{1}{kL}(e^{-kL} - 1) - \frac{1}{kL}e^{-kL}(e^{kL} - 1) = 2 f(kL) \right| =$

$= \frac{1}{L}\int dz\, (-2\pi)\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\rho'} \int \frac{dk}{k}\left[2 - e^{-kz} - e^{-kL}e^{kz}\right] J_0(k\rho) J_0(k\rho') =$

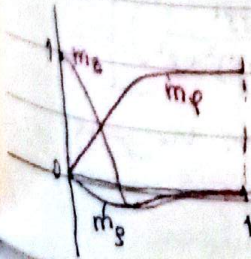
$= (-4\pi)\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\rho'} \int \frac{dk}{k} f(kL) J_0(k\rho) J_0(k\rho') = (-4\pi)\int_0^\infty dk\, k f(kL) J_1(k\rho) J_1(k\rho')$

$\to g_{\rho\rho}(\rho,\rho') = -4\pi \int_0^\infty dk\, k J_1(k\rho) J_1(k\rho') f(kL)$ — ненул. функция ρ формально (везде $\rho \neq 0$),

поэтому $m_\rho(\rho)$ — нечетная функция ρ и $m_\rho(0) = 0$.

Действительно $\rho^2 \frac{\partial^2 m_\rho}{\partial\rho^2} + \rho\frac{\partial m_\rho}{\partial\rho} + (\varkappa^2\rho^2 - 1) m_\rho(\rho) + \frac{\rho^2}{\alpha}\int d\rho' \rho' g_{\rho\rho}(\rho,\rho') m_\rho(\rho') = 0$

при $\rho \to 0$, все производные конечны дает $(-1) m_\rho(\rho=0) = 0$, $m_\rho(0) = 0$.



Т.е. выходит либо $m_\rho(\rho)$ — ненул. ф-я от ρ, $m_\rho(0) = 0$

либо вообще $m_\rho(\rho) = 0$ $\forall\rho$.

$m_\rho(\rho)$ должна быть одного знака для $\alpha\rho < R$.

new vortex $\vec{m}(\vec{\rho})$ — есть отклонение $m_z(\rho)$ и $m_\rho \neq 0$ вблизи „core"

Date. 25. 04.

Оказалось, что если учесть $m_\rho \neq 0$, то вблизи $\rho \approx 0$ и $\rho \leq R$ уравнения на m_ρ и m_z отщепляются и сохраняют вид от 22-23/IV.

Более точно $J(\rho)$: $J(\rho) = \int_0^R d\rho' \rho' g_{zz}(\rho,\rho') = -\frac{4\pi}{\beta}\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left[1-e^{-\beta x}\right] J_0(x\frac{\rho}{R}) J_1(x)$.

Радиус core "в", понимаемый теперь как корень $m_z(\rho)=0$, следуя micromag. calc. Новосада почти не зависит от R. А зависит лишь от L и не очень сильно если $L \leq 3R_0$.

Самое большое отклонение от vortex ухва: 

будет при малых R и больших $\frac{L}{R}$. Например $\frac{L}{R} = 1, 0.8$.

Поэтому брать пределы $\beta \to 0$ для new vortexa будет плохо.

Конечно $J(\rho)\underset{\beta\to 0}{} = -4\pi$ — просто, но $\frac{1}{\beta}$ new vortex в таком пределе мало.

$\beta \gg 1$ — можно, ведь $\beta_{max} = 1,81$ иначе $\perp$-состояние s.d. дна.

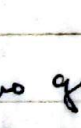
С другой стороны придем тут s.d. дна?

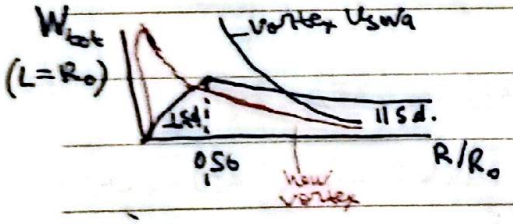


→ увеличиваем R

почти in-plane || state

почти $\perp$ state

Т.е. "core" $\simeq$ const а R постепенно уменьш., даже $R < \beta$ можно пока не получим $\simeq \perp$ s.d. state 



$W_{new\ vort.} < W_{vort.\ ухва}$, особенно для малых $\frac{R}{R_0}$ и при $\frac{R}{R_0} \to 0$ new vort. → $\perp$ s.d.

Но внимание, ли $W_{new\ vort} < W(11\,s.d.)$ неясно?

→ $J(\rho,\beta) = -\frac{4\pi}{\beta}\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left[1-e^{-\beta x}\right] J_0(\frac{\rho}{R}x) J_1(x)$,

Сама $g_{zz}(\rho,\rho') = -\frac{4\pi}{RL}\int_0^\infty dx \left[1-e^{-\beta x}\right] J_0(\frac{\rho}{R}x) J_0(\frac{\rho'}{R}x) =$

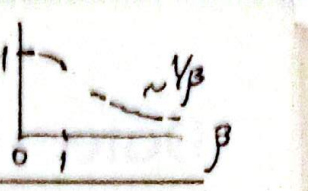
$= -\frac{4\pi}{RL}\left[\frac{1}{\pi\sqrt{\rho\rho'}}\sqrt{\frac{4\rho\rho'}{(\rho+\rho')^2+z^2}}\, K\left(\sqrt{\frac{2\cdot 2\cdot\rho\rho'}{(\rho+\rho')^2+z^2}}\right)\right]_{z=\beta}^{z=0} =$

$= -\frac{8}{RL}\left[\frac{1}{(\rho+\rho')} K\left(\frac{\sqrt{4\rho\rho'}}{\rho+\rho'}\right) - \frac{1}{\sqrt{(\rho+\rho')^2+\beta^2}} K\left(\sqrt{\frac{4\rho\rho'}{(\rho+\rho')^2+\beta^2}}\right)\right]$

Здесь $K(k) = \left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$ — полный эллипт. инт. 1го рода.

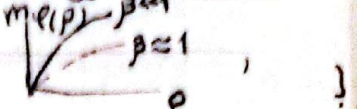
$g_{zz}\underset{\beta\to 0}{(\rho,\rho')} = -4\pi\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')$

Escaneado con CamScanner

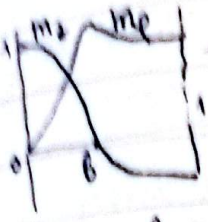


Вообще, $\mathcal{J}(\rho)$ везде нужно вблизи $\rho=0$ считать дважды, дважды по ρ: сначала по $\left(\frac{\rho}{R}x\right)$ рассматривать, можно только $\mathcal{J}(\rho=0,\beta)$ найти как 23/IV

$\mathcal{J}(0,\beta) = -\frac{4\pi}{\beta}\left[1+\beta-\sqrt{1+\beta^2}\right] < 0 \;\forall\beta$. $\varkappa^2 = -\frac{1}{\alpha}\mathcal{J}(0,\beta) > 0$.

вблизи $\rho=0$ $m_\varphi(\rho) = c\,J_1(\varkappa\rho)$, $\varkappa$ падает с $\beta\uparrow$ 

т.е. радиус "сопе" в расчёт с увелич. β.





малые R, большие $\beta\gtrsim 1$

Как часть $b = F(R,L)$ найти, $m_z(\rho=b)=0$?

Ур-е на $m_z \ll 1$: $\nabla^2 m_z + \frac{1}{\rho^2}m_z(\rho) + \frac{1}{\alpha}\int_0^R d\rho'\rho' g_{zz}(\rho,\rho')m_z(\rho') = 0$

("вне "сопе" при R больших или при $\rho\gtrsim b$).

Везде это ур-е неверно, нельзя из-за $\int_0^R d\rho'\ldots m_z(\rho')$ считать $m_z \ll 1$.

Вот ур-е на $m_\varphi(\rho)$ при $\rho\sim b$ верно, т.к. $\int d\rho' m_\varphi(\rho')$ — так как и m_φ, m_ϑ можно считать малыми вблизи $\rho=0$ ($m_\vartheta(\rho) \ll 1 \;\forall\rho$ к тому же).

Надо (полагая пока $m_\vartheta=0$) рассм. полное ур-е из 24/IV:

$m_\varphi\left[\alpha\nabla^2 m_z + \int d\rho'\rho' \hat{g}_{z\vartheta}\, m_\vartheta(\rho') + \int d\rho'\rho' \hat{g}_{zz}(\rho,\rho')m_z(\rho')\right] = m_z\alpha\left[\nabla^2 m_\varphi - \frac{1}{\rho^2}m_\varphi\right]$

$\Rightarrow$ $\begin{cases} m_\varphi\left[\nabla^2 m_z + \frac{1}{\alpha}\int_0^R d\rho'\rho' g_{zz}(\rho,\rho')m_z(\rho')\right] = m_z\left[\nabla^2 m_\varphi - \frac{1}{\rho^2}m_\varphi\right] \\ m_z^2 + m_\varphi^2 = 1 \end{cases}$

↳ нелинейное интегро-диф. ур. на $m_z(\rho)$.

$m_\varphi = \sqrt{1-m_z^2} \underset{m_z(b)=0}{\underset{\rho\to b}{\approx}} 1 - \frac{1}{2}m_z^2$ и вблизи $\rho=b$ это ур. можно линеаризовать: $\nabla^2 m_z + \frac{1}{\rho^2}m_z(\rho) + \frac{1}{\alpha}\int_0^R d\rho'\rho' g_{zz}(\rho\rho')m_z(\rho') = 0$, $\rho\sim b$.

— тоже мало, т.к. $m_z(\rho)$ при $\rho\sim b$, а $m_z(\rho')$ для $\forall\rho'$.

$g_{zz}(\rho\rho') = -\frac{4\pi}{\beta}\frac{1}{R^2}\int_0^\infty dx\left[1-e^{-\beta x}\right]J_0\left(\frac{\rho}{R}x\right)J_0\left(\frac{\rho'}{R}x\right)$

$K(k) \underset{k\to 1}{\sim} \ln(1-k^2)$, поэтому $g_{zz}(\rho,\rho') \sim \ln|\rho-\rho'|$ $\forall\beta$ имеет max при $\rho\to\rho'$

Поэтому можно потребовать $\int d\rho'\rho' g_{zz}(\rho\rho')m_z(\rho') \approx m_z(\rho)\int d\rho'\rho' g_{zz}$,

т.е. вблизи $\rho=b$ $\nabla^2 m_z + \frac{1}{\rho^2}m_z(\rho) + m_z(\rho)\frac{1}{\alpha}\mathcal{J}(\rho) = 0$,

это позволяет найти $m_z(\rho) = \mu(\rho-b)$ вблизи $\rho=b$.

New-vortex

Date. 26. 04. trial function $m_z(\rho) = \frac{\sin \varkappa \rho}{\varkappa \rho}$

Найдем пробную функцию для $m_z(\rho)$ of new-vortex.

Известно, что при $\rho \approx 0$ $m_\varphi(\rho) = C J_1(\varkappa\rho)$, $\varkappa^2 = -\frac{1}{\alpha} J(0,\beta)$

$m_z(\rho) \underset{\rho \approx 0}{=} \sqrt{1 - m_\varphi^2(\rho)} = \sqrt{1 - C^2 J_1^2(\varkappa\rho)} \approx \sqrt{1 - C^2 \frac{1}{4}\varkappa^2\rho^2} \approx 1 - \frac{1}{8} C^2 \varkappa^2 \rho^2$

Попробуем trial function $m_z(\rho) = \frac{\sin \varkappa\rho}{\varkappa\rho}$, $\varkappa^2 = \frac{4\pi}{\alpha\beta}$ $\left(\rho = L/R\right)$

1) Вблизи $\rho = 0$ $m_z(\rho) = \frac{1}{\varkappa\rho}\left[\varkappa\rho - \frac{1}{3!}\varkappa^3\rho^3\right] = 1 - \frac{1}{3!}\varkappa^2\rho^2$ - похоже

2) Зануление $m_z(\rho) = 0$ при $\sin \varkappa B = 0$, т.е. $\varkappa B = n\pi \to B = \frac{n\pi}{\varkappa}$

- такое $B = f(\beta)$ только и



- вроде правдоподобно.

3) Грав. условие $\left(\frac{\partial m_z}{\partial \rho}\right)_{\rho=R} = 0$: $\frac{\partial m_z}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho^2\varkappa}\sin\varkappa\rho + \frac{1}{\varkappa\rho}\varkappa\cos\varkappa\rho$

$\left(\frac{\partial m_z}{\partial \rho}\right)_{\rho=R} = -\frac{1}{\varkappa R^2}\sin\varkappa R + \frac{1}{R}\cos\varkappa R = \frac{1}{R}\left[\cos\varkappa R - \frac{\sin\varkappa R}{\varkappa R}\right]$



$\varkappa R = \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{\alpha}} R \sqrt{\left(\frac{1+\beta-\sqrt{1+\beta^2}}{\beta}\right)} = \sqrt{4\pi}\left(\frac{R}{R_0}\right)\left(\frac{1+\beta-\sqrt{1+\beta^2}}{\beta}\right)^{1/2} = \sqrt{4\pi}\frac{R}{R_0}F_0(\beta)$

Вообще $\varkappa\rho = \sqrt{4\pi}\frac{\rho}{R_0}F_0(\beta)$. При $\rho \ll 1$ $\varkappa\rho = \sqrt{4\pi}\left(\frac{\rho}{R}\right)\left(\frac{L}{R_0}\right)\frac{1}{\beta}F_0(\beta) \gg 1$

и $\rho \le R$ $L/R_0 = \text{const} \sim 1$

и $m_z(\rho) \approx 0$ при $\rho \le R$ - верно. Но $\varkappa\rho \sim 1$ для $\rho \gtrsim L$ и $m_z(\rho)$ заметно меньше чем для $\rho \le L$ - верно.

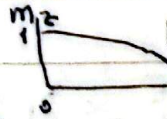
→ Предполагаем, что $\left(\frac{\partial m_z}{\partial \rho}\right)_R = 0$ выполняется для малых R (т.е. $\beta \sim 1$).

MCAD-анализ (new-vortex.mcd) показывает, что

$m_z(\rho) = \frac{\sin\varkappa\rho}{\varkappa\rho}$, $\varkappa R = \sqrt{4\pi}\left(\frac{L}{R_0}\right)\frac{1}{\beta}F_0(\beta)$ выполнимо при $\frac{L}{R_0} \approx 1$ (при $L \sim$

только для $\beta \in [0.5, 0.8]$. Для меньших β - плохо из-за дополн. осцилляции $m_z(\rho)$

а для больших β не очень хорошо т.к. (но правдоподобно)



уже могли L-state

→ Т.е. $m_z(\rho) = \frac{\sin\varkappa\rho}{\varkappa\rho}$ видимо проходит для достаточно больших β (с $L > R_0$)

i.e. для достаточно малых $R \gtrsim R_0$

$\Theta(\rho)$ Удобно $m_z(\rho) = \cos\Theta(\rho)$, $m_\varphi = \sin\Theta(\rho)$, $m_z(\rho) = \frac{\sin\varkappa\rho}{\varkappa\rho}$.

$W_{ex} = 2\pi L \frac{C}{2}\int_0^R d\rho\rho\left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{\sin^2\Theta}{\rho^2}\right]$

$\Theta(\rho) = \arccos m_z(\rho)$, $\frac{\partial\Theta}{\partial\rho} = -\frac{1}{\sqrt{1-m_z^2}}\frac{\partial m_z}{\partial\rho} = -\frac{1}{\sqrt{1-m_z^2}}\frac{1}{\rho}\left[\cos\varkappa\rho - \frac{\sin\varkappa\rho}{\varkappa\rho}\right]$

$W_{ex} = \pi L C \int d\rho\rho\left[\frac{1}{1-\frac{\sin^2\varkappa\rho}{(\varkappa\rho)^2}}\cdot\frac{1}{\rho^2}\cdot\left(\cos\varkappa\rho - \frac{\sin\varkappa\rho}{\varkappa\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(1 - \frac{\sin^2\varkappa\rho}{(\varkappa\rho)^2}\right)\right] =$

$= \pi L C \int \frac{d\rho}{\rho}\frac{1}{1-\frac{\sin^2\varkappa\rho}{\varkappa^2\rho^2}}\left[\cos^2\varkappa\rho - 2\frac{\sin\varkappa\rho\cos\varkappa\rho}{\varkappa\rho} + \frac{\sin^2\varkappa\rho}{\varkappa^2\rho^2} + 1 -\right.$

Escaneado con CamScanner

Date.

$$\left. + \frac{\sin^2 x\rho}{x^2\rho^2} + \frac{\sin^4 x\rho}{x^4\rho^4} \right] \qquad W_{ex} = \frac{1}{M_s^2 V} W_{ex} = \frac{1}{M_s^2}\frac{1}{\pi R^2 L}\,\pi L C \cdot \int_0^R d\rho\,\rho \left[\dots\right] =$$

$$= \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \int_0^R d\rho\,\rho \left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{\sin^2\theta(\rho)}{\rho^2}\right], \qquad R_0^{-1} = C/M_s^2 .$$

$$W'_{ex} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \int_0^R d\rho\,\rho \left[\left(\frac{\partial m_z}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial m_\varphi}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} m_\varphi^2\right], \quad \text{где } \rho = r/R, \ \rho \in [0,1]$$

$$W'^{(0)}_{ex} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 F_e(x), \qquad F_e(x) = \int_0^1 d\rho\,\rho \left[\left(\frac{\partial m_z}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial m_\varphi}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} m_\varphi^2\right], \quad m_z = \frac{\sin\alpha\rho}{\alpha\rho}.$$

Для вычисления W_m используем Eqs. от 23/III 00 г.

$$W_m = W_m(1) + W_m(2) + W_m(\text{int})$$

$$W_m = (2\pi)^2 \int_0^R d\rho\,\rho \int_0^R d\rho'\rho'\, \delta(\rho)\delta(\rho') \int dk\, J_0(k\rho) J_0(k\rho') +$$

обе на 1° ам на 2°

$$+ (2\pi)^2 \int_{S_1} d\rho\,\rho \int_{S_2} d\rho'\rho'\, \delta_1(\rho)\delta_2(\rho') \int dk\, e^{-kL} J_0(k\rho) J_0(k\rho')$$

$$\frac{1}{M_s}\mathcal{B}_1 = (\vec{m}\cdot\vec{n})_1 = -m_z(\rho), \quad \frac{1}{M_s}\mathcal{B}_2 = (\vec{m}\cdot\vec{n})_2 = m_z(\rho)$$

$$W_m = (2\pi)^2 M_s^2 \int_0^R d\rho\,\rho \int_0^R d\rho'\rho'\, m_z(\rho) m_z(\rho') \int_0^\infty dk \left[1 - e^{-kL}\right] J_0(k\rho) J_0(k\rho')$$

$\rho/k \to \rho' \in [0,1]$

$$w_m = \frac{1}{M_s^2 V} W_m = \frac{4\pi}{\beta} \int_0^1 d\rho\,\rho \int_0^1 d\rho'\rho'\, m_z(\rho) m_z(\rho') \int_0^\infty dx \left[1 - e^{-\beta x}\right] J_0(\rho x) J_0(\rho' x)$$

Можно ввести $I_x(x) = \int_0^1 d\rho\,\rho\, m_z(\rho) J_0(\rho x)$, тогда (см 23/III 00 г.)

$$w_m(x) = \frac{4\pi}{\beta} \int_0^\infty dx \left[1 - e^{-\beta x}\right] I_x^2(x)$$ — интеграл magnetostat. energy

new - vortex - соответ. φ-ка для $m_z(\rho)$

$$I_x(x) = \int_0^1 d\rho\,\rho\, m_z(\rho, x) J_0(\rho x) = \int_0^1 d\rho\,\rho\, j_0(x\rho) J_0(\rho x), \quad j_0(z) = \frac{\sin z}{z}$$ — сферич. ф. Бесселя,

$$\Rightarrow I_x(x) = \frac{1}{x} \int_0^1 d\rho \sin(x\rho)$$

$$W_{tot}(x) = W_{ex}(x) +$$

$$\frac{\sin x}{x} = \int_0^{\pi/2} J_0(x\cos\theta)\cos\theta\, d\theta$$

$W_{tot}(x)$ можно бы
даже меньше $W_{s.d.}$
Такая вихревая п
неправильно(!) перекрыт
Т.е. перекрыт $\perp$ s.d.
А не ФП-I как д

Escaneado con CamScanner

Escaneado con CamScanner

Date. 27. 04.

В приближении, уравнение на $m_\varphi \ll 1$ при $m_z \approx 1$ (тонкий new-vortex верно при $\rho \neq 0$ - вблизи его центра):

$$\frac{\partial^2 m_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial m_\varphi}{\partial \rho} + \left[-\frac{1}{\alpha} J(\rho) - \frac{1}{\rho^2}\right] m_\varphi(\rho) = 0$$

можно трактовать как уравнение на моду inclination of non-uniform state типа $m_\varphi \neq 0, m_\rho = 0$ (хотя ур-е на $m_\rho \neq 0$ тоже записать, но оно интегро-диф.) исходя из uniform L.S.d. state $m_z = 1$.

Его решение вблизи $\rho = 0$ и есть $m_\varphi = C J_1(x\rho)$, $x^2 = -\frac{1}{\alpha} J(0) > 0$.

А $m_z(\rho) \cong 1 - \frac{1}{2} m_\varphi^2 = 1 - \frac{1}{2} C^2 \frac{1}{4} x^2 \rho^2$, что и требовалось бы $m_z(\rho) = \frac{\sin x'\rho}{x'\rho}$ vortex.

где в силу неопределенности C, x' уже параметр решения.

Видимо ось R_n при которой ФП-II типа L.S.d. - new-vortex,

т.е. R_n ($L = \text{const}$) можно рассм. как границу стабильности of new-vortex и определить из ур-я $W_{L.S.d.}(L) = W_{n.v.}$ (?)

Попробуем найти R_n by trial function. $m_z(\rho) = \frac{\sin x'\rho}{x'\rho}$

$m_z(\rho) = \frac{\sin x'\rho}{x'\rho} = \left(1 - \frac{1}{3!} x'^2\rho^2 + \frac{1}{5!}(x'\rho)^4 - \dots\right)$, $\rho \in [0,1]$, а x' вблизи ФП-II: $x' \approx 1$

поэтому грубо $m_z(\rho) = 1 - \frac{1}{6} x'^2 \rho^2$, $m_\varphi(\rho) = \frac{1}{\sqrt{3}} x'\rho$

$$\rightarrow W_{ex}(x') = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \int_0^1 d\rho\,\rho \left[(m_{z,\rho})^2 + (m_{\varphi,\rho})^2 + \frac{1}{\rho^2} m_\varphi^2\right] =$$

$$= \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \int_0^1 d\rho\,\rho \left[\left(-\frac{1}{3} x'^2 \rho\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} x'\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} x'\rho\right)^2\right] =$$

$$= \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \int_0^1 d\rho\,\rho \left[\frac{1}{9} x'^4 \rho^2 + \frac{2}{3} x'^2\right] = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \left[\frac{1}{9} x'^4 \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} x'^2 \cdot \frac{1}{2}\right] =$$

$$= \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{1}{3} x'^2 \left[\frac{1}{12} x'^2 + 1\right],$$ заменим $x' \to x$. x' немного, см. 19/2.

$$\rightarrow I_x(x) = \int_0^1 d\rho\,\rho\, m_z(\rho) J_0(x\rho) = \int_0^1 d\rho\,\rho \left[1 - \frac{1}{6} x^2 \rho^2\right] J_0(\rho x) =$$

$$= \int_0^1 d\rho\,\rho\, J_0(\rho x) - \frac{1}{6} x^2 \int_0^1 d\rho\,\rho^3 J_0(\rho x) = \frac{1}{x} J_1(x) - \frac{1}{6} x^2 \times$$

$$\times \left[\frac{2^3 \Gamma(2)}{x^4 \Gamma(-1)}_{\to\infty} + \frac{1}{x^3}\left\{2 J_0(x) S_{2,-1}(x) - J_{-1}(x) S_{3,0}(x)\right\}\right], \quad |\Gamma(-1) = \infty|$$

↑ надо посчитать

$$[\dots] = \frac{1}{x^3}\left\{2 J_0(x) S_{2,-1}(x) + J_1(x) S_{3,0}(x)\right\}$$

$$\rightarrow W_m(x) = \frac{4\pi}{\beta} \int_0^\infty dx \left[1 - e^{-\beta x}\right] I_x^2(x) = \frac{4\pi}{\beta} \int dx \left[1 - e^{-\beta x}\right] \otimes$$

$$\otimes \left[\frac{1}{x} J_1(x) - \frac{1}{6} x^2 \frac{1}{x^3}\left\{2 J_0(x) S_{2,-1}(x) + J_1(x) S_{3,0}(x)\right\}\right]^2,$$

где $S_{\mu,\nu}(x)$ - функции Ломмеля (р. 1001 Гр.-Р.)

Escaneado con CamScanner

Date.

$S_{\mu,\nu}'(x) = -\frac{\nu}{x} S_{\mu,\nu}(x) + (\mu+\nu-1) S_{\mu-1,\nu-1}(x)$, $S_{3,0} = 2 S_{2,-1}$.

Также $S_{2,-1} = S_{2,1}$. $S_{3,0}(x) = x^2 - 4 S_{1,0}(x) = x^2 - 4x O_0(x) = x^2 - 4$.

$2 J_0 S_{2,-1} + J_1 S_{3,0} = S_{3,0}(J_0 + J_1) = (x^2-4)(J_0+J_1)$

$\int_0^1 d\rho \rho^3 J_0(\beta x) = \frac{1}{x^3}(x^2-4)[J_0(x) + J_1(x)]$, $x>0$. — не очень хорошо при $x \to 0$.

$W_m(x) = \frac{4\pi}{\beta} \int_0^\infty dx \left[1-e^{-\beta x}\right] \frac{1}{x^2} \left[J_1(x) - \frac{1}{6}\frac{x^2}{x^2}(x^2-4)[J_0(x)+J_1(x)]\right]^2$ — ?

Надо в квадратичном приближении по x:

$\Rightarrow W_{ex}(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 x^2$

$\Rightarrow W_m(x) = \frac{4\pi}{\beta} \int dx \left[1-e^{-\beta x}\right] \left[\frac{J_1^2(x)}{x^2} - 2\frac{J_1(x)}{x}\frac{1}{6}x^2 \int_0^1 d\rho \rho^3 J_0(\rho x)\right] =$

$= \frac{4\pi}{\beta} \int dx \left[1-e^{-\beta x}\right] \frac{J_1^2(x)}{x^2} - \frac{4\pi}{3}\frac{1}{\beta} x^2 \int_0^\infty dx \left[1-e^{-\beta x}\right] \frac{J_1(x)}{x} \int_0^1 d\rho \rho^3 J_0(\rho x) =$

$= W_m(0) - \frac{4\pi}{3}\frac{x^2}{\beta} \int_0^\infty dx \int_0^1 d\rho \rho^3 \left[1-e^{-\beta x}\right] \frac{J_1(x)}{x} J_0(\rho x)$

Отметим, что $J(\beta) = -\frac{4\pi}{\beta} \int_0^\infty dx \left[1-e^{-\beta x}\right] \frac{J_1(x)}{x} J_0(\beta x)$ а также см. 23/IV.

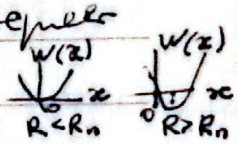
$W_m(x) = W_m(0) + \frac{1}{3} x^2 \int_0^1 d\rho \rho^3 J(\rho)$, $J(\beta) < 0$. $\left(\frac{1-e^{-\beta x}}{\beta x} = 1 - f(\beta x)\right)$

$W(x) = W(0) + \frac{1}{3} x^2 \left[\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 + \int_0^1 d\rho \rho^3 J(\rho)\right]$

← функция только β.

Ясно, что ур-е $\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 = -\int_0^1 d\rho \rho^3 J(\beta,\rho)$ и есть искомое ур-е на R_n — границу собственности new-vortex state (или $\perp$ s.d. state) — ФП II. (*)

Для $R < R_n$ реализуется 1-s.a. state, которое при R_n теряет собственность и при $R > R_n$ реализуется new-vortex state.



В принципе $W(x) = W(0) + \frac{1}{2}Ax^2 + \frac{1}{4}Bx^4$ — разложение Ландау.

Чтобы найти B — надо взять $m_3(\beta)$ с точн. x^4, а $m_4(\beta)$ с точн. x^3, см. 19/X

Известно, что при $\beta \to \infty$, $J(\beta,\rho) \to -4\pi$ и $\left(\frac{R_0}{R_n}\right)^2 = \pi$, $\left(\frac{R_n}{R_0}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

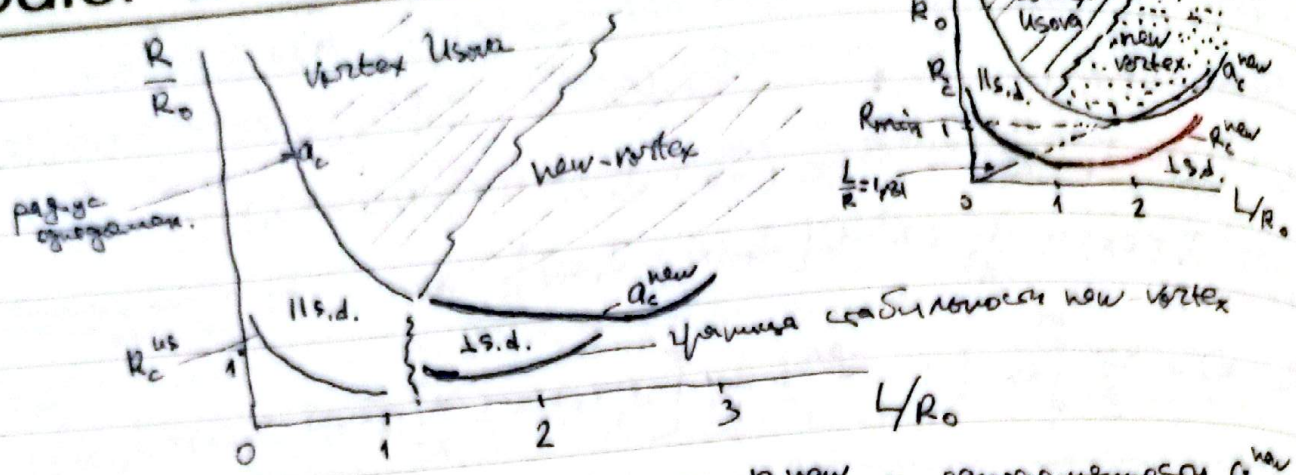
$\beta = \frac{L}{R} = \left(\frac{L}{R_0}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)$, когда (*) можно расм. как ур-е на R_n при $L = \text{const}$.

Но нужно сравнить с границей собственности vortex. Условие $\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 = 4\pi \int_0^\infty \frac{dt}{t} f(\beta t) J_1^2(t)$ как функционал от „β". $\left(\frac{R}{R_0}\right) = \left(\frac{L}{R_0}\right)\frac{1}{\beta}$.

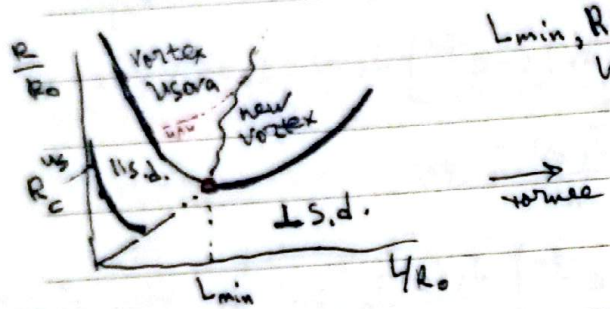
уточнено при x^4-возр.

См. R-L МФД 26/IX, 19/X и 22-23/X.

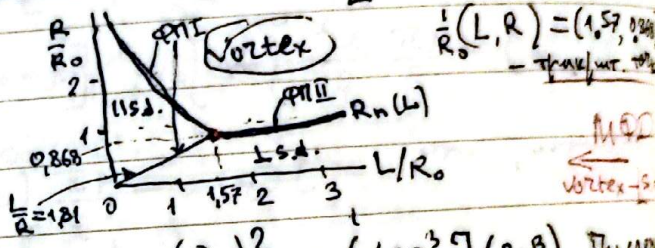
Date. 28. 04.



Что будет за радиус стабильности R_c^{new} и однодомности a_c^{new} разница при ФП-II?, когда в т. перехода энергии равны и каждая из фаз неустойчива в своей области.



L_{min}, R_{min} — можно ли определить как пересечение $R_n(L)$ и $\frac{R}{L} = 1{,}81$?



28/IV Построим кривую $R_n(L)$ из $\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 = -\int_0^1 d\beta\beta^3 J(\beta,\beta)$

пересечение с $L/R = 1{,}81$

L/R_0	0,5	1,0	1,5	1,57	1,6	1,7	1,85	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,5
R_n/R_0	0,737	0,806	0,861	0,868	0,871	0,881	0,895	0,908	0,924	0,941	0,956	0,970	0,984	1,017
Core B/R_0 – Usova (24/IX 001.)	0,697	0,795	0,876					0,946					1,05	

$\Lambda(\beta) = -\int_0^1 d\beta\beta^3 J(\beta,\beta)$, $\frac{R_n}{R_0} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda(\beta)}}$, $\frac{R_n}{R_0} = \frac{L}{R_0}\frac{1}{\beta}$, т.е.

надо решить ур-е ($L/R_0 = const$) $\frac{L}{R_0}\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda(\beta)}}$, его корень β_n даст $\frac{R_n}{R_0} = \left(\frac{L}{R_0}\right)\frac{1}{\beta_n}$.

R_n ($L/R_0 > 1{,}57$) немного меньше, чем радиус „core" Усова „B/R_0".

→ При $\frac{L}{R_0} > 1{,}57$ будет ФП-II с увеличением R/R_0, из vortex-new to ⊥-s.d. state.

→ при $\frac{L}{R_0} < 1{,}57$ будет ФП-I from vortex to II s.d. state

→ Vortex Усова хорош лишь при $\frac{L}{R_0} \lesssim 1$, тогда и линия потери двухустойчивости $R_c(L)$ исчезнет.

2010.

Завершение Seagate - анкет, Письма. 29/IV

Написание статьи SW-wires. 1/V

Приглашение для Seagate-Seminar и ст. SW-wires. 2/V

3/V

Стабильность vortex'а при H=0 (с Меловым)

5-6/III и 18/III 011 г. Я проверил расчет Мелова по $\frac{\partial^2 W}{\partial a^2}$ вычислению для conformal-mode $z' = \frac{z-a}{1-az}$ и нашел, что $W''_{aa} > 0$ для всех R, L (учитывая поверхн. заряды, exchange не дает вклада). Т.е. conformal mode исходя из vortex Усова не дает потери устойчивости vortex state из-за изменения R, L.

Причина видимо, в большом вкладе > 0 от $W_m^{бок}$ и недостаточно большом < 0 вкладе $W_m^{торц}$. Угол $W_m^{зар}$ еще больше способствует $W''_{aa} > 0$.

Неплохо бы изменить $m_z(\rho)$ так m_z / ρ, чтобы резко уменьшить $W_m^{торц}$, оставив $m_z(\rho)$ аксиально симметричным.

Пусть: •1) рассм. возмущение $\vec{m}$ vortex'а Усова (радиальная несимм.)
•2) рассм. conformal map. vortex'а Усова, так чтобы $|w|^2$ зависело лишь от $|z|^2$
•3) рассм. новый vortex by trial func. типа $\frac{\sin x\rho}{x\rho}$.

Насколько похожи vortex-new с $m_z(\rho) = \frac{\sin x\rho}{x\rho}$ и $m_z = \frac{b^2-\rho^2}{b^2+\rho^2}$ Усова?

При $\rho \to 0$: $m_z(\rho) = \frac{\sin x\rho}{x\rho} = 1 - \frac{1}{6}x^2\rho^2 + \frac{1}{5!}x^4\rho^4 - \dots$

$m_z^{us}(\rho) = \frac{1-(\rho/b)^2}{1+(\rho/b)^2} = \left(1-\frac{\rho^2}{b^2}\right)\left(1-\frac{\rho^2}{b^2}+\frac{\rho^4}{b^4}-\dots\right) = 1 - 2\frac{\rho^2}{b^2} + 2\frac{\rho^4}{b^4} - \dots$

Если считать $\frac{1}{6}x^2 = \frac{2}{b^2}$, $x^2 = \frac{12}{b^2}$, то они совпадают с точн. до ρ^2.
Совп. до ρ^4 тогда $m_z(\rho)$ падает чуть $\downarrow$, чем $m_z^{us}(\rho)$.

Уравнение для $\Theta(\rho)$ - vortex'а

5/V

→ Вернемся к общей системе ур-й Брауна от 24/IV для new-vortex solution. И перейдем там по "z" и пусть $m_\rho = 0$ (см. 25/IV).

$\hat{\rho}$: $m_\rho\left[\lambda\nabla^2 m_z + \int d\rho' \rho' g_{zz}(\rho,\rho') m_z(\rho')\right] = m_z\left[\lambda\nabla^2 m_\rho - \frac{\lambda}{\rho^2} m_\rho\right]$

→ При $\rho = \frac{L}{R} \to 0$ $g_{zz}(\rho,\rho') = -\frac{4\pi}{\rho}\delta(\rho-\rho')$ и это нелин. интегр.-диф. ур. упрощается

$m_\rho\left[\nabla^2 m_z - \frac{4\pi}{\lambda} m_z(\rho)\right] = m_z\left[\nabla^2 m_\rho - \frac{1}{\rho^2} m_\rho\right]$, $m_z^2 + m_\rho^2 = 1$.

Можно перейти к одной переменной $\Theta(\rho)$, $m_z(\rho) = \cos\Theta(\rho)$, $m_\rho(\rho) = \sin\Theta(\rho)$

Escaneado con CamScanner

New - Vortex solution

Date. . .

$$m_\varphi \nabla^2 m_z - m_z \nabla^2 m_\varphi = \left(\frac{4\pi}{\alpha} - \frac{1}{\rho^2}\right) m_z m_\varphi \quad \text{при } \rho \to 0, \qquad m_z^2 + m_\varphi^2 = 1.$$

2. Грина: $\int_V d^3r \left[m_\varphi \nabla^2 m_z - m_z \nabla^2 m_\varphi \right] = \oint_S dS \left[m_\varphi \frac{\partial m_z}{\partial n} - m_z \frac{\partial m_\varphi}{\partial n} \right] = 0$ (если бы m_z и m_φ были независимы)

$$m_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho \frac{\partial m_z}{\partial \rho}\right] - m_z \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho \frac{\partial m_\varphi}{\partial \rho}\right] = m_\varphi \left[\frac{\partial^2 m_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial m_z}{\partial \rho}\right] -$$

$$- m_z \left[\frac{\partial^2 m_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial m_\varphi}{\partial \rho}\right]$$

$$\nabla^2 m_z = \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\right] \cos\theta(\rho) = -\frac{1}{\rho}\left[\sin\theta \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \rho \sin\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \rho \cos\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial \rho}\right)^2\right]$$

$$\nabla^2 m_\varphi = \frac{1}{\rho}\left[\cos\theta \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \rho \cos\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} - \rho \sin\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial \rho}\right)^2\right]$$

$$\sin\theta \nabla^2 m_z - \cos\theta \nabla^2 m_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \theta}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} = -\nabla^2 \theta(\rho)$$

$$\nabla^2 \theta(\rho) = \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{4\pi}{\alpha}\right) \sin\theta\cos\theta \quad \text{— конечно вблизи } \rho = 0 \ \ \theta \ll 1$$

получим $\nabla^2 \theta = \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{4\pi}{\alpha}\right)\theta$ или $\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \left(\frac{4\pi}{\alpha} - \frac{1}{\rho^2}\right)\theta = 0 \Rightarrow$

(верно) $\Rightarrow \theta(\rho) = C J_1(\varkappa\rho)$, $\varkappa^2 = \frac{4\pi}{\alpha}$

Если отказаться от предела $\beta_R \to 0$, но более точно:

$$\nabla^2 \theta(\rho) = \left[\frac{\cos\theta}{\rho^2} + \frac{1}{2}\int_0^\infty d\rho' \rho' g_{zz}(\rho, \rho') \cos\theta(\rho')\right] \sin\theta$$

— основное ур-е Брауна для „vortex" с $m_z = 0$.

$\varkappa^2 \neq 0$ если взят это ур-е от ур. Хоба-Нельсона

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \left(\varkappa^2 - \frac{1}{\rho^2}\right)\sin\theta\cos\theta = 0$$ — ур-е на $\theta(\rho)$ при $\rho \to 0$. $m_z = \cos\theta(\rho)$.

$$\varkappa^2 \rho^2 = \frac{4\pi}{\alpha}\rho^2 = 4\pi \frac{1}{R_0^2}\rho^2 = 4\pi \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \left(\frac{\rho}{R}\right)^2$$ — определяет тип решения.

Далеко от $\rho = 0$ $\varkappa^2\rho^2 \gg 1$ даже для $R \sim R_0$ и ур-е для $\theta(\rho)$ переходит в

А вблизи $\rho = 0$ решение известно: $\theta(\rho) = C J_1(\varkappa\rho)$, $\theta(0) = 0$

→ Гранич. условия $\theta(0) = 0$, $\left(\frac{\partial \theta}{\partial \rho}\right)_{\rho = R} = 0$ или $\theta(\rho) = \pi/2$ вблизи $\rho = R$.

Далеко от $\rho = 0$ $\varkappa^2\rho^2 \gg 1$ (что невозможно было у Хоба'93, т.к. там $\varkappa^2 = 0$)

получим: $\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \varkappa^2 \sin\theta\cos\theta = 0.$

Вот если бы решение этого ур-я сшить с $\theta(\rho) = C J_1(\varkappa\rho)$.

new-vortex далеко от $\rho = 0$

$$\nabla^2 \theta(\rho) + \varkappa^2 \sin\theta\cos\theta = 0$$ — это 2D sin-Gordon equation

или ур-е типа sin-Gordon $\left(\partial_x^2 - \partial_t^2\right)\theta - \sin\theta = 0$ но с мнимым временем.

См. paper J. Castro et al., PRB 60, 10271 (1999).

$$\nabla^2 \theta + \frac{\varkappa^2}{2}\sin 2\theta = 0$$, $\varkappa$ можно сократить в ρ: $\varkappa\rho \to \rho$.

$$\nabla^2 \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta = 0, \quad \theta = F(\rho) = F(x^2 + y^2).$$ или $\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \frac{1}{2}\sin 2\theta$

А что даст моя trial f. $\cos\theta(\rho) = m_z = \frac{\sin \varkappa\rho}{\varkappa\rho} \to \frac{\sin\rho}{\rho}$

$$\theta(\rho) = \arccos\left(\frac{\sin\rho}{\rho}\right), \quad \frac{\partial \theta}{\partial \rho} = \frac{(-1)}{\sqrt{1 - \cos^2\theta}}\left(-\frac{1}{\rho^2}\sin\rho + \frac{1}{\rho}\cos\rho\right) = \frac{(-1)}{\sin\theta}\left(-\frac{\sin\rho}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\cos\rho\right)$$

Escaneado con CamScanner

cotθ.

$\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho^2} = \frac{1}{\sin^2\theta}\cos\theta\left[\frac{1}{\rho^2}\sin\rho - \frac{1}{\rho}\cos\rho - \frac{\sin\rho}{\rho}\right]$ = indeps.

$\theta' + \frac{1}{\rho}\theta' + \frac{1}{2}\sin 2\theta = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\left[\frac{2}{\rho^2}\cos\theta - \frac{2}{\rho^2}\cos\rho - \cos\theta\right] +$

$+\frac{1}{\rho}\frac{(-1)}{\sin\theta}\left[-\frac{1}{\rho}\cos\theta + \frac{1}{\rho}\cos\rho\right] + \sin\theta\cos\theta = \frac{2}{\rho^2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}(\cos\theta - \cos\rho) -$

$-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{\sin\theta}(\cos\theta - \cos\rho) + \sin\theta\cos\theta = ?$

$\frac{1}{\rho^2}\theta' = \frac{1}{\sin^2\theta}\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\left(-\frac{1}{\rho}\cos\theta + \frac{1}{\rho}\cos\rho\right) - \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{2}{\rho^2}\cos\theta - \frac{2}{\rho^2}\cos\rho - \cos\theta\right]$

$\theta'' + \frac{1}{\rho}\theta' + \sin\theta\cos\theta = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\left(-\frac{1}{\rho}\right)(\cos\theta - \cos\rho)\theta' - \frac{2}{\rho^2}\frac{1}{\sin\theta}(\cos\theta - \cos\rho) +$

$+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\rho}\theta' + \sin\theta\cos\theta, \quad \theta' = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{(-1)}{\rho}(\cos\theta - \cos\rho)$

Se resolve, cuando $\cos\theta(\rho) = \frac{\sin\rho}{\rho}$ Suma de pendientes.

A dos $\cos\theta(\rho) = 1 - \gamma\rho^2$ suma suma de pendientes? 6/x

$-2\gamma + \frac{1}{\rho}[-2\gamma\rho] + (1-\gamma\rho^2)\sin\theta = 0$

↑ reberna

$\theta(\rho) = \arccos(1-\gamma\rho^2), \quad -\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial\rho} = -2\gamma\rho, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\rho} = 2\gamma\frac{\rho}{\sin\theta}$

$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho^2} = \frac{1}{\sin\theta} + \rho\frac{(-1)}{\sin^2\theta}\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial\rho} = \frac{1}{\sin\theta} - \rho\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{2\gamma\rho}{\sin\theta}$

$\frac{2\gamma}{\sin\theta} - (2\gamma)^2\rho^2\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{1}{\rho}\frac{2\gamma\rho}{\sin\theta} + \cos\theta\cdot\sin\theta = 0$

$\frac{4\gamma}{\sin\theta}\left[1 - \gamma\rho^2\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right] + \cos\theta\sin\theta = 0$

$4\gamma\left[1 - \cos^2\theta - \gamma\rho^2\cos\theta\right] + \cos\theta\sin^4\theta = 0$

$4\gamma\left[1 - (1-\gamma\rho^2)^2 - \gamma\rho^2(1-\gamma\rho^2)\right] + (1-\gamma\rho^2)\left[1-(1-\gamma\rho^2)^2\right]^2 = 0$

$4\gamma^2\rho^2 + (1-\gamma\rho^2)\left[\gamma\rho^2(2-\gamma\rho^2)\right]^2 = 0$

$\gamma^2\rho^2\left[4 + (1-\gamma\rho^2)\rho^2(2-\gamma\rho^2)^2\right] = 0$ Bien, nunca ocurre $\rho \to 0$ (no debe ocurrir prácticamente) cuando $\rho^2 \to 1$ (cuando)

Y hacemos acaso $\cos\theta(\rho) = f(\rho)$, $\frac{\partial\theta}{\partial\rho} = -\frac{1}{\sin\theta}f'$, $\theta' = -\frac{1}{\sin\theta}f'$

$\theta'' = \frac{1}{\sin^2\theta}\cos\theta\cdot f'\theta' - \frac{1}{\sin\theta}f''$

$\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}f'\theta' - \frac{1}{\sin\theta}f'' + \frac{1}{\rho}\frac{(-1)}{\sin\theta}f' + \sin\theta\cos\theta = 0$

$-\frac{1}{\sin\theta}f'' - (f')^2\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} - \frac{1}{\rho}\frac{1}{\sin\theta}f' + \sin\theta\cos\theta = 0$

$-\sin^2\theta\cdot f'' - (f')^2\cos\theta - \frac{1}{\rho}\sin^2\theta\cdot f' + \sin^4\theta\cos\theta = 0$

$-\sin^2\theta\left[f'' + \frac{1}{\rho}f'\right] - (f')^2\cos\theta + \sin^4\theta\cos\theta = 0$ →

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$-(1-f^2)\left[f'' + \frac{1}{\rho} f'\right] - (f')^2 f + f\left[1-f^2\right]^2 = 0$ — сложновато

($f_0 = 1$ обр. решение, это $\theta_0(\rho) = 0$ — $\perp$ s.d. state.
$f_0 = 0$ такое решение, это $\theta_0(\rho) = \pi/2$ — $\parallel$ s.d. state.

→ Но есть еще и нетривиальное решение. $\cos\theta(\rho) = f(\rho)$ — new vortex.

Можно нач. задачу $\theta(\rho) = \gamma\rho$, $\frac{\partial\theta}{\partial\rho} = \gamma$

$\frac{1}{\rho}\gamma + \sin\gamma\rho \cdot \cos\gamma\rho = 0$ — много.

$\sin\theta(\rho) = \gamma\rho \rightarrow \frac{\partial\theta}{\partial\rho} = \frac{1}{\cos\theta}\gamma$, $\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho^2} = -\frac{1}{\cos^2\theta}(-\sin\theta)\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\cdot\gamma = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\gamma\frac{\gamma}{\cos\theta}$

$\frac{\gamma^2\sin\theta}{\cos^3\theta} + \frac{1}{\rho}\frac{\gamma}{\cos\theta} + \sin\theta\cos\theta = 0$.

$\frac{\gamma}{\cos\theta}\left[\frac{\gamma\sin\theta}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\rho}\right] + \sin\theta\cos\theta = 0$

$\frac{\gamma}{\rho}\left[\gamma\rho\sin\theta + \cos^2\theta\right] + \sin\theta\cos^4\theta = 0$, $\frac{\gamma}{\rho} + \gamma\rho\left[1-\gamma^2\rho^2\right]^2 = 0$ —

— совсем много, а ведь это почти vortex условия (точно $\gamma=0$ очевидно). ($\cos^2\theta \to 1$)

→ Для $\theta(\rho)=\gamma\rho$ и $\sin\theta(\rho)=\gamma\rho$ — много похожи, это неудивительно при $\rho\to 0$, т.к. исходное $\theta'' + \frac{1}{\rho}\theta' + x^2\sin\theta\cos\theta = 0$ верно далеко от $\rho=0$.

→ Решение by Voronov, JETP-83 при $\omega=0$:

$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\theta_0}{dr}\right) - \sin\theta_0\cos\theta_0\left(\frac{\nu^2}{r^2} + \frac{1}{\ell_0^2}\right) = 0$

$\operatorname{tg}\frac{\theta_0(r)}{2} = \frac{2}{(|\nu|-1)!}\left(\frac{k_0 R}{2}\right)^{|\nu|} K_\nu(k_0 r)$, $k_0 = \frac{1}{\ell_0}$, R-радиус сопла, $m_z(r=R)=0$

при $k_0 r \ll 1$ $\operatorname{tg}\frac{\theta_0(r)}{2} = \left(\frac{R}{r}\right)^\nu$ — при $\nu=1$ дает $m_z(r) = \cos\theta_0(r) = -\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2}$ как у "core" условия.

$\nabla^2\theta_0 - \left(\frac{1}{\ell_0^2} + \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)\sin\theta_0\cos\theta_0 = 0$, $\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\cdot\right)$

У нас при $\rho\to 0$: $\nabla^2\theta + \left(\varkappa^2 - \frac{1}{\rho^2}\right)\sin\theta\cos\theta = 0$

Ур-я совпадут при $\nu=1$, $\varkappa^2 = -\frac{1}{\ell_0^2}$ или $\varkappa = ik_0 = i\frac{1}{\ell_0}$

При $\varkappa^2 = 0$ - решение известно точно, это $\operatorname{tg}\frac{\theta(\rho)}{2} = R/\rho$ → решение

Но $\varkappa^2 R^2 = 4\pi\left(\frac{R}{R_0}\right)^2$ можно было бы провести ТВ как у Kocevar'90, но $(\varkappa R)^2$ реальное не есть $\ll 1$.

$\operatorname{tg}\frac{\theta_0(\rho)}{2} = k_0 R K_1(k_0\rho)$, $k_0 = -i\varkappa$. $K_1(z) = \frac{\pi}{2}i^2\left[J_1(iz) + iN_1(iz)\right]$

$K_1(i\varkappa) = -\frac{\pi}{2}\left[J_1(+\varkappa) + iN_1(\varkappa)\right] = -\frac{\pi}{2}\left[J_1(\varkappa) + iN_1(\varkappa)\right]$

$\operatorname{tg}\frac{\theta_0(\rho)}{2} = -i\varkappa R K_1(-i\varkappa\rho) = i\varkappa R\frac{\pi}{2}\left[J_1(\varkappa\rho) + iN_1(\varkappa\rho)\right]$ — комплексный!

Escaneado con CamScanner

Date.

При $k_0\rho \ll 1$ $\quad K_1(k_0\rho) = \dots \qquad K_1(z) = -K_0'(z)$

$$K_0(z) = -I_0(z)\ln\frac{z}{2} + \sum_{k=0} \frac{\psi(k+1)}{2^{2k}(k!)^2} z^{2k} = -I_0(z)\ln\frac{z}{2} + \psi(1) + \frac{\psi(2)}{4\cdot 1!}z^2 + \dots$$

$$-K_1(z) = K_0'(z) = -I_0'(z)\ln\frac{z}{2} - I_0(z)\frac{2}{z}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\psi(2)z =$$

$$= -\left[\frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^3\frac{1}{2}\right]\ln\frac{z}{2} - \frac{1}{z}\left[1 + \left(\frac{z}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\psi(2)z$$

$$K_1(z) = \frac{z}{2}\ln\frac{z}{2} + \frac{1}{z} + O(z) = \frac{1}{z} + \frac{z}{2}\ln\frac{z}{2} + \left[\frac{-1}{2}\psi(2) + \frac{1}{4}\right]z$$

по Абр.-Стиган дают $K_0(z) = -\left\{\ln\frac{z}{2} + \gamma\right\} I_0(z) + \frac{1}{4}z^2 + O(z^4) =$

$$= -\left\{\ln\frac{z}{2} + \gamma\right\}\left[1 + \frac{z^2}{4} + O(z^4)\right] + \frac{1}{4}z^2 + O(z^4)$$

$$-K_1(z) = K_0'(z) = -\frac{1}{z}\left[1 + \frac{z^2}{4}\right] - \left\{\ln\frac{z}{2} + \gamma\right\}\frac{1}{2}z + \frac{z}{2}$$

$$K_1(z) = \frac{1}{z} + \frac{z}{2}\ln\frac{z}{2} + \left[\frac{1}{4} + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}\right]z + O(z^3\ln z)$$

$$K_1(k_0\rho) = \frac{1}{k_0\rho} + \frac{1}{2}k_0\rho\ln\left(\frac{k_0\rho}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)k_0\rho + \dots$$

↑ это тоже нужно заменить $k_0 \to -ix$

Для $k_0\rho \gg 1$: $\quad K_1(z) \underset{|z|\gg 1}{=} \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}\left[1 + \frac{3}{8}\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]$

$$K_1(k_0\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_0\rho}}\, e^{-k_0\rho}$$ и замена $k_0 \to -ix$ приведет к комплексной $\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}$,

→ т.е. решение Vatonovaïa с $\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2} \sim k_0 K_1(k\rho)$ неприводимо с $x^2 = -k_0^2 > 0$ ($k_0 = ix$) ни при каких $k_0\rho$. (x – вещест.)

Нельзя как решать осн. (β≪1) ур.: $\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + \left(x^2 - \frac{1}{\rho^2}\right)\sin\theta\cos\theta = 0$ new-vortex с $\beta \ll 1$

в достаточно широкой области $\rho \in [0, R]$. Лишь вблизи $\rho = 0$ $\theta(\rho) = CJ_1(x\rho)$

Да вблизи $\rho = R$ $\quad m_z(\rho) = \cos\theta(\rho) = \frac{c}{\varkappa R}\operatorname{ch}\varkappa(\rho - R)$ на основе 23/IV.

$\frac{1}{l_0^2} > 0$ соответ. анизотропии ОЛН, а $\varkappa^2 = -\frac{1}{l_0^2} > 0$ соотв. ПЛН-ху.

Но ПЛН – уравнение для θ_0 есть в Ivanov LTP '95.

$$\rho^2\theta'' + \rho\theta' + (\varkappa^2\rho^2 - 1)\sin\theta\cos\theta = 0 \quad \text{умн. на } \theta' \text{ и } \int_0^\infty d\rho\,(\dots)$$

$$\int_0^\infty d\rho\,\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right)\cdot\theta' + \int_0^\infty d\rho\,(\varkappa^2\rho^2 - 1)\sin\theta\cos\theta\cdot\theta' = 0$$

Следуя Иванов '95: $\int_0^\infty d\rho\,\rho\cos^2\theta = 1/2$, $\cos\theta(\rho=0) = \pm 1$ и $\theta(\rho=\infty) = \theta_0$ – направл. оси анизотр. вплоскости.

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$-(1-f^2)\left[f'' + \frac{1}{f}f'\right] - (f')^2 f + f\left[1-f^2\right]^2 = 0$ — самосогл.

$f_0 = 1$ абс. решение, это $\theta_0(\rho) = 0$ — 1 с.д. state

$f_0 = 0$ тривиальное решение, это $\theta_0(\rho) = \pi/2$ — II с.д. state

Но есть еще и неоднородное решение $\cos\theta(\rho) = f(\rho)$ — нас интер.

Можно найти аналитически $\theta(\rho) = \lambda\rho$, $\frac{\partial\theta}{\partial\rho} = \lambda$

$\frac{1}{\rho}\lambda + \sin(\lambda\rho)\cos(\lambda\rho) = 0$ — имеет.

$\sin\theta(\rho) = \lambda\rho \to \frac{\partial\theta}{\partial\rho} = \frac{1}{\cos\theta}\lambda$, $\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho^2} = -\frac{1}{\cos^2\theta}(-\sin\theta)\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\cdot\lambda =$

$= \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\lambda^2\frac{\lambda}{\cos\theta}$

$\frac{\lambda^2\sin\theta}{\cos^3\theta} + \frac{1}{\rho}\frac{\lambda}{\cos\theta} + \sin\theta\cos\theta = 0$.

$\frac{\lambda}{\cos\theta}\left[\frac{\lambda\sin\theta}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\rho}\right] + \sin\theta\cos\theta = 0$

$\frac{\lambda}{\rho}\left[\lambda\rho\sin\theta + \cos^2\theta\right] + \sin\theta\cos^4\theta = 0$, $\frac{\lambda}{\rho} + \lambda\rho\left[1-\lambda^2\rho^2\right]^2 = 0$.

— совсем много, а $\theta = \frac{\pi}{2}$ это имеет четную ветвь (имеет $\rho > 0$ сходится).

→ Дает $\theta(\rho) = \lambda\rho$ и $\sin\theta(\rho) = \lambda\rho$ — много неточно, это нужно $\rho \to 0$, т.к. неоднор. $\theta'' + \frac{1}{\rho}\theta' + \varkappa^2\sin\theta\cos\theta = 0$ дефект уравн. в $\rho = 0$

→ Решение by Vdovin, JETP-83 при $\omega = 0$:

$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\theta_0}{dr}\right) - \sin\theta_0\cos\theta_0\left(\frac{\nu^2}{r^2} + \frac{1}{\ell_0^2}\right) = 0$

$\operatorname{tg}\frac{\theta_0(r)}{2} = \frac{2}{(|\nu|-1)!}\left(\frac{k_0 R}{2}\right)^{|\nu|} K_\nu(k_0 r)$, $k_0 = \frac{1}{\ell_0}$, R-радиус ячейки $m_z(r=R) = 0$

При $k_0 r \ll 1$ $\operatorname{tg}\frac{\theta_0(r)}{2} = \left(\frac{r}{R}\right)^\nu$ — при $\nu = 1$ дает $m_z(r) = \cos\theta_0(r) = -\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2}$ — "core" vortex

$\nabla^2\theta_0 - \left(\frac{1}{\ell_0^2} + \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)\sin\theta_0\cos\theta_0 = 0$, $\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\cdot\right)$

У меня при $\rho \to 0$: $\nabla^2\theta + \left(\varkappa^2 - \frac{1}{\rho^2}\right)\sin\theta\cos\theta = 0$

Ур-я совпадут при $\nu = 1$, $\varkappa^2 = -\frac{1}{\ell_0^2}$ или $\varkappa = ik_0 = i\frac{1}{\ell_0}$

При $\varkappa^2 = 0$ - решение нулевое точно, это $\operatorname{tg}\frac{\theta(\rho)}{2} = R/\rho$ — профиль

Но $\varkappa^2 R^2 = 4\pi\left(\frac{R}{R_0}\right)^2$ можно было бы ожидать ТВ как у Kivelson'90, но $(\varkappa R)^2$ реальное на есть $\ll 1$.

$\operatorname{tg}\frac{\theta_0(\rho)}{2} = k_0 R\, K_1(k_0\rho)$, $k_0 = -i\varkappa$. $K_1(z) = \frac{\pi}{2}i^{-1}\left[J_1(iz) + iN_1(iz)\right]$

$K_1(ix) = -\frac{\pi}{2}\left[J_1(+x) + iN_1(x)\right] = -\frac{\pi}{2}\left[J_1(x) + iN_1(x)\right]$

$\operatorname{tg}\frac{\theta_0(\rho)}{2} = -i\varkappa R\, K_1(-i\varkappa\rho) = i\varkappa R\frac{\pi}{2}\left[J_1(\varkappa\rho) + iN_1(\varkappa\rho)\right]$ — комплексное

Escaneado con CamScanner

Date.

При $k_0\rho \ll 1$ $K_1(k_0\rho) = \dots$ $K_1(z) = -K_0'(z)$

$$K_0(z) = -I_0(z)\ln\frac{z}{2} + \sum_{k=0}\frac{\psi(k+1)}{2^{2k}(k!)^2}z^{2k} = -I_0(z)\ln\frac{z}{2} + \psi(1) + \frac{\psi(2)}{4\cdot 1!}z^2 + \dots$$

$$-K_1(z) = K_0'(z) = -I_0'(z)\ln\frac{z}{2} - I_0(z)\frac{2}{z}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\psi(2)z =$$

$$= -\left[\frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^3\frac{1}{2}\right]\ln\frac{z}{2} - \frac{1}{z}\left[1 + \left(\frac{z}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\psi(2)z$$

$$K_1(z) = \frac{z}{2}\ln\frac{z}{2} + \frac{1}{z} + O(z) = \frac{1}{z} + \frac{z}{2}\ln\frac{z}{2} + \left[\frac{(-1)}{2}\psi(2) + \frac{1}{4}\right]z$$

По индукции далее $K_0(z) = -\left\{\ln\frac{z}{2} + \gamma\right\}I_0(z) + \frac{1}{4}z^2 + O(z^4) =$

$$= -\left\{\ln\frac{z}{2} + \gamma\right\}\left[1 + \frac{z^2}{4} + O(z^4)\right] + \frac{1}{4}z^2 + O(z^4)$$

$$-K_1(z) = K_0'(z) = -\frac{1}{z}\left[1 + \frac{z^2}{4}\right] - \left\{\ln\frac{z}{2} + \gamma\right\}\frac{1}{2}z + \frac{z}{2}$$

$$K_1(z) = \frac{1}{z} + \frac{z}{2}\ln\frac{z}{2} + \left[\frac{1}{4} + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}\right]z + O(z^3\ln z)$$

$$K_1(k_0\rho) = \frac{1}{k_0\rho} + \frac{1}{2}k_0\rho\ln\left(\frac{k_0\rho}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)k_0\rho + \dots$$

↑ это тоже нужно заменой $k_0 \to -ix$

Для $k_0\rho \gg 1$: $K_1(z) \underset{|z|\gg 1}{=} \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}\left[1 + \frac{3}{8}\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]$

$K_1(k_0\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_0\rho}}e^{-k_0\rho}$ и замена $k_0 \to -ix$ приведет к комплексной $\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}$,

→ т.е. решение Vatonovaя с $\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2} \sim k_0K_1(k\rho)$ непригодно с $x^2 = -k_0^2 > 0$ ($k_0 = ix$) ни при каких $k_0\rho$. x – вещество.

Легко как решать осн. ур. ($\beta \ll 1$): $\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + \left(x^2 - \frac{1}{\rho^2}\right)\sin\theta\cos\theta = 0$ new-vortex $c\beta \ll 1$

в достаточно широкой области $\rho \in [0, R]$. Лишь вблизи $\rho = 0$ $\theta(\rho) = CJ_1(x\rho)$

Да вблизи $\rho = R$ $m_z(\rho) = \cos\theta(\rho) = \frac{c}{xR}\operatorname{ch}x(\rho - R)$ на основе 23/IV.

$\frac{1}{\ell_0^2} > 0$ соответ. анизотропии ОЛН, а $x^2 = -\frac{1}{\ell_0^2} > 0$ соотв. ПЛН-xy.

Но ПЛН – уравнение для θ_0 есть в Ivanov' LTP '95.

$$\rho^2\theta'' + \rho\theta' + (x^2\rho^2 - 1)\sin\theta\cos\theta = 0 \quad \text{умн. на } \theta' \text{ и } \int_0^\infty d\rho\,(\dots)$$

$$\int_0^\infty d\rho\,\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right)\cdot\theta' + \int_0^\infty d\rho\,(x^2\rho^2 - 1)\sin\theta\cos\theta\cdot\theta' = 0$$

Следуя Иванов' 95: $\int_0^\infty d\rho\,\rho\cos^2\theta = 1/2$, $\cos\theta(\rho = 0) = \pm 1$ и $\theta(\rho = \infty) = \theta_0$ – направл. оси анизотр. вдали от оси.

Escaneado con CamScanner

$\delta(\rho)$ → даст различие в свойствах Vortex Ueda и Anderson-Toner

Vortex Ueda имеет как θ_{us} и $\delta(\rho)$ из-за несовместимости

Date. . .

- 1) Сначала vortex Ueda достаточно хорошим решением и рассм. его радиальное возмущение $\delta(\rho)$: $\theta(\rho) = \theta_{us}(\rho) + \delta(\rho)$ по ρ – малое,
- 2) Решить осн. уравнение для non-vortex для $\theta(\rho)$ (хотя в пределе $\rho \ll 1$ уже полностью trial function)

(1) Ур-е Ueda собств. $\varkappa^2 = 0$: $\frac{\partial^2\theta_{us}}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta_{us}}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}\sin\theta_{us}\cdot\cos\theta_{us} = 0$.

Т.к. $\varkappa^2\rho^2 = 4\pi\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\left(\frac{\rho}{R}\right)^2$, $\varkappa^2\rho^2 \ll 1$ выйдет лишь при $\rho \ll R$ или $\frac{R_0}{R} \gg 1$.

Будем искать $\theta(\rho) = \theta_{us}(\rho) + (\varkappa R)^2\tilde{\delta}(\rho)$, считая $(\varkappa R)^2 \ll 1$. $\theta(\rho) = \theta_0(\rho) + \delta$, $\delta \sim \varkappa^2$, $\theta_0 \to \theta_{us}$

$$0 = \frac{\partial^2\theta}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + \left(\varkappa^2 - \frac{1}{\rho^2}\right)\sin\theta\cos\theta = \frac{\partial^2\theta_0}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta_0}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{2}\sin 2(\theta_0+\delta) +$$

$$+ \frac{\partial^2\delta}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\delta}{\partial\rho} + \varkappa^2\sin\theta_0\cos\theta_0 = \theta_0'' + \frac{1}{\rho}\theta_0' - \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{2}\left[\sin 2\theta_0\cos(\delta 2) + \cos 2\theta_0\sin 2\delta\right] +$$

$$+ \delta'' + \frac{1}{\rho}\delta' + \varkappa^2\sin\theta_0\cos\theta_0 = \underbrace{\left[\theta_0'' + \frac{1}{\rho}\theta_0' - \frac{1}{\rho^2}\sin\theta_0\cos\theta_0\right]}_{=0} - \frac{\cos 2\theta_0}{\rho^2}\delta +$$

$$+ \delta'' + \frac{1}{\rho}\delta' + \varkappa^2\sin\theta_0\cos\theta_0 = 0$$

$$\boxed{\delta'' + \frac{1}{\rho}\delta' - \frac{\cos 2\theta_0}{\rho^2}\delta = -\varkappa^2\sin\theta_0\cos\theta_0} \quad \text{– линеариз. ур-е.}$$

Однор. ур. $\delta'' + \frac{1}{\rho}\delta' - \frac{\cos 2\theta_0}{\rho^2}\delta = 0$ имеет решение $\delta(\rho) = \sin\theta_0(\rho)$

$$\delta'(\rho) = \cos\theta_0\frac{\partial\theta_0}{\partial\rho}, \quad \delta'' = -\sin\theta_0(\theta_0')^2 + \cos\theta_0\,\theta_0''$$

$$-\sin\theta_0(\theta_0')^2 + \cos\theta_0\,\theta_0'' + \frac{1}{\rho}\cos\theta_0\,\theta_0' - \frac{1}{\rho^2}\cos 2\theta_0\sin\theta_0 = 0$$

$$-\sin\theta_0(\theta_0')^2 + \cos\theta_0\left[\frac{1}{\rho^2}\sin\theta_0\cos\theta_0\right] - \frac{1}{\rho^2}\cos 2\theta_0\sin\theta_0 = 0$$

$$\sin\theta_0\left[-(\theta_0')^2 + \frac{1}{\rho^2}(\cos^2\theta_0 - \cos 2\theta_0)\right] = 0$$

$\sin\theta_0 \neq 0$, $-(\theta_0')^2 + \frac{1}{\rho^2}\sin^2\theta_0 = 0$, а по Abtullaev'99 (после $\int d\varphi\,\rho^2\frac{\partial\theta_0}{\partial\rho}(\ldots)$)

$(\nabla\theta_0)^2 = (\theta_0')^2 = \frac{1}{\rho^2}\sin^2\theta_0$ – общее свойство $\theta_0'' + \frac{1}{\rho}\theta_0' - \frac{1}{\rho^2}\sin\theta_0\cos\theta_0 = 0$

из $E \sim \int d^2\vec{\rho}\left[(\nabla\theta)^2 + \sin^2\theta(\nabla\Phi)^2\right]$, что-то вроде теоремы вириал. (см 9/2).

$\theta_0(\rho) = 2\operatorname{arctg}\frac{\rho}{b}$, $\frac{\partial\theta_0}{\partial\rho} = 2\frac{1/b}{1+\frac{\rho^2}{b^2}} = 2\frac{b}{b^2+\rho^2}$, $\sin\theta_0(\rho) = \frac{2b\rho}{b^2+\rho^2}$

и $\frac{\partial\theta_0}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho}\sin\theta_0(\rho)$ выполн. в области $\rho \leq b$, где решение насыщается (не изобрасит. как $\theta_0 = \pi/2$)

а) линеариз. ур. для $\delta(\rho)$ внутри „core" $\rho \leq b$ содержит правую часть – неоднородно.

б) –11– вне „core" $\theta_0(\rho) = \pi/2$: $\delta'' + \frac{1}{\rho}\delta' + \frac{1}{\rho^2}\delta = 0$, $\left(\frac{\partial\delta}{\partial\rho}\right)_R = 0$

$\rho^2\delta'' + \rho\delta' + \delta = 0$ – это ур-е Эйлера [Полянин, р. 145]

$(1-a)^2 - 4b = 0 - 4\cdot 1 = -4 < 0$, тогда решение с $\mu = \frac{1}{2}\sqrt{|-4|} = 1$:

Escaneado con CamScanner

Направен - возмущения к вихрю Усова

$\delta(\rho) = C_1 \sin(\ln \rho/R) + C_2 \cos(\ln \rho/R)$, $\delta(\rho=R) = C_2$

$\frac{\partial \delta}{\partial \rho} = C_1 \cos\ln\rho \cdot \frac{1}{\rho} - C_2 \sin\ln\rho \cdot \frac{1}{\rho}$; $\left(\frac{\partial \delta}{\partial \rho}\right)_{\rho=1} = C_1 = 0$

при $R=1$.

Поэтому для $\rho \geq b/R$ будет $\delta(\rho) = C_2 \cos(\ln\rho)$ — реш. вне „core"

а) внутри „core" $\rho \leq b$: $\delta'' + \frac{1}{\rho}\delta' - \frac{1}{\rho^2}\cos 2\theta_0(\rho)\,\delta = -\frac{\varkappa^2}{2}\sin 2\theta_0(\rho)$ — неоднор. ур.

$\sin\theta_0\cos\theta_0 = \frac{2b\rho}{b^2+\rho^2}\,\frac{b^2-\rho^2}{b^2+\rho^2}$

Надо ФГ строить. $\frac{\partial^2\delta}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\delta}{\partial\rho} - \frac{\cos 2\theta_0(\rho)}{\rho^2}\delta(\rho) = f(\rho)$

гран. условия: $\delta(\rho=b) = C_2 \ln\cos b$ — сшивка с вне „core" областью.

при $\rho \to 0$ $\delta'' + \frac{1}{\rho}\delta' - \frac{1}{\rho^2}\delta = -\varkappa^2\frac{2}{b}\rho$. Надо $\delta'' + \frac{1}{\rho}\delta' - \frac{1}{\rho^2}\delta = 0$ дает

общее ур-е Эйлера $\rho^2\delta'' + \rho\delta' - \delta = 0$, $(1-a)^2 - 4b = 0 - 4\cdot(-1) = 4 > 0$

$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{141} = 1$

$\delta(\rho) = C_1\rho$ при $\rho \to 0$.

Надо можно не рассм. А при $\rho \to b-0$: $\sin\theta_0\cos\theta_0 = \frac{2b^2}{2b^2}\,\frac{(b-\rho)2b}{2b^2} = \frac{1}{b}(b-\rho)$

$\cos^2 2\theta_0(\rho) = 1 - \sin^2 2\theta_0(\rho) = 1 - \frac{4}{b^2}(b-\rho)^2$.

$\rho\to b$ $\delta'' + \frac{1}{\rho}\delta' - \frac{1}{\rho^2}\delta = -\frac{\varkappa^2}{b}(b-\rho)$, ЛОДу $\to \delta_0(\rho) = C_1^*\rho + C_2^*\frac{1}{\rho}$

Частное реш. ЛНДу $\delta_1(\rho) = B(b-\rho)$, $\frac{1}{\rho}(-B) - \frac{1}{\rho^2}B(b-\rho) = -\frac{\varkappa^2}{b}(b-\rho)$

Значит. $\left(\frac{B}{b^2} = \frac{\varkappa^2}{b}\right)$.

$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial\delta}{\partial\rho}\right] - \frac{\cos 2\theta_0(\rho)}{\rho^2}\delta(\rho) = f(\rho) \to \hat{\mathcal{L}}\delta(\rho) + F(\rho) = 0$

$\hat{\mathcal{L}} = \frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}\right] - \frac{\cos 2\theta_0}{\rho}$, $F(\rho) = -\rho f(\rho) = -\rho(-\varkappa^2)\sin\theta_0\cos\theta_0 = \rho\frac{\varkappa^2}{2}\sin 2\theta_0(\rho)$

$\hat{\mathcal{L}}\delta(\rho) = 0$ в области $\rho \leq b$ имеет решение $\delta(\rho) = \sin\theta_0(\rho)$

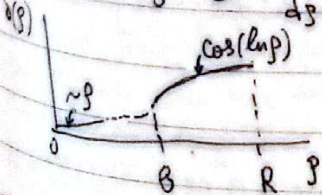
$G(\rho,\rho')$ — ФГ задачи. $\hat{\mathcal{L}}_\rho G(\rho,\rho') = -\delta(\rho-\rho')$. $\delta(\rho) = \int d\rho' G(\rho\rho')F(\rho')$

$G(\rho,\rho') = \begin{cases} C_1 u(\rho), & 0<\rho<\rho' \\ C_2 v(\rho), & \rho'<\rho<b \end{cases}$ $\delta(\rho) = \sin\theta_0(\rho)$, $\delta(0) = 0$

$\delta(b) = 1$ — гран. условия.

Но так ФГ можно строить только лишь если $u(\rho)$ и $v(\rho)$ — линейно независимы. У меня и $u(\rho)$, и $v(\rho) \sim \sin\theta_0(\rho)$.

К этому $\hat{\mathcal{L}} = \frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}\right] - \frac{\cos 2\theta_0}{\rho}$ ближе всего $\hat{\mathcal{L}} = \frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}\right] - \frac{n^2}{\rho}$ с ф. $J_n(\rho)$.



$\theta(\rho) = \theta_0(\rho) + \delta(\rho)$ ← Усова

$\delta(\rho) = \begin{cases} C_1\rho, & \rho \to 0 \\ C_2 \ln\cos\rho, & \rho \geq b \end{cases}$

Можно $\approx$ считать $\delta(\rho) = C_1\rho$ вплоть до $\rho = b$.

Сшивка $\rho_-(b) = \rho_+(b)$, $C_1 b = C_2 \ln\cos b$

$\delta(\rho) = C_1\begin{cases} \rho, & \rho \leq b \\ \frac{b}{\ln\cos b}\ln\cos\rho, & \rho \geq b \end{cases}$. Вообще, ур-е для $\delta(\rho)$ неоднородно, поэтому C_1 должна быть известна, но

Escaneado con CamScanner

Date. 17 . 05 .

$\varphi = \varphi + \pi/2$ – не возмущаем

$\vec{m} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

b – внешнее ее можно считать fitting parameter.

Сама энергия $\to W(\theta_0, \delta) = W_{us}(\theta_0) + [\text{член квадратичный по } \delta(\rho)]$.

$$\to W_{el} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \int d\rho\rho \left[(\nabla\theta)^2 + \sin^2\theta(\nabla\varphi)^2\right] = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \int_0^1 d\rho\rho \left[\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\right]$$

$$W_m = \frac{4\pi}{\beta} \int d\rho\rho \int d\rho'\rho' \, m_z(\rho) m_z(\rho') \int_0^\infty dx \left[1 - e^{-\beta x}\right] J_0(\rho x) J_0(\rho' x)$$

$$g_{zz}(\rho, \rho') = -\frac{4\pi}{\beta} \int_0^\infty dx \left[1 - e^{-\beta x}\right] J_0(\rho x) J_0(\rho' x)$$

$$W_m = -\int d\rho\rho \int d\rho'\rho' \, m_z(\rho) m_z(\rho') g_{zz}(\rho, \rho'), \quad g_{zz}(\rho, \rho') \underset{\beta\to 0}{=} -\frac{4\pi}{\beta}\delta(\rho - \rho')$$

Локал. предел $\to W_m^{(\beta\to\infty)} = 4\pi \int_0^1 d\rho\rho \, m_z^2(\rho) = 4\pi \int_0^1 d\rho\rho \cos^2\theta$. Но у нас всё $W_m^{\text{при конеч}}$

$$W(\theta) = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \int_0^1 d\rho\rho \left[\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\right] + \frac{4\pi}{\beta} \int_0^\infty dx \left[1 - e^{-\beta x}\right] I^2(x),$$

– полная энергия частицы с $m_z(\rho) = \cos\theta(\rho)$, $m_\rho = 0$.

где $I(x) = \int_0^1 d\rho\rho \cos\theta(\rho) J_0(\rho x)$, $m_z(\rho) = \cos\theta(\rho)$.

$W(\theta_0, \delta) = W_{us}(\theta_0) + [\dots]\delta^2$

$[\dots] = 0$ и даст условие устойчивости частицы $\theta_0(\rho)$ относительно малых возмущений $\delta(\rho)$,

$\to \Phi = \varphi + \pi/2 + \delta\Phi(\rho)$, также $\delta\Phi(\rho)$ приведет нас к volume charges, а W_{el} – сомнителен.

7/V Не все так просто с разложением по $\delta(\rho)$.

Доп. член по $\delta(\rho)$ исчезнет лишь если:

1) $\delta(\rho=0) = 0$ и $\delta(R) = 0$ если отказ $\delta(\rho)$ вероятней. Но у меня $\delta(\rho) \ll 1$ – это ТВ по $(\alpha R)^2 \ll 1$

2) Частица не есть решение уравнения Эйлера для $W(\theta(\rho))$ – минимизация. Но может и оказаться в некоторых предельных случаях ($\alpha^2 = 0$ отсутствие магнитного поля, полное

Ур-е Эйлера (после $\frac{1}{\alpha}\int_0^1 d\rho(\dots) \to$) приведено 5/V (и полагая $m_\rho = 0$):

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial\rho} = \left[\frac{\cos\theta(\rho)}{\rho^2} + \frac{1}{2}\int_0^R d\rho'\rho' \, g_{zz}(\rho, \rho')\cos\theta(\rho')\right]\sin\theta(\rho)$$

Решение Усова это просто предел $\alpha \to \infty$ здесь.

Но Усов в ФММ'94 правильно замечает "что для полного цилиндра [illegible], без сего' краев, но решение $\theta_0(\rho) = \pi/2$ ($m_\rho = 1$) это решение ур. Л.-Л. (Брауна)

Escaneado con CamScanner

Update.

$$W_{ex}(\theta_0+\delta) = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \int d\rho\rho \left[(\theta_0' + \delta')^2 + \frac{1}{\rho^2}\sin^2(\theta_0+\delta)\right] =$$

$$= \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \int d\rho\rho \left[(\theta_0')^2 + 2\theta_0'\delta' + \delta'^2 + \frac{1}{\rho^2}\left\{\sin^2\theta_0(1-\delta^2) + \cos^2\theta_0\,\delta^2 + 2\sin\theta_0\cos\theta_0\,\delta\right\}\right] =$$

$$= W_{ex}(\theta_0) + \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \int d\rho\rho\, 2\left[\theta_0'\delta' + \frac{1}{\rho^2}\sin\theta_0\cos\theta_0\,\delta\right] + \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \int d\rho\rho \left[\delta'^2 + \frac{1}{\rho^2}\cos 2\theta_0\,\delta^2\right]$$

Инт. по δ: $\int d\rho\rho\,\theta_0'\,\delta'(\rho) = \int d\rho\,\frac{d\delta}{d\rho}(\rho\theta_0') = \int_{(u)} d\delta_{(v)} \left(\rho\frac{d\theta_0}{d\rho}\right)_{(u)} =$

$$= \left(\rho\frac{d\theta_0}{d\rho}\right)\delta(\rho)\Big|_0^R - \int d\rho\,\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\theta_0}{d\rho}\right)\delta(\rho) = \left|\begin{array}{l}\text{при } \rho=0 \text{ и } \rho\theta_0'=0 \text{ и } \delta=0\\ \text{при } \rho=R\ \frac{d\theta_0}{d\rho}=0, \text{ т.к. там экстрем. на } \delta(\rho)\text{ - тут так}\end{array}\right| =$$

$$= -\int d\rho\rho\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\theta_0')\right]\delta(\rho) = -\int d\rho\rho\,\nabla^2\theta_0\cdot\delta(\rho)$$

$$W_{ex}(\theta_0+\delta) = W_{ex}(\theta_0) + \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \int_0^R d\rho\rho\, 2\left[-\nabla^2\theta_0 + \frac{\sin\theta_0\cos\theta_0}{\rho^2}\right]\delta(\rho) +$$

$$+ \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \int_0^R d\rho\rho\left[\delta'^2 + \frac{\cos 2\theta_0}{\rho^2}\delta^2\right]$$

$=0$ дает ур-е Усова

$$I(x) = \int d\rho\rho\, J_0(\rho x)\cos(\theta_0+\delta) = \int d\rho\rho\, J_0\left[\cos\theta_0\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right) - \sin\theta_0\cdot\delta\right]$$

Формулы, напоминающие (корреляц.)

$$W_m(\theta_0+\delta) = -\int d\rho\rho \int d\rho'\rho'\, g_{zz}(\rho,\rho')\cos\left[\theta_0(\rho)+\delta(\rho)\right]\cos\left[\theta_0(\rho')+\delta(\rho')\right]$$

В пределе $\rho\to 0$ ищем (локал. предел) намагниченности: $W_m(\theta) = 4\pi\int d\rho\rho\cos^2\theta(\rho)$

$$W_m(\theta_0+\delta) = 4\pi\int d\rho\rho\left[\cos^2\theta_0(1-\delta^2) - 2\sin\theta_0\cos\theta_0\,\delta + \sin^2\theta_0\,\delta^2\right] =$$

$$= W_m(\theta_0) + 4\pi(-2)\int d\rho\rho\,\sin\theta_0\cos\theta_0\,\delta(\rho) - 4\pi\int d\rho\rho\cos 2\theta_0\,\delta^2(\rho)$$

$$W(\theta_0+\delta) = W(\theta_0) + 2\int_0^R d\rho\rho\left[\alpha\left(-\nabla^2\theta_0 + \frac{\sin\theta_0\cos\theta_0}{\rho^2}\right) - 4\pi\sin\theta_0\cos\theta_0\right]\delta(\rho) +$$

$$+ \int_0^R d\rho\rho\left[\alpha\left(\delta'^2 + \frac{\cos 2\theta_0}{\rho^2}\delta^2\right) - 4\pi\cos 2\theta_0\,\delta^2(\rho)\right]$$

$$W(\theta_0+\delta) = W(\theta_0) + 2\alpha\int_0^R d\rho\rho\left[-\nabla^2\theta_0 + \frac{\sin\theta_0\cos\theta_0}{\rho^2} - \varkappa^2\sin\theta_0\cos\theta_0\right]\delta(\rho) +$$

$$+\alpha\int_0^R d\rho\rho\left[\delta'^2 + \left(\frac{1}{\rho^2} - \varkappa^2\right)\cos 2\theta_0\cdot\delta^2(\rho)\right]$$

$=0$ дает new-vortex solution при $\beta\to 0$. $\theta_0(\rho)$ от $3/2$

Это общая формула при $\beta<1$. Если понимать $\delta(\rho)$ как произвольную пробную вариацию (она нужна для поиска устойчивости new-vortex).

Но если считать, что $\delta(\rho)$ – есть поправка к решению Усова χ-δ $\theta_0(\rho)$ малого $\varkappa^2$, то $\delta\sim\varkappa^2$ и

$$W(\theta_0+\delta) = W(\theta_0) + 2\alpha\int_0^R d\rho\rho\left[-\nabla^2\theta_0 + \frac{\sin\theta_0\cos\theta_0}{\rho^2}\right]\delta(\rho) + \alpha\int_0^R d\rho\rho\left[\delta'^2 + \frac{\cos 2\theta_0}{\rho^2}\delta^2 - \varkappa^2\sin 2\theta_0\,\delta(\rho)\right],$$

$=0$ не реш. Усова

где $\delta(\rho)$ удовл. ур. $\delta'' + \frac{1}{\rho}\delta' - \frac{\cos 2\theta_0}{\rho^2}\delta = -\varkappa^2\sin\theta_0\cos\theta_0$

Escaneado con CamScanner

Date.

Для $\int_0^R d\rho\,\rho\,\delta'^2 = \int d\rho \left(\rho\frac{d\delta}{d\rho}\right)\frac{d\delta}{d\rho} = \int \underset{(u)}{d\delta}\left(\rho\underset{v}{\frac{d\delta}{d\rho}}\right) = \rho\frac{d\delta}{d\rho}\delta(\rho)\Big|_0^R - \int d\rho\,\frac{d}{d\rho}(\rho\delta')\delta =$

$= \left|\begin{array}{l}\text{при } \rho=0 \text{ было 0.к.}\\ \text{при } \rho=R\ \frac{d\delta}{d\rho}\delta(\rho)=0 \text{ было, т.к. } \delta'(R)=0\end{array}\right| = -\int d\rho\,\rho\,\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\delta')\delta = -\int d\rho\,\rho\,\nabla^2\delta,$

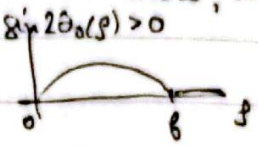
$\Rightarrow W_{тот}(\theta_0+\delta) = W(\theta_0) + \alpha\int_0^R d\rho\,\rho\left[-\nabla^2\delta + \frac{\cos 2\theta_0}{\rho^2}\delta - \varkappa^2\sin 2\theta_0\right]\delta(\rho)$

$\theta_0 = \theta_{0S}$ задача

В силу ур-я на δ: $\nabla^2\delta - \frac{\cos 2\theta_0}{\rho^2}\delta = -\varkappa^2\sin\theta_0\cos\theta_0$ упрощ. $[\dots]$.

$W(\theta_0+\delta) = W(\theta_0) - \frac{1}{2}\alpha\varkappa^2\int_0^R d\rho\,\rho\,\sin 2\theta_0(\rho)\delta(\rho)$, т.к. $\sin 2\theta_0 = 0$ вне "соре", то $\int_0^B d\rho(\dots)$

$\Rightarrow W(\theta_0+\delta) = W(\theta_0) - \frac{1}{2}\alpha\varkappa^2\int_0^B d\rho\,\rho\,\sin 2\theta_0(\rho)\delta(\rho)$



и надо найти $\delta(\rho)$ на $[0,B]$ из $\nabla^2\delta - \frac{\cos 2\theta_0}{\rho^2}\delta = -\frac{\varkappa^2}{2}\sin 2\theta_0$.

$\delta = F(\rho, B, \varkappa^2)$ — от R, L не зависит, т.к. $\rho \to 0$.

Усл. потери устойчивости решение уравн $\theta_0(\rho)$: $\int_0^B d\rho\,\rho\,\sin 2\theta_0(\rho)\delta(\rho) = 0$

т. е. $\delta(\rho)$ должно быть знакопеременным, т.к. $\sin 2\theta_0 > 0$.

Если б знать ФГ ур. для $\delta(\rho)$, то $\delta(\rho) = \frac{\varkappa^2}{2}\int_0^B d\rho'\rho' G(\rho,\rho')\sin 2\theta_0(\rho')$ как б/г

Усл. (критическая) устойчивости $\int_0^B d\rho\,\rho\int_0^B d\rho'\rho'\,G(\rho,\rho')\sin 2\theta_0(\rho)\sin 2\theta_0(\rho') = 0$

Решение ЛОДУ: $\delta_0(\rho) = C\sin\theta_0(\rho)$

А второе лин. независим. решение ЛОДУ для $\delta(\rho)$?

$$\delta'' + \frac{1}{\rho}\delta' - \frac{\cos 2\theta_0(\rho)}{\rho^2}\delta(\rho) = 0, \quad \delta'' + P(\rho)\delta' + Q(\rho)\delta = 0$$

$\int P(\rho)d\rho = \int\frac{d\rho}{\rho} = \ln\rho$. $\delta_2(\rho) = \sin\theta_0(\rho)\int d\rho\,\frac{1}{\sin^2\theta_0(\rho)}e^{-\int P(\rho)d\rho} =$

$= \sin\theta_0(\rho)\int\frac{d\rho}{\sin^2\theta_0(\rho)}\frac{1}{\rho} = \sin\theta_0\int\frac{d\rho}{\rho}\left(\frac{B^2+\rho^2}{2B\rho}\right)^2 = \frac{\sin\theta_0}{4B^2}\int\frac{d\rho}{\rho}\left[\frac{B^2}{\rho}+\rho\right]^2 =$

$= \frac{1}{4B^2}\sin\theta_0\int\frac{d\rho}{\rho}\left[\frac{B^4}{\rho^2}+2B^2+\rho^2\right] = \frac{1}{4B^2}\sin\theta_0\left[B^4\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\rho^2}+2B^2\ln\rho+\frac{1}{2}\rho^2\right] =$

$= \frac{1}{8B^2}\sin\theta_0(\rho)\left[4B^2\ln\rho + \rho^2 - \frac{B^4}{\rho^2}\right]$, т.к. $\sin\theta_0(\rho) \underset{\rho\le B}{=} \frac{2B\rho}{\rho^2+B^2}$, то

второе решение сингулярно при $\rho = 0$.

$\Rightarrow \delta_1(\rho) = \sin\theta_0(\rho)$, $\delta_2(\rho) = \frac{1}{8B^2}\sin\theta_0(\rho)\left[4B^2\ln\left(\frac{\rho}{B}\right) + \rho^2 - \frac{B^4}{\rho^2}\right]$

решения ЛОДУ

т.к. удобно в ед. "B", но берем $\ln\frac{\rho}{B}$

$\delta_1(0) = 0$ и $\delta_2(B) = 0$. $\hat{\mathcal{I}} = \frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\right) - \frac{1}{\rho}\cos 2\theta_0(\rho)$. Хорошо ли предыдущее $\delta(B) = 0$?

$$G(\rho,\rho') = \begin{cases} -\frac{1}{A}\delta_1(\rho)\delta_2(\rho'), & 0 \le \rho < \rho' \\ -\frac{1}{A}\delta_1(\rho')\delta_2(\rho), & \rho' < \rho < B \end{cases}$$

Везде $\delta(\rho) \sim \cos\ln\rho$ кроме $\rho \gtrsim B$ существенно

Escaneado con CamScanner

Лучше $\delta_2(\rho) = \frac{1}{8B^2}\sin\theta_0(\rho)\left[4B^2\ln\frac{\rho}{R} + \rho^2 - \frac{B^4}{\rho^2}\right]$, $\delta_2(B) = \frac{1}{2}\ln\frac{B}{R}$

$$\delta(\rho) = \frac{\varkappa^2}{2}\int_0^B d\rho'\rho' G(\rho,\rho')\sin 2\theta_0(\rho') = \frac{\varkappa^2}{2}\int_0^\rho d\rho'\rho'[\dots] + \frac{\varkappa^2}{2}\int_\rho^B d\rho'\rho'[\dots] =$$

$$= \frac{\varkappa^2}{2}\left(-\frac{1}{A}\right)\int_0^\rho d\rho'\rho'\sin\theta_0(\rho')\,\delta_2(\rho)\sin 2\theta_0(\rho') + \frac{\varkappa^2}{2(-A)}\int_\rho^B d\rho'\rho'\,\delta_1(\rho)\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{8B^2}\sin\theta_0(\rho')\left[4B^2\ln\frac{\rho'}{R} + \rho'^2 - \frac{B^4}{\rho'^2}\right]\sin 2\theta_0(\rho') =$$

$$= \frac{\varkappa^2}{2(-A)}\delta_2(\rho)\int_0^\rho d\rho'\rho'\sin\theta_0(\rho')\sin 2\theta_0(\rho') + \frac{\varkappa^2}{2(-A)}\frac{\delta_1(\rho)}{8B^2}\int_\rho^B d\rho'\rho'\left[4B^2\ln\frac{\rho'}{R} + \rho'^2 - \frac{B^4}{\rho'^2}\right]\sin\theta_0(\rho')\sin 2\theta_0(\rho)$$

$$\int_0^\rho d\rho'\rho'\sin\theta_0(\rho')\sin 2\theta_0(\rho') = \left|\begin{array}{l}\left(\frac{d\theta_0}{d\rho}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2}\sin^2\theta_0(\rho),\ \frac{d\theta_0}{d\rho} = -\frac{1}{\rho}\sin\theta_0(\rho)\\ d\rho = \frac{d\theta}{(d\theta/d\rho)} = \frac{1}{\theta'(\rho)}d\theta,\ d\rho = -\rho\frac{d\theta}{\sin\theta}\end{array}\right| = \left|2\sin^2\theta\cos\theta d\theta\right| =$$

$$= 2\int_0^\rho d\rho'\rho'\left(\frac{2B\rho'}{B^2+\rho'^2}\right)^2\frac{B^2-\rho'^2}{B^2+\rho'^2} = 2\cdot 4B^2\int_0^\rho d\rho\,\frac{\rho^3(B^2-\rho^2)}{(B^2+\rho^2)^3} = 8B^2\int d\rho\left[\rho^3\frac{(-1)}{(B^2+\rho^2)^2} + 2B^2\frac{\rho^3}{(B^2+\rho^2)^3}\right] =$$

$$= 8B^2\frac{1}{2}\int_0^{\rho^2} dx\left[\frac{-x}{(B^2+x)^2} + 2B^2\frac{x}{(B^2+x)^3}\right] = 4B^2(-1)\left[-\frac{x}{B^2+x} + \ln(B^2+x)\right]_0^{\rho^2} +$$

$$+ 4B^2\cdot 2B^2(-1)\left[x + \frac{1}{2}B^2\right]\frac{1}{(B^2+x)^2}\Big|_0^{\rho^2} = -4B^2\left[\frac{-\rho^2}{B^2+\rho^2} + \ln(B^2+\rho^2) - \ln B^2\right] -$$

$$- 8B^4\left[\frac{\rho^2+\frac{1}{2}B^2}{(B^2+\rho^2)^2} - \frac{\frac{1}{2}B^2}{B^4}\right] = -4B^2\ln\left(1+\frac{\rho^2}{B^2}\right) - \frac{4B^2}{(B^2+\rho^2)^2}\left[-\rho^2(\rho^2+B^2) +\right.$$

$$\left. + 2(\rho^2+\tfrac{1}{2}B^2)B^2\right] + 4B^2 = 4B^2 - 4B^2\ln\left(1+\frac{\rho^2}{B^2}\right) - \frac{4B^2}{(B^2+\rho^2)^2}\left[-\rho^4-\rho^2B^2+2\rho^2B^2+B^4\right] =$$

$$= -4B^2\ln\left(1+\frac{\rho^2}{B^2}\right) - \frac{4B^2}{(B^2+\rho^2)^2}\left[-\cancel{B^4}-\rho^4-\cancel{2\rho^2B^2}-\rho^4-\rho^2B^2+\cancel{2\rho^2B^2}+\cancel{B^4}\right] =$$

$$= -4B^2\ln\left(1+\frac{\rho^2}{B^2}\right) - \frac{4B^2}{(B^2+\rho^2)^2}\left[-2\rho^4-\rho^2B^2\right] = -4B^2\ln\left(1+\frac{\rho^2}{B^2}\right) + \frac{4B^2\rho^2}{(B^2+\rho^2)^2}(2\rho^2+B^2)$$

$$\delta(\rho) = \frac{\varkappa^2}{2(-A)}\delta_2(\rho)\,4B^2\left[-\ln\left(1+\frac{\rho^2}{B^2}\right) + \frac{\rho^2(2\rho^2+B^2)}{(B^2+\rho^2)^2}\right] +$$

$$+ \frac{\varkappa^2}{2(-A)}\frac{\delta_1(\rho)}{8B^2}\int_\rho^B d\rho'\rho'\left[4B^2\ln\frac{\rho'}{R} + \rho'^2 - \frac{B^2}{\rho'^2}\right]\sin\theta_0(\rho')\sin 2\theta_0(\rho')$$

Отсюда видно, что несмотря на симметричность $\delta_2(\rho)$, $\delta(\rho) \underset{\rho\to 0}{\sim} \rho^3$.

$$\delta(\rho=B) = \frac{\varkappa^2}{2(-A)}\frac{1}{2}\ln\frac{B}{R}\,4B^2\left[-\ln 2 + \frac{3}{4}\right],\ \text{т.к. } \delta_2(B) = \frac{1}{2}\ln\frac{B}{R}$$

$$\delta(\rho\to 0) = \frac{\varkappa^2}{2(-A)}\frac{1}{8B^2}\frac{2}{B}\rho\left[-\frac{B^4}{\rho^2}\right]4B^2\left[-\frac{\rho^2}{B^2} + \underbrace{\rho^2\frac{B^2}{B^4}}_{\text{сокращ.}}\right] \sim \rho^3\ (!).$$

Коэф. A из условия $\mathrm{Wron}(\delta_1,\delta_2) = \left|\begin{array}{cc}\delta_1 & \delta_2\\ \delta_1' & \delta_2'\end{array}\right| = \frac{A}{\rho}$ ← определ. из $\hat{\mathcal{L}}$.

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$\delta_1(\rho) = \sin\Theta_0(\rho)$, $\delta_2(\rho) = \delta_1(\rho) f(\rho)$

$\text{Wron}(\delta_1, \delta_2) = \delta_1\delta_2' - \delta_2\delta_1' = \delta_1[\delta_1 f]' - \delta_1 f \delta_1' = \delta_1[\delta_1' f + \delta_1 f'] - f\delta_1\delta_1' = \delta_1^2 f'$, $f(\rho) = \frac{1}{8B^2}\left[4B^2 \ln\frac{\rho}{R} + \rho^2 - \frac{B^4}{\rho^2}\right]$

$f'(\rho) = \frac{1}{8B^2}\left[\frac{4B^2}{\rho} + 2\rho + 2\frac{B^4}{\rho^3}\right] = \frac{1}{4B^2\rho}\left[2B^2 + \rho^2 + \frac{B^4}{\rho^2}\right] = (4B^2\rho)^{-1}\left(\rho + \frac{B^2}{\rho}\right)^2$

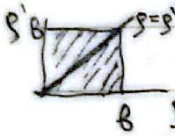
$\text{Wron}(\delta_1, \delta_2) = \sin^2\Theta_0(\rho) f'(\rho) = \frac{4B^2\rho^2}{(\rho^2+B^2)^2}\frac{1}{4B^2\rho}\left(\rho + \frac{B^2}{\rho}\right)^2 = \frac{1}{\rho}$, $\Rightarrow A = 1$

→ Теперь $\delta(\rho) = \frac{\varkappa^2}{2}\int_0^B d\rho' \rho' G(\rho,\rho')\sin 2\Theta_0(\rho')$ с $G(\rho,\rho') = (-1)\begin{cases}\delta_1(\rho)\delta_2(\rho'), & \rho<\rho' \\ \delta_1(\rho')\delta_2(\rho), & \rho'<\rho\end{cases}$

даёт решение ЛНДУ $\delta'' + \frac{1}{\rho}\delta' - \frac{\cos 2\Theta_0(\rho)}{\rho^2}\delta(\rho) = -\frac{\varkappa^2}{2}\sin 2\Theta_0(\rho)$ для поправки $\delta(\rho)$ к решению Усова $\Theta_0(\rho)$ (но только $\beta \ll 1$).

$\delta_1(\rho)$, $\delta_2(\rho)$ – лин. независим. решения ЛОДУ выбросим.

$J = \int_0^B d\rho\rho \int_0^B d\rho'\rho' G(\rho,\rho')\sin 2\Theta_0(\rho)\sin 2\Theta_0(\rho')$ – опр. поправку $\sim \delta^2$ к энергии и устойчивость



$J = \int_0^B d\rho\rho\left[\int_0^\rho d\rho'\rho' G\, s(\rho)s(\rho') + \int_\rho^B d\rho'\rho' G\, s(\rho)s(\rho')\right] =$

$(\rho'<\rho)$ $(\rho'>\rho)$

$= (-1)\int_0^B d\rho\rho\left[\int_0^\rho d\rho'\rho'\,\delta_1(\rho')\delta_2(\rho)s(\rho)s(\rho') + \int_\rho^B d\rho'\rho'\,\delta_1(\rho)\delta_2(\rho')s(\rho)s(\rho')\right] =$

$= (-1)\int_0^B d\rho\rho\left[\delta_2(\rho)\cdot\underbrace{\int_0^\rho d\rho'\rho'\delta_1(\rho')s(\rho')}_{f_1(\rho)} + \delta_1(\rho)\underbrace{\int_\rho^B d\rho'\rho'\delta_2(\rho')s(\rho')}_{f_2(\rho)}\right]s(\rho) =$

$= \underbrace{(-1)\left[\int_0^\rho d\rho'\rho'\delta_1(\rho')s(\rho')\right]}_{\text{ничего не даёт}}\Bigg|_0^B = (-1)\int_0^B d\rho\rho\, s(\rho)\left[\delta_2 f_1(\rho) + \delta_1(\rho) f_2(\rho)\right] =$

$= (-1)\int_0^\rho d\rho\rho\, s(\rho)\left[\delta_2(\rho)f_1(\rho) + \delta_1(\rho)f_2(\rho)\right] + (-1)\int_\rho^B d\rho\rho\left[\delta_2(\rho)f_1(\rho) + \delta_1(\rho)f_2(\rho)\right]s(\rho) =$

$\int_0^B d\rho\int_0^B d\rho' = \left[\int_0^{\rho'} d\rho + \int_{\rho'}^B d\rho\right]\left[\int_0^\rho d\rho' + \int_\rho^B d\rho'\right]$ – ?

→ $W(\Theta_0+\delta) = W(\Theta_0) - \frac{1}{2}d\varkappa^2\int_0^B d\rho\rho\sin 2\Theta_0(\rho)\delta(\rho) = W(\Theta_0) - \frac{d}{4}\varkappa^4\int_0^B d\rho\rho\int_0^B d\rho'\rho'\sin 2\Theta_0(\rho)\sin 2\Theta_0(\rho')G$

поправку $\delta(\rho)$

Альтернатива: •а) либо делаем как выше ТВ по $\varkappa^2$ и вычисляем и возмущ. энергию vortex Усова $\sim \delta^2(\rho)$ и устойчивость V. Усова от δ

•б) либо рассм. устойчивость исходного стационар. vortex (new-vortex) относит. произвольных $\delta(\rho)$ и методом Bogdanov-Hubert '99 Solution находим моду потери устойчивости $\delta_0(\rho)$ и границу устойчивости new-vortex как $\lambda_{min} = 0$ – зануление min СЗ матрицы квадратич. формы, полученной на основе разложения $\delta(\rho)$.

Escaneado con CamScanner

Date. 08.05.

По смыслу $\delta(\rho)$ поправка $\sim (\varkappa R)^2 = \frac{4\pi}{\alpha} R^2 = 4\pi \left(\frac{R}{R_0}\right)^2$, а "энергетическая" поправка к энергии вортекса Усова $\sim \delta^2(\rho)$ есть $\sim (\varkappa R)^4 = (4\pi)^2 \left(\frac{R}{R_0}\right)^4$ формально удовлетворяет $\frac{R}{R_0} \ll 1$. А само решение Усова это $\frac{R}{R_0} \to 0$, или $\alpha \to \infty$.

Тогда $\delta W = -\frac{\alpha}{4} \varkappa^4 \int_0^b d\rho\rho \int_0^b d\rho'\rho' S(\rho) S(\rho') G(\rho,\rho') =$ $\left| \begin{array}{l} \alpha = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 - \text{безразмерный} \\ \varkappa^2 = \frac{4\pi}{\alpha} = 4\pi \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \\ b \text{ здесь} = \frac{b}{R} = c \text{ и } \rho \to \frac{\rho}{R} \end{array} \right| =$

$= -\frac{1}{4} \alpha \varkappa^4 \int_0^c d\rho\rho \int_0^c d\rho'\rho' F(\rho,\rho') = \left| \frac{\rho}{c} = r \right| = 2$

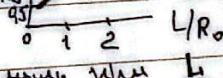
$= -\frac{1}{4} \alpha \varkappa^4 c^4 \int_0^1 dr\, r \int_0^1 dr' r' F(r,r')$, где $F(r,r')$ – безразмерная функция ~ 1.

В этих переменных $\sin 2\theta_0(r) = 2 \frac{2r}{1+r^2} \frac{1-r^2}{1+r^2}$, $\delta_1(r) = \sin\theta_0(r) = \frac{2r}{1+r^2}$,

$\delta_2(r) = \frac{1}{8} \delta_1(r) \left[4\ln(rc) + r^2 - \frac{1}{r^2} \right]$, что определяет $F(r,r') = S(r) S(r') G(r,r')$, $S(r) = \sin 2\theta_0(r)$

Поэтому $\delta W \sim \frac{1}{4} \alpha \varkappa^4 c^4 = \frac{1}{4} \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 (4\pi)^2 \left(\frac{R}{R_0}\right)^4 \left(\frac{b}{R}\right)^4 = \frac{1}{4} (4\pi)^2 \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \left(\frac{b}{R_0}\right)^4$

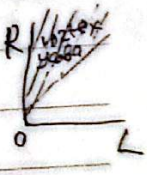
Сама $W(\theta_0) \sim \alpha \sim \left(\frac{R_0}{R}\right)^2$, поэтому $\boxed{\frac{\delta W}{W(\theta_0)} \sim \left(\frac{b}{R_0}\right)^4}$, т.е. решение Усова хорошо лишь для радиуса "core" $b < R_0$ и является точным при $b \to 0$ (исчезающей намагниченности) или $R_0 \to \infty$ (очень сильного обмена).

Согласно Усов'94 $\frac{b}{R_0} = f\left(\frac{L}{R_0}\right)$ 

$\frac{b}{R_0} \approx 0{,}59$ для $\frac{L}{R_0} \ll 1$,

поэтому решение Усова неплохо лишь при $\frac{L}{R_0} \lesssim 0{,}5$ или $\frac{L}{R_0} \to 0$.

Другой сторона, неправильный угол в вортексе Усова торцевой намагниченности (magnetic end side charges = 0) становится несущественным при $R \gg b$, когда "core" относительно мал, и решение Усова хорошо применимо.



→ Вывод: вортекс Усова хорош лишь при $L \ll R_0$ или $R \gg R_0$.

Посчитаем $J(c) = \int_0^1 d\rho\rho \int_0^1 d\rho'\rho' (\sim) = \int_0^1 dr\, r \int_0^1 dr' r' \sin 2\theta_0(r) \sin 2\theta_0(r') G(r,r',c)$

В зависимости от "c" из-за $\delta_2(r)$ зависит от $c = b/R$. $J(c_{cr}) = 0$ – нашли.

Это все при $\beta = L/R \ll 1$. При $\frac{L}{R_0} \ll 1$ для вортекса Усова $\frac{b}{R_0} = 0{,}59$.

$c_{cr} = \frac{b}{R_c}$, $R_c = \frac{b}{c_{cr}}$, или $\frac{R_c}{R_0} = \frac{1}{c_{cr}} \frac{b}{R_0} = \frac{0{,}59}{c_{cr}}$. Для $\frac{L}{R_0} \ll 1$ получим

$c_{cr} = 2{,}26 \Rightarrow \frac{R_c}{R_0} = 0{,}26$ – очень мало, гораздо ниже R_c^{US}. По смыслу $c = \frac{b}{R} \leq 1$.

$J(c) = 0$ в нефизической области 

. Для малых $c < 1$,

получим $J(c) > 0$ и $\boxed{\delta W = -\frac{1}{4} \alpha \varkappa^4 c^4 J(c) < 0}$, т.е. $\delta(\rho)$ добавка к вортексу Усова $\Theta(\rho) = \Theta_0(\rho) + \delta(\rho)$ ведет к уменьшению его энергии (!) и к его стабилизации вот. single-domain (||) state и 1 S.d. state. $\Theta_{US}(\rho)$ – не есть min W.

Escaneado con CamScanner

Date. . .

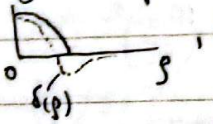
→ Vortex условия не будут настолько min $W(\theta)$, насколько точно правильно выбранного возмущения $\delta(\rho)$ (при $\frac{L}{R_0} \ll 1$). $W(\theta_0+\delta) < W(\theta_0)$ и $\theta(\rho) = \theta_0(\rho) + \delta(\rho) - \pi/2$ дает более правильное (точное) решение exchange-magnetostatic problem для vortex $\vec{m}(\rho)$ - distribution.

Критерий малости $\delta(\rho)$ есть $E = \frac{1}{2}\varkappa^2 c^2 = \frac{1}{2} 4\pi \left(\frac{b}{R_0}\right)^2 \ll 1$, что дано при $\frac{L}{R_0} \to 0$ не очень хорошо выполняется, т.к. $E = 2\pi (0{,}59)^2 = 2{,}2$

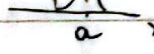
$$\delta(\rho) = \frac{1}{2}\varkappa^2 c^2 \int_0^1 d\tilde{r}\, \tilde{r}\, G(r,\tilde{r},c) \sin 2\theta_0(\tilde{r}) = \frac{1}{2}\varkappa^2 c^2 J_\delta(r,c)$$

$\rho = cr$

Например при $r=1$, $\rho = c = \frac{b}{R}$ (граница "core") $\quad \delta(c) = \frac{1}{2}\varkappa^2 c^2 J_\delta(1,c) \approx 0{,}1 \div 1$ (для разумных R) тогда как $\theta_0(c) = \pi/2$.

→ Наступивший (new) vortex, который явл. решением ур. L.-L. с магнитостатикой, видимо теряет устойчивость относит. радиальной моды $\delta(\rho)$ 

, т.е. $m_z = f(\rho)$ только и не зависит от "ρ".

→ δW (new-vortex) $\sim \delta^2(\rho)$, тогда как возмущение vortex условия приводит вообще говоря к членам $\sim \delta(\rho)$. Только для сдвиговых, conformal modes типа $z \to z' = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, $z \to z' = \frac{1}{c}\left(iz + \frac{1}{2}(a - \bar{a}z^2)\right)$ будет $\delta W \sim a^2$ 

в силу изотропии в плоск. дога xy ("a" эквивал. "-a")

Подготовка к семинару в Seagate ("Vortex" ~ 90% объема):

1) Посмотреть имеющиеся прозрачки, написать их и дополнить новыми (color, если вышел) по conformal vortex model и немного по single-d. dot arrays, Кчл и SW, Ф.И.О. с названием доклада, Collaborators и схема my research

2) Написать, выучить и отработать по времени доклад

3) Написать и выучить ~1 стр. рекламной file о себе

Escaneado con CamScanner

Date. 02 · 05 · New vortex (1ый интеграл УД)

Уравнение для new-vortex с $\beta \ll 1$:

$\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + \left(\varkappa^2 - \frac{1}{\rho^2}\right)\sin\theta\cos\theta = 0$ умн. на $\rho^2\frac{d\theta}{d\rho}$ и $\int_0^R d\rho(\dots)$.

$\int_0^\rho d\rho\left[\rho^2\frac{d^2\theta}{d\rho^2} + \rho\frac{d\theta}{d\rho} - \sin\theta\cos\theta\right]\frac{d\theta}{d\rho} + \varkappa^2\int d\rho\sin\theta\cos\theta\frac{d\theta}{d\rho}\rho^2 = 0$ — $\int_{\rho_1}^{\rho_2}$

Заметим $\frac{d}{d\rho}[\rho\theta']^2 = 2[\rho\theta'][\theta' + \rho\theta''] = 2\frac{d\theta}{d\rho}\left[\rho^2\frac{d^2\theta}{d\rho^2} + \rho\frac{d\theta}{d\rho}\right]$

$\frac{1}{2}\int d\rho\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d\theta}{d\rho}\right]^2 - \int d\theta\sin\theta\cos\theta + \varkappa^2\int d\rho\rho^2\sin\theta\cos\theta\frac{d\theta}{d\rho} = 0$, $\sin\theta\cos\theta\theta' = \frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\sin^2\theta$

$\frac{1}{2}\left[\left(\rho\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2 - \sin^2\theta\right]_{\rho_1}^{\rho_2} + \frac{\varkappa^2}{2}\int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho\rho^2\frac{d(\sin^2\theta)}{d\rho} = C$ — постоян. интегрирования.

$\int d\rho\rho^2\frac{d(\sin^2\theta)}{d\rho} = \int d(\sin^2\theta)\rho^2 = \rho^2\sin^2\theta\Big|_{\rho_1}^{\rho_2} - \int\sin^2\theta\, 2\rho d\rho = \left|\begin{matrix}\rho_1 = 0\\ \rho_2 = \rho\\ \theta(0) = 0\end{matrix}\right| =$

$= \rho^2\sin^2\theta(\rho) - 2\int_0^\rho\sin^2\theta(\rho)\rho d\rho$

но при $\beta \to 0$ $W_m(\beta \ll 1) = 4\pi\frac{1}{R^2}\int_0^R d\rho\rho m_z^2(\rho) = \frac{4\pi}{R^2}\int_0^R d\rho\rho\cos^2\theta(\rho)$

1ый интеграл $\frac{1}{2}\left[\left(\rho\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2 - \sin^2\theta(\rho)\right] + \frac{\varkappa^2}{2}\rho^2\sin^2\theta(\rho) - \varkappa^2\int_0^\rho d\rho\rho\sin^2\theta(\rho) = C$, $\varkappa^2 = \frac{4\pi}{\alpha}$ (при $\rho \to 0$).

Если $\rho = R$ здесь $\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)_R = 0$, $\theta(R)$ - ? $\int_0^R d\rho\rho\sin^2\theta(\rho) = \int d\rho\rho\left[1 - \cos^2\theta\right] = \frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4\pi}W_m$

$-\frac{1}{2}\sin^2\theta(R) + \frac{1}{2}\varkappa^2R^2\sin^2\theta(R) - \varkappa^2\left[\frac{1}{2}R^2 - \frac{R^2}{4\pi}W_m\right] = C$

$-\frac{1}{2}\sin^2\theta(R) - \frac{1}{2}\varkappa^2R^2\cos^2\theta(R) + \frac{1}{4\pi}\varkappa^2R^2W_m = C$, $\varkappa^2R^2 = \frac{4\pi}{\alpha}R^2 = 4\pi\left(\frac{R}{R_0}\right)^2$

Это определяет величину C.

⇒ Приближение усова $\varkappa^2 = 0$ → $\frac{1}{2}\left[\left(\rho\frac{d\theta_0}{d\rho}\right)^2 - \sin^2\theta_0\right] = C_0$, $C_0 = -\frac{1}{2}\sin^2\theta_0(R)$

Чтобы $\delta(\rho) = \sin\theta_0(\rho)$ было решением ЛОДУ от 6/IV при $\rho \in [0, b]$

надо $C_0 = 0$ и $\frac{d\theta_0}{d\rho} = \frac{1}{\rho}\sin\theta_0$, это на $\theta_0(\rho)$ $\sin\theta_0(\rho) = \frac{2b\rho}{\rho^2 + b^2}$ — выполн.

Для vortex усова надо C_0 вычисл. на $\rho = \infty$, $C_0 = -\frac{1}{2}\sin^2\theta_0(\infty) = 0$, $\theta_0(\infty) = \pi$, тогда

$0 = \left(\rho\frac{d\theta_0}{d\rho}\right)^2 - \sin^2\theta_0(\rho)$ можно использ. при $\rho \in [0, b]$ в soliton области.

1ый интеграл — это все еще уравнение на $\theta(\rho)$.

В области вне „core" $R\frac{d\theta}{d\rho} \ll 1$ и приближенно $\frac{1}{2}(\varkappa^2\rho^2 - 1)\sin^2\theta(\rho) - \varkappa^2\int_0^\rho d\rho'\rho'\sin^2\theta(\rho') = C$

— получаем ур-е Вольтерра для $f(\rho) = \sin^2\theta(\rho)$. Можно, конечно, взять $\theta(\rho) = \frac{\pi}{2} + \delta(\rho)$ и линеаризовать по $\delta(\rho)$, это ур-е и так линейное.

$\frac{1}{2}(\varkappa^2\rho^2 - 1)f(\rho) - \varkappa^2\int_0^\rho d\rho' f(\rho') = C$ — можно решить.

В не „core" $\rho > b$ $\theta_0(\rho) = \pi/2$ является возможным решением УД для $\theta(\rho)$ при $\rho \ll 1$. (усова). Но внутри „core" $\theta_0(\rho)$ - решение лишь при $\varkappa^2 \equiv 0$.

Escaneado con CamScanner

Date.

а) $\rho \geq b$, $\theta_0(\rho) = \pi/2 \to \frac{1}{\alpha}\int_0^b d\rho' \rho' g_{zz}(\rho,\rho')\cos\theta(\rho') = 0$ ($\ll 1$), что задается лишь при $\rho \to 0$, т.к. $g_{zz} \sim \delta(\rho-\rho')$

б) $\rho \leq b$, $\frac{1}{\alpha}\sin\theta_0(\rho)\int_0^b d\rho' \rho' g(\rho\rho')\cos\theta(\rho') \ll 1$ – более лишь при $\rho \to 0$, т.к. $\sin\theta_0(\rho) \to 0$

Если отказаться от предела $\beta \ll 1$, то $\partial\rho$-е на $\theta(\rho)$ об кажет вид

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{\alpha}\sin\theta(\rho)\int_0^R d\rho' \rho' g_{zz}(\rho,\rho')\cos\theta(\rho')$$

Приближение условия:

а) $\rho \geq b$, $\theta_0(\rho) = \pi/2 \to \frac{1}{\alpha}\int_0^{R\to b} d\rho' \rho' g_{zz}(\rho,\rho')\cos\theta_0(\rho') = 0$, что задается лишь при $\rho \to 0$, когда $g_{zz} \sim \delta(\rho-\rho')$, $\rho' \leq b$

б) $\rho \leq b$, $\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2} = \frac{\rho}{b} \to \frac{1}{\alpha}\sin\theta_0(\rho)\int_0^R d\rho' \rho' g_{zz}(\rho,\rho')\cos\theta_0(\rho') = 0$ – задается либо при $\rho \to 0$ либо при $\frac{1}{\alpha}\int_0^b d\rho' \rho' g_{zz}(\rho,\rho')\cos\theta_0(\rho') \ll 1$, т.е. $\frac{H_m^z}{H_{ex}} \ll 1$. Это особ. $1 \gg \frac{4\pi}{\alpha} = \varkappa^2$ при $\beta \ll 1$, но с ростом β это условие выполн. лучше, т.к. $H_m^z(\beta)$ с $\beta\uparrow$ падает (?) (это параметрически)

Точнее $g_{zz}(\rho,\rho') = -\frac{4\pi}{R^2}\frac{1}{\beta}\int_0^\infty dx\left[1-e^{-\beta x}\right] J_0\left(\frac{\rho}{R}x\right) J_0\left(\frac{\rho'}{R}x\right)$

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^{R\to b} d\rho' \rho' g_{zz}(\rho,\rho') m_z(\rho') = -\frac{4\pi}{\alpha}\frac{1}{\beta R^2}\int_0^{R\to b} d\rho' \rho' \int_0^\infty dx\left[1-e^{-\beta x}\right] J_0\left(\frac{\rho}{R}x\right) J_0\left(\frac{\rho'}{R}x\right) m_z(\rho') =$$

$$= \left|\frac{\rho'}{b} = r\right| = -\frac{4\pi}{\alpha}\frac{1}{\beta}\frac{b^2}{R^2}\int_0^1 dr\, r \int_0^\infty dx\left[1-e^{-\beta x}\right] J_0\left(\frac{\rho}{R}x\right) J_0\left(\frac{b}{R}rx\right) m_z(r) =$$

($\rho \leq b$)

$$= -\frac{4\pi}{\alpha}\left(\frac{b}{R}\right)^2\frac{1}{\beta}\int_0^1 dr\, r\, m_z(r)\int_0^\infty dx\left[1-e^{-\beta x}\right] J_0\left(\frac{\rho}{R}x\right) J_0\left(\frac{b}{R}rx\right) \sim \left(\frac{b}{R}\right) \ll 1$$ (самозам.)

Сделаем замену $\rho = bx$ и в обр. тоже. $\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho^2} \to \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$

→ Условие $\simeq$ применимости $\theta_0(\rho)$ усова → $\rho \geq 1$, $R \gg R_0$; $\beta \ll 1$ – выполнено

и $\simeq$ совместимы при $\frac{R}{R_0} \gg 1$ и не очень больших $\frac{L}{R_0}$.

0 b R ρ

12/V Расчет SW-гасов и матриц. эл. $H_d^y(x,y)$ of rectan. dot см. в конце пред. тетради.

SW wires

16/V Две первые SW модели wires Roussigné'01 $W = 1{,}5\,\mu m$, $L = 29\,nm$

$x_k = \frac{k}{N} - 1/2$, $k = 0, 1, \ldots N$ – SW-wires.mcd. Берем $N = 200$.

k	(x_k)	0	10	20	30	40	50			
	x	-0,5	-0,45	-0,40	-0,35	-0,30	-0,25	-0,20	-0,15	-0,10
Тег.	$m_0(x)$	0,205	469	655	806	934	1,041	1,129	1,197	1,246
Неког.	$m_1(x)$	0,317	772	1.071	1,261	1,344	1,321	1,199	0,986	0,701

Date.

Хобокаг – Rectan. Lattice of Vortex Dots

Подготовка и изпращане в greenaga в Seagate Res. Center. 10-21/V

Пътуване на интервюта в Pittsburgh и в Oakland (Detroit). 22-28/V

Писма, e-mails. Редактиране снимки с Хобокаг... Дани 29-3/VI
на vortex в Ph. St. Sol. и с Мантовани на vortex stability в JMMM (JEMS)

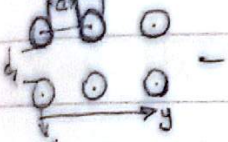
Пътуване на KIAS-Workshop в Dragon Valley с Л. и А. 31/V – 2/VI

Изпращане SW-PRB paper со Сибирцев. 3-4/VI

Rect. lattice of vortex dots

⇒ Връщане к описанию Han, f в rectan. array of 5/VI
m. coupled cylindrical dots in shifted vortex state (rigid. model)
для Хобокаг (см. 20–22/III и 8,12/III). Файлы Han-Rect-Lat.opj и Rectan-Lat-Vortex.mcd.

$2R = 0{,}42\ \mu m$, $L = 40, 50, 60$ nm и $\frac{d}{R} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ ($d = d_2$ вдоль Oy).



– rect. array. Берем $d_1/R = 2$, т.е. сотрудн. с квадрат. решеткой.

$\xi = \frac{T_1}{T_2} = \frac{2R+d_1}{2R+d_2}$. $\beta = L/R$. $\varphi_H = \pi/2$, $\vec{H} \parallel Oy$ (вдоль оси наименьшего размера)

$$F(\beta, \frac{d}{R}, \varphi_H) = \frac{4\pi}{T_1 T_2} \sum_{\vec{k}} f(\beta kR) \frac{J_1^2(kR)}{k^2} \cos^2(\varphi_{\vec{k}} - \varphi_H)$$

$$\frac{1}{M_s} Han(\beta, d/R, R, \varphi_H) = 4\pi F(\ldots) - \left(\frac{R_c}{R}\right)^2$$

$2R = 0{,}42\ \mu m$; $L = 40$ nm, 60 nm; $d_1 = R \cdot 2$.

d/R	1	1/2	1/4	1/8	1/16	Uncoupled ($d/R \to \infty$)	
H_{coup}/M_s	1,10	0,979	0,844	0,723	0,632	1.22	$L = 40$ nm
χ_{in}	0,911	1,02	1,19	1,38	1,58	0,820	
H_{an}/M_s	1,27	1,12	0,957	0,811	0,705	1,42	$L = 50$ nm
χ_{in}	0,787	0,891	1,05	1,23	1,42	0,703	
H_{an}/M_s	1,12	1,25	1,05	0,885	0,766	1,61	$L = 60$ nm
χ_{in}	0,702	0,802	0,950	1,13	1,31	0,622	

Escaneado con CamScanner

Date. . . SW rectan. dot

8/IV Компоненты ФГ для rectan. dot. $G_{\alpha\beta}(\vec{s},\vec{s}')$, $\alpha,\beta = x,y$

Нужна $G_{zz}(\vec{s},\vec{s}') = \frac{2}{L}\left[\frac{1}{\sqrt{L^2+(\vec{s}-\vec{s}')^2}} - \frac{1}{|\vec{s}-\vec{s}'|}\right]$

$$\hat{G}_{(\vec{s},\vec{s}')} = \begin{pmatrix} G_{xx} & G_{xy} & 0 \\ G_{yx} & G_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & G_{zz} \end{pmatrix}, \quad G_{\alpha\beta}(\vec{s},\vec{s}') = \frac{1}{L}\int_0^L dz\,dz'\,\Gamma_{\alpha\beta}(\vec{r},\vec{r}')$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\vec{r},\vec{r}') = -\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x'_\beta}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad Tr\left[G_{\alpha\beta}(\vec{s},\vec{s}')\right] = -\delta_{\alpha\beta}\ln\ldots$$

Далее нашли $g_{\alpha\beta}(xy,x') = \int dy'\,G_{\alpha\beta}(xy,x'y')$ как в 29/III.

$$G_{yy}(\vec{s},\vec{s}') = \frac{1}{L}\int dz\,dz'(-1)\frac{\partial^2}{\partial y\partial y'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{\partial^2}{\partial y\partial y'}\cdot\frac{1}{L}\int dz\,dz'\frac{1}{\sqrt{\Delta^2+(z-z')^2}}$$

$$\left(\text{см. 29/III}\right) = -\frac{\partial^2}{\partial y\partial y'}\cdot\frac{2}{L}\left[L\,\mathrm{Arsh}\frac{L}{\Delta} + |\Delta| - \sqrt{\Delta^2+L^2}\right], \quad \Delta^2 = (x-x')^2+(y-y')^2 = (\vec{s}-\vec{s}')^2$$

И вообще при $\alpha,\beta = x,y$ (G_{zz} вдоль ортогонально и время):

$$G_{\alpha\beta}(\vec{s},\vec{s}') = -\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x'_\beta}\cdot\frac{2}{L}\left[L\,\mathrm{Arsh}\left(\frac{L}{\Delta}\right) + |\Delta| - \sqrt{L^2+\Delta^2}\right], \quad |\Delta| = |\vec{s}-\vec{s}'|$$

$$\boxed{G_{\substack{\alpha\beta \\ (\vec{s},\vec{s}')}} = -\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x'_\beta}F(\Delta)} \qquad F(\Delta) = \frac{2}{L}\left[L\,\mathrm{Arsh}\left(\frac{L}{|\Delta|}\right) + |\Delta| - \sqrt{L^2+\Delta^2}\right]$$

$$\mathrm{Arsh}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), \quad |\Delta| = |\vec{s}-\vec{s}'|, \quad \Delta = \sqrt{\textstyle\sum_\alpha (x_\alpha - x'_\alpha)^2}$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial|\Delta|}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} = \frac{1}{2\Delta}2(x_\alpha - x'_\alpha) = \frac{(x_\alpha - x'_\alpha)}{\Delta}$$

$$\frac{\partial^2|\Delta|}{\partial x_\alpha \partial x'_\beta} = \frac{\partial}{\partial x'_\beta}\frac{(x_\alpha - x'_\alpha)}{\Delta} = -\frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial\Delta}{\partial x'_\beta}(x_\alpha - x'_\alpha) + \frac{1}{\Delta}(-\delta_{\alpha\beta}) =$$

$$= \left|\frac{\partial\Delta}{\partial x'_\beta} = -\frac{\partial\Delta}{\partial x_\beta} = -\frac{(x_\beta - x'_\beta)}{\Delta}\right| = -\frac{1}{\Delta^2}(-1)\frac{(x_\beta - x'_\beta)}{\Delta}(x_\alpha - x'_\alpha) - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\Delta} =$$

$$= \frac{1}{\Delta^3}(x_\alpha - x'_\alpha)(x_\beta - x'_\beta) - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\Delta}$$

$$G_{\alpha\beta}(\vec{s},\vec{s}') = -\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x'_\beta}F(\Delta) = -F''(\Delta)\frac{\partial\Delta}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\Delta}{\partial x'_\beta} - F'(\Delta)\frac{\partial^2\Delta}{\partial x_\alpha \partial x'_\beta} =$$

$$= +F''(\Delta)\frac{(x_\alpha - x'_\alpha)(x_\beta - x'_\beta)}{\Delta^2} + \frac{F'(\Delta)}{\Delta}\left[\delta_{\alpha\beta} - \frac{(x_\alpha - x'_\alpha)(x_\beta - x'_\beta)}{\Delta^2}\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} G_{xx}(\vec{s},\vec{s}') &= F''(\Delta)\frac{(x-x')^2}{\Delta^2} + \frac{F'(\Delta)}{\Delta}\left[1 - \frac{(x-x')^2}{\Delta^2}\right] \\ G_{yy}(\vec{s},\vec{s}') &= F''(\Delta)\frac{(y-y')^2}{\Delta^2} + \frac{F'(\Delta)}{\Delta}\left[1 - \frac{(y-y')^2}{\Delta^2}\right] \end{aligned}}$$

Escaneado con CamScanner

Date.

$$G_{zz}(\vec{\rho},\vec{\rho}') = \frac{2}{L}\left[\frac{1}{\sqrt{L^2+\Delta^2}} - \frac{1}{|\Delta|}\right]$$

$G_{xx} + G_{yy} + G_{zz} = \mathrm{Tr}\,(G_{\alpha\beta}) = F''(\Delta) + \frac{1}{\Delta}F'(\Delta) + \frac{2}{L}\left[\frac{1}{\sqrt{L^2+\Delta^2}} - \frac{1}{|\Delta|}\right] =$

$= -4\pi\delta(\vec{\rho}-\vec{\rho}')$ – должно выполняться.

$$F'(\Delta) = \frac{\partial F(\Delta)}{\partial \Delta} = \frac{2}{L}\left[L\,\frac{1}{\sqrt{\frac{L^2}{\Delta^2}+1}}\,\frac{L(-1)}{\Delta^2} + 1 - \frac{\Delta}{\sqrt{L^2+\Delta^2}}\right]\frac{\partial|\Delta|}{\partial\Delta} =$$

$$= \frac{2}{L}\left[-\frac{L^2}{|\Delta|}\,\frac{1}{\sqrt{L^2+\Delta^2}} + 1 - \frac{|\Delta|}{\sqrt{L^2+\Delta^2}}\right](\cdot) = \frac{2}{L}\left[1 - \frac{\sqrt{L^2+\Delta^2}}{|\Delta|}\right]\frac{\partial|\Delta|}{\partial\Delta}$$

$$F''(\Delta) = \frac{\partial}{\partial\Delta}F'(\Delta) = \frac{\partial}{\partial\Delta}\,\frac{2}{L}\left[1 - \frac{1}{|\Delta|}\sqrt{L^2+\Delta^2}\right]\frac{\partial|\Delta|}{\partial\Delta} =$$

$$= \frac{2}{L}(-1)\frac{\partial|\Delta|}{\partial\Delta}\left[-\frac{1}{\Delta^2}\sqrt{L^2+\Delta^2} + \frac{1}{|\Delta|}\,\frac{1\cdot|\Delta|}{\sqrt{L^2+\Delta^2}}\right]\frac{\partial|\Delta|}{\partial\Delta} +$$

$$+ \frac{2}{L}\left[1 - \frac{1}{|\Delta|}\sqrt{L^2+\Delta^2}\right]\frac{\partial^2|\Delta|}{\partial\Delta^2} = -\frac{2}{L}\left(\frac{\partial|\Delta|}{\partial\Delta}\right)^2\left(-\frac{L^2}{\Delta^2}\right)\frac{1}{\sqrt{L^2+\Delta^2}} +$$

$$+ \frac{2}{L}\left[1 - \frac{1}{|\Delta|}\sqrt{L^2+\Delta^2}\right]\frac{\partial^2|\Delta|}{\partial\Delta^2}$$

$$\mathrm{Tr}\left[G_{\alpha\beta}(\vec{\rho},\vec{\rho}')\right] = \frac{2L}{\Delta^2}\,\frac{1}{\sqrt{L^2+\Delta^2}}\left(\frac{\partial|\Delta|}{\partial\Delta}\right)^2 + \frac{2}{L}\left[1 - \frac{\sqrt{L^2+\Delta^2}}{|\Delta|}\right]\frac{\partial^2|\Delta|}{\partial\Delta^2} +$$

$$+ \frac{2}{L|\Delta|}\left[1 - \frac{\sqrt{L^2+\Delta^2}}{|\Delta|}\right]\frac{\partial|\Delta|}{\partial\Delta} + \frac{2}{L}\left[\frac{1}{\sqrt{L^2+\Delta^2}} - \frac{1}{|\Delta|}\right]$$

$|\Delta| = \Delta = |\vec{\rho}-\vec{\rho}'|$

$|\Delta|$ и Δ – одно и то же.

но $|\Delta|$ нужно для $\delta(x)$

Пусть $|\Delta| \neq 0$, тогда $\left(\partial|\Delta|/\partial\Delta\right)^2 = 1$, $\frac{\partial^2|\Delta|}{\partial\Delta^2} = 0$ и

$$\mathrm{Tr}\left[G_{\alpha\beta}(\rho,\rho')\right] = \frac{2L}{\Delta^2}\,\frac{1}{\sqrt{L^2+\Delta^2}} + \frac{2}{L|\Delta|}\left[1 - \frac{\sqrt{L^2+\Delta^2}}{|\Delta|}\right](\pm 1) + \frac{2}{L}\left[\frac{1}{\sqrt{L^2+\Delta^2}} - \frac{1}{|\Delta|}\right] =$$

$$= \left|1 \pm 1\right| = \frac{2}{L}\,\frac{1}{\sqrt{L^2+\Delta^2}}\left[\frac{L^2}{\Delta^2} - \frac{(L^2+\Delta^2)}{\Delta^2} + 1\right] = 0, \text{ верно (!)}. \quad |\Delta| = |\vec{\rho}-\vec{\rho}'|.$$

$f(x) = |x|$, $\frac{\partial|x|}{\partial x}$ 

, $\frac{\partial^2|x|}{\partial x^2} \sim \delta(x)$, $\frac{\partial^2|x|}{\partial x^2} = 2\delta(x)$

$$F(\Delta) \to \Phi\left(\frac{|\Delta|}{L}\right) = \mathrm{Arsh}\left(\frac{L}{|\Delta|}\right) + \frac{|\Delta|}{L} - \sqrt{1+\frac{\Delta^2}{L^2}}, \qquad F(\Delta) = 2\Phi\left(\frac{|\Delta|}{L}\right)$$

$$\Phi(x) = \mathrm{Arsh}\left(\frac{1}{x}\right) + x - \sqrt{1+x^2}, \quad x = \frac{\Delta}{L}.$$

$$\mathrm{Arsh}(x) = \mathrm{Arth}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \mathrm{Arsh}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{Arth}\,\frac{1/x}{\sqrt{1/x^2+1}} = \mathrm{Arth}\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Next Page Расматриваем $\Phi(x)$, $x = \frac{|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|}{L}$ нужно ли при $x \ll 1$, ли при $x \gg 1$.

Escaneado con CamScanner

Date. 10 . 06 .

10/VI План работы на 5 лет. Время

→ 1) Закончить и отпр. PRB-SW и продвинуться SW-статья со со (нет)
2) Продвинуться SW PRL-Rect. d. paper со Славиным — Дон. и разобраться в методе расчета Вейвлета (линейная - динамика)
3) Ск. с Мелиховым - vortex stability и vortex lattice с $\delta = 2, -1$.
4) Начать расчет с Ивановым собств. частот вортекса.
→ 5) Продвинуться ск. с Новосадом ("rigid V. model", coupled and real. data)
6) Посчитать МРД вортекса $R_c(L)$ с двумя „core" $m_0(\delta^2)$
7) Посчитать сдвиг $R_c(L)$ в гекстан./square array и Ψ_n в цепочке (rect. array) для Новосада — JAP (Ск. [illegible])
8) fourfold анизотропия $\gamma(\varphi_n)$, $H_{n,an}(\varphi_n)$ в square array с Новосад
→ 9) Послать отзыв в APL (JAP)
→ 10) Заполнить и послать анкеты для visa в Seagate
→ 11) Напомнить Юле, чтобы привезла инст. и канц. диплом и выпис с оцен
12) Интерфер. эксперимент Нов.-Grimsditch по SW. rect. dots
→ 13) Послать Abstracts на MMM-Seattle (с Нов., Ив., Слав.).
→ 14) Отослать signed Soffer-letter и разобраться с докум-ми
→ 15) INTAS - отчет для Иванова
→ 16) Разобрать SW-paper Chantrell'a (линейная - dynamics)

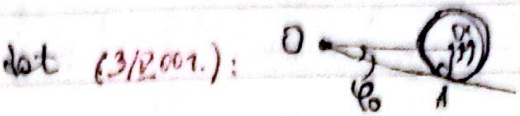
Escaneado con CamScanner

H_n gua dot array (m. coupling)

Date. 13.06.

Поле nucleation в решетке m. coupled dots (H_n).

Обобщение „Buckle" dot model от 30-31/III 007. на dot array.

Для single „buckle" dot (3/IV 007.):  — вихрь имеет центр в т. 0 вне диска.

$$W_{buckle}(\varphi_0) = W_{ex}(\varphi_0) + W_m(\varphi_0) + W_H(\varphi_0)$$

$$w_{ex}(\varphi_0) = -\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \ln\cos\varphi_0$$ — на ед. объема $V_d = \pi R^2 L$ - диска и $1/M_s^2$.

$$w_m(\varphi_0) = \frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{dk}{k} f(kL)\, J_\mu^2(kR)\,|I_\mu(\varphi_0)|^2$$ — surface side charges

$$I_\mu(\varphi_0) = \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{\cos\varphi\, e^{i\mu\varphi}}{\sqrt{1+\sin^2\varphi_0 + 2\sin\varphi_0\sin\varphi}}$$

$$w_H(\varphi_0) = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{\sin^2\varphi_0}\,\mathcal{J}(\varphi_0)\left(\frac{H}{M_s}\right), \quad \mathcal{J}(\varphi_0) = \int_0^{\varphi_0} d\varphi\cos^2\varphi\sqrt{\sin^2\varphi_0 - \sin^2\varphi}$$

→ Для m. coupled dots надо изменить только $W_m(\varphi_0)$ и посчитать ее хотя с точностью до φ_0^2.

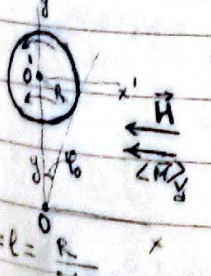
$W_m(\varphi_0)$ считаем так же как $W_m(s)$ для Han of m. coupled dots от 13/IV 007.

На ед. объема имеем $$W_m = 2\pi\sum_{\vec{k}}\frac{f(kL)}{k^2}\left|(\vec{k}\cdot\vec{M}_{\vec{k}})\right|^2$$

Физически надо заменить $F_\beta(\beta) = \pi\int_0^{\infty}\frac{dt}{t} f(\beta t)\left[J_1^2(t) - J_2^2(t)\right]$ на $\tilde{F}_\beta$ зависящую от d/R и φ_H. $h_n = 4\left[F_\beta(\beta) - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2\right]$ - isolated dot.

Все диски одинаковы, $S_0 = T_1 T_2$.

$$M_{\vec{k}}^{\alpha} = \frac{1}{S_{ar.}}\int_{S_d} d^2\vec{\rho}\, M_\alpha(\vec{\rho})\, e^{i\vec{k}\vec{\rho}}, \quad \left(\frac{\vec{k}}{k}\cdot\vec{M}_k\right) = \frac{1}{S_{ar.}}\int_{S_d} d^2\vec{\rho}\, e^{i\vec{k}\vec{\rho}}\left[M_x\cos\varphi_{\vec{k}} + M_y\sin\varphi_{\vec{k}}\right]$$



В сист. координат $x'y'z'$ с центром в т. O' — в центре диска ($x'^2 + y'^2 = R^2$ - граница диска).

$$M_{x'}(\vec{\rho}') = -M_s\frac{(y'+\ell)}{\sqrt{x'^2 + (y'+\ell)^2}}, \quad M_{y'}(\vec{\rho}') = M_s\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + (y'+\ell)^2}}$$

$OO' = \ell = \frac{R}{\sin\varphi_0}$

$$\sqrt{(\cdot)} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + 2y'\ell + \ell^2} = \sqrt{\rho'^2 + \ell^2 + 2\rho'\sin\varphi'\cdot\ell}$$

$$M_x(\rho')\cos\varphi_{\vec{k}} + M_y(\rho')\sin\varphi_{\vec{k}} = \frac{M_s}{\sqrt{(\cdot)}}\left[-(\rho'\sin\varphi' + \ell)\cos\varphi_{\vec{k}} + \rho'\cos\varphi'\sin\varphi_{\vec{k}}\right]$$

$$= \frac{M_s}{\sqrt{\rho'^2 + \ell^2 + 2\rho'\sin\varphi'\ell}}\left[-\ell\cos\varphi_{\vec{k}} + \rho'\sin(\varphi_{\vec{k}} - \varphi')\right], \quad \ell = \frac{R}{\sin\varphi_0}$$

$$\left(\vec{M}(\rho')\cdot\frac{\vec{k}}{k}\right) = \frac{M_s}{\sqrt{\rho'^2\sin^2\varphi_0 + R^2 + 2\rho'\sin\varphi' R\sin\varphi_0}}\left[-R\cos\varphi_{\vec{k}} + \rho'\sin(\varphi_k - \varphi')\sin\varphi_0\right]$$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$$\sqrt{\rho'^2\sin^2\varphi_0 + R^2 + 2R\rho'\sin\theta_0\sin\varphi_0} = \sqrt{a + b\sin\varphi'} \quad \begin{cases} a = \rho'^2\sin^2\varphi_0 + R^2 \\ b = 2R\rho'\sin\theta_0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a+b\sin\varphi'}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left[1 - \frac{b}{2a}\sin\varphi' + \frac{3}{8}\frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi'\right] + O(\varphi_0^3) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{2}\frac{b}{R^3}\sin\varphi' + \frac{3}{8}\frac{b^2}{R^3}\sin^2\varphi' + O(\varphi_0^3), \quad \theta_0 = 1$$

$$S_0\left(\frac{\vec{k}}{k}\cdot\vec{M}_k\right) = \int_{S_d} d^2\rho'\, e^{i\vec{k}\vec{\rho}'}\left[M_x\cos\varphi_k + M_y\sin\varphi_k\right] = \left|\vec{\rho}'\cdot\vec{r}\right| =$$

(b сила вектор, o' центр диска)

$$= M_s\int_{S_d} d^2\rho'\, e^{ik\rho'}\,\frac{\left[-R\cos\varphi_k + \rho\sin(\varphi_k-\varphi)\sin\theta_0\right]}{\sqrt{a+b\sin\varphi'}} = M_s\int_{S_d} d^2\rho' \sum_n i^n J_n(k\rho)\, e^{in(\varphi_k-\varphi)}\cdot$$

$$\cdot\left[-R\cos\varphi_k + \rho\sin(\varphi_k-\varphi)\sin\theta_0\right]\left[\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{2}\frac{b}{R^3}\sin\varphi + \frac{3}{8}\frac{b^2}{R^3}\sin^2\varphi\right] =$$

$$= M_s\int_0^R d\rho\,\rho\int_0^{2\pi} d\varphi \sum_n i^n J_n(k\rho)\, e^{-in\varphi_k} e^{in\varphi}\left[-\frac{R\cos\varphi_k}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2}\frac{b}{R^2}\sin\varphi\cos\varphi_k - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{8}\frac{b^2}{R^4}\sin^2\varphi\cos\varphi_k + \frac{\rho}{R}\sin(\varphi_k-\varphi)\sin\theta_0 - \frac{1}{2}\frac{b}{R^3}\sin\varphi\,\rho\sin\theta_0\sin(\varphi_k-\varphi)\right]$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{in\varphi} = 2\pi\delta_{n0}, \quad \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{in\varphi}\sin\varphi = \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{in\varphi}\left[e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\,2\pi\left[\delta_{n,-1} - \delta_{n1}\right] = i\pi\left[\delta_{n1} - \delta_{n,-1}\right]$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{in\varphi}\sin^2\varphi = \frac{1}{2}\int d\varphi\, e^{in\varphi}\left[1-\cos 2\varphi\right] = \frac{1}{2}2\pi\delta_{n0} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int d\varphi e^{in\varphi}\left[e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}\right]$$

$$= \pi\delta_{n0} - \frac{1}{4}\cdot 2\pi\left[\delta_{n,-2} + \delta_{n2}\right]$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{in\varphi}\cos\varphi = \frac{1}{2}\int d\varphi e^{in\varphi}\left[e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right] = \pi\left[\delta_{n1} + \delta_{n,-1}\right]$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{in\varphi}\sin\varphi\sin(\varphi_k-\varphi) = \int d\varphi\, e^{in\varphi}\sin\varphi\left[\sin\varphi_k\cos\varphi - \sin\varphi\cos\varphi_k\right] =$$

$$= \sin\varphi_k\,\frac{1}{2}\int d\varphi\, e^{in\varphi}\sin 2\varphi - \cos\varphi_k\int d\varphi\, e^{in\varphi}\sin^2\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\varphi_k\,\frac{1}{2i}\int d\varphi\, e^{in\varphi}\left(e^{i2\varphi} - e^{-i2\varphi}\right) - \cos\varphi_k(\ldots) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\varphi_k\,\frac{1}{2i}\,2\pi\left[\delta_{n,-2} - \delta_{n2}\right] - \cos\varphi_k\left\{\pi\delta_{n0} - \frac{\pi}{2}\left[\delta_{n2} + \delta_{n,-2}\right]\right\} =$$

$$= -\pi\cos\varphi_k\,\delta_{n0} + \frac{\pi i}{2}\sin\varphi_k\left[\delta_{n2} - \delta_{n,-2}\right] + \cos\varphi_k\,\frac{\pi}{2}\left[\delta_{n2} + \delta_{n,-2}\right] =$$

$$= -\pi\cos\varphi_k\,\delta_{n0} + \frac{\pi}{2}\delta_{n2}e^{i\varphi_k} + \frac{\pi}{2}\delta_{n,-2}e^{-i\varphi_k}$$

$$\rightarrow S_0\left(\frac{\vec{k}}{k}\cdot\vec{M}_k\right) = M_s\int_0^R d\rho\,\rho\sum_n i^n J_n(k\rho)\, e^{-in\varphi_k}\left[-\frac{R\cos\varphi_k}{\sqrt{a}}\cdot 2\pi\delta_{n0} + \frac{1}{2}\frac{b\cos\varphi_k}{R^2}\cdot i\pi\left[\delta_{n1}\right.\right.$$

Escaneado con CamScanner

Date.

$$-\frac{3}{8}\frac{B^2}{R^4}\cos\varphi_k\left\{\pi\delta_{\mu 0}-\frac{\pi}{2}\left[\delta_{\mu 2}+\delta_{\mu,-2}\right]\right\}+\frac{\beta}{R}\sin\varphi_0\left[\sin\varphi_k\,\pi\left(\delta_{\mu 1}+\delta_{\mu,-1}\right)-\right.$$

$$\left.-\cos\varphi_k\,i\pi\left(\delta_{\mu 1}-\delta_{\mu,-1}\right)\right]-\frac{1}{2}\frac{B}{R^3}\beta\sin\varphi_0\left[-\pi\cos\varphi_k\delta_{\mu 0}+\frac{\pi}{2}\delta_{\mu 2}e^{i\varphi_k}+\frac{\pi}{2}\delta_{\mu,-2}e^{-i\varphi_k}\right]=$$

$$=\pi M_s\int_0^{\beta}d\varphi_0\sum_{\mu}i^{\mu}J_{\mu}e^{-i\mu\varphi_k}\left[\left(\frac{-2R\cos\varphi_k}{\sqrt{a}}+\frac{1}{2}\frac{B\beta\sin\varphi_0}{R^3}\cos\varphi_k-\frac{3}{8}\frac{B^2}{R^4}\cos\varphi_k\right)\delta_{\mu 0}+\right.$$

$$+\delta_{\mu 1}\left(\frac{1}{2}\frac{B\cos\varphi_k\, i}{R^2}+\frac{\beta}{R}\sin\varphi_0\sin\varphi_k-i\cos\varphi_k\frac{\beta}{R}\sin\varphi_0\right)+$$

$$+\delta_{\mu,-1}\left(-\frac{1}{2}\frac{B\cos\varphi_k\, i}{R^2}+\frac{\beta}{R}\sin\varphi_0\sin\varphi_k+i\cos\varphi_k\frac{\beta}{R}\sin\varphi_0\right)+$$

$$+\delta_{\mu 2}\left(\frac{3}{16}\frac{B^2}{R^4}\cos\varphi_k-\frac{1}{4}\frac{B}{R^3}\beta\sin\varphi_0 e^{i\varphi_k}\right)+$$

$$\left.+\delta_{\mu,-2}\left(\frac{3}{16}\frac{B^2}{R^4}\cos\varphi_k-\frac{1}{4}\frac{B}{R^3}\beta\sin\varphi_0 e^{-i\varphi_k}\right)\right]=$$

$$=\pi M_s\int_0^{\beta}d\varphi_0\sum_{\mu}i^{\mu}J_{\mu}e^{-i\mu\varphi_k}\left[\left(-\frac{2R}{\sqrt{a}}+\frac{\beta^2\sin^2\varphi_0}{R^2}-\frac{3}{8}\frac{4R^2\beta^2\sin^2\varphi_0}{R^4}\right)\cos\varphi_k\delta_{\mu 0}+\right.$$

$$+\delta_{\mu 1}\left(\frac{\beta}{R}\sin\varphi_0\sin\varphi_k\right)+\delta_{\mu,-1}\cdot\left(\frac{\beta}{R}\sin\varphi_0\sin\varphi_k\right)+$$

$$+\delta_{\mu 2}\left(\frac{3}{16}\frac{1}{R^4}4R^2\beta^2\sin^2\varphi_0\cos\varphi_k-\frac{1}{4}\frac{2R\beta\sin\varphi_0}{R^3}\beta\sin\varphi_0 e^{i\varphi_k}\right)+$$

$$\left.+\delta_{\mu,-2}\left(\frac{3}{16}\frac{1}{R^4}4R^2\beta^2\sin^2\varphi_0\cos\varphi_k-\frac{1}{4}\frac{2R\beta\sin\varphi_0}{R^3}\beta\sin\varphi_0 e^{-i\varphi_k}\right)\right]=$$

$$=\pi M_s\int_0^{\beta}d\varphi_0\sum_{\mu}i^{\mu}J_{\mu}e^{-i\mu\varphi_k}\left[\left(-\frac{2R}{\sqrt{a}}-\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{R^2}\sin^2\varphi_0\right)\cos\varphi_k\delta_{\mu 0}+\right.$$

$$+\delta_{\mu 1}\left(\frac{\beta}{R}\sin\varphi_0\sin\varphi_k\right)+\delta_{\mu,-1}\cdot\left(\frac{\beta}{R}\sin\varphi_0\sin\varphi_k\right)+$$

$$\left.+\delta_{\mu 2}\frac{\beta^2}{2R^2}\sin^2\varphi_0\left(\frac{3}{2}\cos\varphi_k-e^{i\varphi_k}\right)+\delta_{\mu,-2}\frac{\beta^2}{2R^2}\sin^2\varphi_0\left(\frac{3}{2}\cos\varphi_k-e^{-i\varphi_k}\right)\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{R}{\sqrt{R^2+\beta^2\sin^2\varphi_0}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{R}\right)^2\sin^2\varphi_0}}=1-\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{R^2}\sin^2\varphi_0+O(\varphi_0^4)$$

$$-2\frac{R}{\sqrt{a}}-\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{R^2}\sin^2\varphi_0=-2\left(1-\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{R^2}\sin^2\varphi_0\right)-\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{R^2}\sin^2\varphi_0=-2+\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{R^2}\sin^2\varphi_0$$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$$S_0\left(\frac{\vec{k}}{k}\cdot\vec{M}_k\right) = \pi M_s \int_0^R d\rho\rho \left[\left(-2+\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_0\right) J_0(k\rho)\cos\varphi_k + \right.$$

$$+ (+i)\, J_1 e^{i\varphi_k}\left(\frac{\rho}{R}\sin\varphi_0 \sin\varphi_k \right) + (-i) J_{-1} e^{i\varphi_k}\left(\frac{\rho}{R}\sin\varphi_0 \sin\varphi_k\right.$$

$$+ (-1) J_2 e^{-i2\varphi_k}\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_0\left(\frac{3}{2}\cos\varphi_k - e^{i\varphi_k}\right) + (-1) J_{-2} e^{i2\varphi_k}\frac{\rho^2}{2R^2}\sin^2\varphi_0\left(\frac{3}{2}\cos\varphi_k - e^{i\varphi_k}\right.$$

$$= \pi M_s \int d\rho\rho \left[\left(-2+\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_0\right) J_0(k\rho)\cos\varphi_k + 2 J_1 \frac{\rho}{R}\sin\varphi_0 (i)\sin\varphi_k \cos\varphi_k + \right.$$

$$\left. + J_2 \cdot \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_0 (-1)\left\{ \frac{3}{2}\cos\varphi_k \left(e^{i2\varphi_k} + e^{-i2\varphi_k}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - e^{-i\varphi_k} - e^{i\varphi_k} \right\}\right] = \pi M_s \int d\rho\rho \left[\left(-2+\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_0\right) J_0(k\rho)\cos\varphi_k + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} i\, J_1(k\rho)\sin 2\varphi_k \left(\frac{\rho}{R}\sin\varphi_0 \right) - \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_0 J_2(k\rho)\left\{ \frac{3}{2}\cos\varphi_k \cdot 2\cos 2\varphi_k - \right.$$

$$\left.\left. - 2\cos\varphi_k \right\}\right] = \pi M_s \cos\varphi_k \int d\rho\rho \left[\left(-2+\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_0\right) J_0(k\rho) + \right.$$

$$\left. + 2 i\, J_1(k\rho)\sin\varphi_k \left(\frac{\rho}{R}\sin\varphi_0 \right) - \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_0 J_2(k\rho)\left\{ 3\cos 2\varphi_k - 2 \right\}\right] =$$

$$= \pi M_s \cos\varphi_k \int d\rho\rho \left[-2 J_0(k\rho) - \right. \quad . \quad +$$

$$\left. + i\, J_1(k\rho)\sin\varphi_k \frac{\rho}{R}\sin\varphi_0 - \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_0 \left[J_2(k\rho)\left\{ 3\cos 2\varphi_k - 2 \right\} - J_0(k\rho) \right]\right]$$

Проверка. $\varphi_0 = 0$ Cooke. uniform dot array.

$$S_0\left(\frac{\vec{k}}{k}\cdot\vec{M}_k\right) = \pi M_s \cos\varphi_k \int d\rho\rho \left[-2 J_0(k\rho) - 2i\, J_1(k\rho)\sin\varphi_k \right]$$

$$W_m(\varphi_0 = 0) = 2\pi \sum_{\vec{k}} f(kL) \left| \frac{\vec{k}}{k}\cdot\vec{M}_k \right|^2 = 2\pi \sum_{\vec{k}} f(kL) \left| \dots \right|^2$$

$$S_0^2 \left| \left(\frac{\vec{k}}{k}\cdot\vec{M}_k\right) \right|^2 = (\pi M_s)^2 \cos^2\varphi_k\, 2^2 \left| \int_0^R d\rho\rho \left[J_0(k\rho) + i J_1(k\rho)\sin\varphi_k \right] \right|^2$$

сорвано, знак с $J_1(k\rho)$ меняет. Найти ошибку.

Ошибка на пред. стр. в знаках $\delta_{k,\pm 1}$. Уравнение интеграла

Теперь при $\varphi_0 = 0$ получим

$$S_0\left(\frac{\vec{k}}{k}\vec{M}_k\right) = -2\pi M_s \cos\varphi_k \int_0^R d\rho\rho\, J_0(k\rho) \sim \frac{1}{k} J_1(kR)\cos\varphi_k \quad \text{— верно.}$$

$$S_0\left(\frac{\vec{k}}{k}\cdot\vec{M}_k\right) = \pi M_s \cos\varphi_k \int_0^R d\rho\rho \left[-2 J_0(k\rho) + 2i\, J_1(k\rho)\sin\varphi_k \frac{\rho}{R}\sin\varphi_0 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_0 \left[J_2(k\rho)(3\cos 2\varphi_k - 2) - J_0(k\rho) \right]\right]$$

Escaneado con CamScanner

Data.

$$\int_0^{kR} d\rho\, J_0(k\rho) = \left| k\rho = x \right| = \frac{1}{k^2}\int_0^{kR} dx\, x J_0(x) = \frac{1}{k^2} x J_1(x)\Big|_0^{kR} = \frac{R}{k} J_1(kR)$$

$$\int_0^{kR} d\rho\, \rho^2 J_1(k\rho) = \frac{1}{k^3}\int_0^{kR} dx\, x^2 J_1(x) = \frac{1}{k^3} x^2 J_2(x)\Big|_0^{kR} = \frac{R^2}{k} J_2(kR)$$

$$\int_0^{kR} d\rho\, \rho^3 J_2(k\rho) = \frac{1}{k^4}\int dx\, x^3 J_2(x) = \frac{1}{k^4} x^3 J_3(x)\Big|_0^{kR} = \frac{R^3}{k} J_3(kR)$$

$$\int_0^{kR} d\rho\, \rho^3 J_0(k\rho) = \frac{1}{k^4}\int dx\, x^3 J_0(x) = \left| \begin{array}{l} dx\, x J_0(x) = dv \\ v = x J_1(x),\ x^2 = u \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{k^4} x^2 \cdot x J_1(x)\Big|_0^{\cdot} - \frac{1}{k^4} 2\int x J_1(x)\, x\, dx = \frac{x^3}{k^4} J_1(x)\Big|_0^{kR} -$$

$$- \frac{2}{k^4}\int dx\, x^2 J_1(x) = \frac{R^3}{k} J_1(kR) - \frac{2}{k^4} x^2 J_2(x)\Big|_0^{\cdot} = \frac{R^3}{k} J_1(kR) - \frac{2}{k^2} R^2 J_2(kR)$$

$$\left(\frac{\vec{k}}{k}\cdot\vec{M}_k\right) = \frac{1}{S_0}\pi M_s \cos\varphi_k \left[-2\frac{R}{k} J_1(kR) + 2i\sin\varphi_k \frac{\sin\varphi_0}{R}\frac{R^2}{k} J_2(kR) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\frac{\sin^2\varphi_0}{R^2}\left[(3\cos 2\varphi_k - 2)\frac{R^3}{k} J_3(kR) - \frac{R^3}{k} J_1(kR) + \frac{2R^2}{k^2} J_2(kR) \right] \right] =$$

$$= \frac{\pi}{S_0} M_s \cos\varphi_k \frac{R}{k}\left[-2 J_1(kR) + 2i\sin\varphi_k \sin\varphi_0 J_2(kR) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\sin^2\varphi_0 \left\{ (3\cos 2\varphi_k - 2) J_3(kR) - J_1(kR) + \frac{2}{kR} J_2(kR) \right\} \right]$$

$J_3(kR)$ – неверно задано

$$\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x),$$

$$J_3(x) = \frac{4}{x} J_2(x) - J_1(x), \quad \frac{2\cdot 2}{x} J_2(x) = J_1(x) + J_3(x)$$

$$\left(\frac{\vec{k}}{k}\cdot\vec{M}_k\right) = \frac{\pi R}{S_0} M_s \frac{\cos\varphi_k}{k}\left[-2 J_1(kR) + 2i\sin\varphi_k \sin\varphi_0 J_2(kR) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\sin^2\varphi_0 \left\{ 3\cos 2\varphi_k - 1 \right\} J_3(kR) \right]$$

$$\left|\left(\frac{\vec{k}}{k}\cdot\vec{M}_k\right)\right|^2 = \left(\frac{\pi R M_s}{S_0}\right)^2 \frac{\cos^2\varphi_k}{k^2}\left[4 J_1^2(kR) + 2(-2) J_1(kR)\left(-\frac{1}{2}\right)\sin^2\varphi_0 \{\dots\} J_3 + \right.$$

$$\left. + 2^2 \sin^2\varphi_k \sin^2\varphi_0 J_2^2(kR) \right] = \left(\frac{\pi R M_s}{S_0}\right)^2 \frac{\cos^2\varphi_k}{k^2}\left[4 J_1^2(kR) + \right.$$

$$\left. + 2\sin^2\varphi_0 \left\{ 3\cos 2\varphi_k - 1 \right\} J_1(kR) J_3(kR) + 4\sin^2\varphi_0 \sin^2\varphi_k J_2^2(kR) \right]$$

Проверим корректность при $\sin^2\varphi_0$.

$\cos 2\varphi_k = \cos^2\varphi_k - \sin^2\varphi_k = \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2}$ дает в. реш. $\vec{k} = 2\pi\left(\frac{n_1}{T_1}, \frac{n_2}{T_2}\right)$

Для частот. массив $\langle \cos 2\varphi_k \rangle_{flat} \neq 0$.

$\frac{1}{\sin\varphi_0} = S \gg 1$ – vortex shift

Escaneado con CamScanner

H_n – "bucle" del
in. coupled array

Date. 14. 06.

Проверим расчет $\left(\vec{k}\cdot\vec{M}_k\right)$ для "bucle" – dot.

$$\left(\vec{M}(\rho')\cdot\frac{\vec{k}}{k}\right) = M_s\,\frac{\left[-R\cos\varphi_k + \rho'\sin(\varphi_k-\varphi')\sin\varphi_0\right]}{\sqrt{\rho'^2\sin^2\varphi_0 + R^2 + 2R\rho'\sin\varphi'\sin\varphi_0}} = \left|\varphi_0 \ll 1\right| =$$

$$= M_s\left[-R\cos\varphi_k + \sin\varphi_0\,\rho'\sin(\varphi_k-\varphi')\right]\left[\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{2}\frac{\beta}{R^3}\sin\varphi' + \frac{3}{8}\frac{\beta^2}{R^5}\sin^2\varphi'\right] =$$

$$= M_s\left[-\frac{R\cos\varphi_k}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2}R\cos\varphi_k\,\frac{\beta}{R^3}\sin\varphi' - \frac{3}{8}\frac{\beta^2}{R^4}\cos\varphi_k\sin^2\varphi' + \right.$$

$$\left. + \sin\varphi_0\sin(\varphi_k-\varphi')\frac{\rho'}{R} - \frac{1}{2}\frac{\beta}{R^3}\sin\varphi'\sin\varphi_0\,\rho'\sin(\varphi_k-\varphi') + O(\varphi_0^3)\right] =$$

$$= M_s\left[-\frac{R\cos\varphi_k}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2}R\cos\varphi_k\,\frac{2R\rho'\sin\varphi_0}{R^3}\sin\varphi' - \frac{3}{8}\,\frac{4R^2\rho'^2\sin^2\varphi_0}{R^4}\cos\varphi_k\sin^2\varphi' + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho'}{R}\sin\varphi_0\sin(\varphi_k-\varphi') - \frac{1}{2}\,\frac{2R\rho'\sin\varphi_0}{R^3}\sin\varphi'\sin\varphi_0\,\rho'\sin(\varphi_k-\varphi')\right] =$$

$$= M_s\left[-\frac{R\cos\varphi_k}{\sqrt{a}} + \frac{\rho'}{R}\sin\varphi_0\cos\varphi_k\sin\varphi' - \frac{3}{2}\frac{\rho'^2}{R^2}\sin^2\varphi_0\cos\varphi_k\sin^2\varphi' + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho'}{R}\sin\varphi_0\left\{\sin\varphi_k\cos\varphi' - \sin\varphi'\cos\varphi_k\right\} - \frac{\rho'^2}{R^2}\sin^2\varphi_0\sin\varphi'\sin(\varphi_k-\varphi')\right] =$$

$$= M_s\left[-\frac{R\cos\varphi_k}{\sqrt{a}} + \frac{\rho'}{R}\sin\varphi_0\sin\varphi_k\cos\varphi' - \frac{\rho'^2}{R^2}\sin^2\varphi_0\left\{\frac{3}{2}\cos\varphi_k\sin^2\varphi' + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sin\varphi'\sin(\varphi_k-\varphi')\right\}\right] \cdot \quad \frac{R}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\rho'^2}{R^2}\sin^2\varphi_0}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{\rho'^2}{R^2}\sin^2\varphi_0$$

$$\left(\vec{M}(\rho')\cdot\frac{\vec{k}}{k}\right) = M_s\left[-\cos\varphi_k\left(1-\frac{1}{2}\frac{\rho'^2}{R^2}\sin^2\varphi_0\right) + \frac{\rho'}{R}\sin\varphi_0\sin\varphi_k\cos\varphi' - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\frac{\rho'^2}{R^2}\sin^2\varphi_0\left\{\sin\varphi_k\sin2\varphi' + \cos\varphi_k\sin^2\varphi'\right\}\right] =$$

$$= M_s\left[-\cos\varphi_k + \frac{\rho'}{R}\sin\varphi_0\sin\varphi_k\cos\varphi' - \frac{1}{2}\frac{\rho'^2}{R^2}\sin^2\varphi_0\left\{\sin\varphi_k\sin2\varphi' - \cos\varphi_k\sin^2\right.\right.$$

$$\left(\frac{\vec{k}}{k}\cdot\vec{M}_k\right) = \frac{1}{S_0}\int_{S_0} d^2\vec{\rho}\; e^{i\vec{k}\vec{\rho}}\left(\frac{\vec{k}}{k}\cdot\vec{M}(\vec{\rho})\right) = \frac{M_s}{S_0}\int_0^R d\rho\,\rho\int_0^{2\pi} d\varphi\sum_\mu i^\mu J_\mu(k\rho)e^{i\mu(\varphi-\varphi_k)}$$

$$\times\left[-\cos\varphi_k + \frac{\rho}{R}\sin\varphi_0\sin\varphi_k\cos\varphi - \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_0\left\{\sin\varphi_k\sin2\varphi - \cos\varphi_k\cos^2\varphi\right\}\right.$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i\mu\varphi}\cos\varphi = \pi\left[\delta_{\mu,1} + \delta_{\mu,-1}\right]$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i\mu\varphi}\sin2\varphi = \frac{1}{2i}\int d\varphi\, e^{i\mu\varphi}\left(e^{i2\varphi} - e^{-i2\varphi}\right) = \frac{1}{2i}2\pi\left(\delta_{\mu,-2} - \delta_{\mu,2}\right) = \pi i\left(\delta_{\mu,-2} - \delta_{\mu,2}\right)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i\mu\varphi}\cos^2\varphi = \frac{1}{2}\int d\varphi\, e^{i\mu\varphi}\left[1+\cos2\varphi\right] = \frac{1}{2}2\pi\delta_{\mu,0} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int d\varphi\, e^{i\mu\varphi}\left(e^{i2\varphi} + e^{-i2\varphi}\right) =$$

$$= \pi\delta_{\mu,0} + \frac{\pi}{2}\left(\delta_{\mu,-2} + \delta_{\mu,2}\right)$$

Escaneado con CamScanner

Date.

$$\int_0^{2\pi} d\varphi e^{i\mu\varphi}\left[\dots\right] = -\cos\varphi_k \cdot 2\pi\delta_{\mu 0} + \frac{\rho}{R}\sin\varphi_0\sin\varphi_k \cdot \pi(\delta_{\mu,1}+\delta_{\mu,-1}) -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_0\left\{\sin\varphi_k\cdot\pi i(\delta_{\mu 2}-\delta_{\mu,-2}) - \cos\varphi_k\left[\pi\delta_{\mu 0}+\frac{\pi}{2}(\delta_{\mu 2}+\delta_{\mu,-2})\right]\right\} =$$

$$= \pi\left[-\cos\varphi_k\,\delta_{\mu 0}\left(2-\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_0\right) + \frac{\rho}{R}\sin\varphi_0\sin\varphi_k(\delta_{\mu,1}+\delta_{\mu,-1}) -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_0\left\{\delta_{\mu 2}\left(-\frac{1}{2}\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k\right) + \delta_{\mu,-2}\left(-\frac{1}{2}\cos\varphi_k - i\sin\varphi_k\right)\right\}\right]$$

Домножаем и расписываем от 13/VI.

$$\left(\vec{k}\cdot\vec{M}_k\right) = \frac{M_s}{S_0}\pi\int_0^R d\rho\,\rho\sum_\mu i^\mu J_\mu e^{-i\mu\varphi_k}\left[-\cos\varphi_k\delta_{\mu 0}\left(2-\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_0\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\rho}{R}\sin\varphi_0\sin\varphi_k(\delta_{\mu,1}+\delta_{\mu,-1}) + \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_0\left\{\delta_{\mu 2}\left(\frac{1}{2}\cos\varphi_k - i\sin\varphi_k\right)+\delta_{\mu,-2}\left(\frac{\cos\varphi_k}{2}+i\sin\varphi_k\right)\right\}\right] =$$

$$= \frac{\pi M_s}{S_0}\int d\rho\,\rho\left[-\cos\varphi_k\left(2-\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_0\right)J_0(k\rho) + \frac{\rho}{R}\sin\varphi_0\sin\varphi_k\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(iJ_1 e^{-i\varphi_k} + \frac{1}{i}J_{-1}e^{i\varphi_k}\right) + \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_0\left\{\left(\frac{1}{2}\cos\varphi_k - i\sin\varphi_k\right)\left(-J_2 e^{-i2\varphi_k}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{1}{2}\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k\right)\left(-J_{-2}e^{i2\varphi_k}\right)\right\}\right] =$$

$$= \frac{\pi M_s}{S_0}\int d\rho\,\rho\left[-\cos\varphi_k\left(2-\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_0\right)J_0(k\rho) + \frac{\rho}{R}\sin\varphi_0\sin\varphi_k J_1(k\rho)\cdot 2i\cos\varphi_k +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_0(-1)J_2(k\rho)\left\{\left(\frac{1}{2}\cos\varphi_k - i\sin\varphi_k\right)e^{-i2\varphi_k} + \left(\frac{1}{2}\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k\right)e^{i2\varphi_k}\right\}\right] =$$

$$\cos\varphi_k\cdot\cos 2\varphi_k - 2\sin\varphi_k\cdot\sin 2\varphi_k$$

$$= \frac{\pi M_s}{S_0}\cos\varphi_k\int_0^R d\rho\,\rho\left[-\left(2-\frac{1}{2}\frac{\rho^2\sin^2\varphi_0}{R^2}\right)J_0(k\rho) + 2i\frac{\rho}{R}\sin\varphi_0\sin\varphi_k J_1(k\rho) -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_0 J_2(k\rho)\left\{\cos 2\varphi_k - 4\sin^2\varphi_k\right\}\right] =$$

$$= \frac{\pi M_s}{S_0}\cos\varphi_k\int_0^R d\rho\,\rho\left[-2J_0(k\rho) + 2i\frac{\rho}{R}J_1(k\rho)\sin\varphi_0\sin\varphi_k -\right.$$

за инвар. Бесс. и 2-й свойств. с 13/VI

$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_0\left\{J_2(k\rho)(3\cos 2\varphi_k - 2) - J_0(k\rho)\right\}\right]$$

$$\left(\vec{k}\cdot\vec{M}_k\right) = \frac{\pi M_s}{S_0}\cos\varphi_k\left[-2\frac{R}{k}J_1(kR) + \frac{2i}{R}\sin\varphi_0\sin\varphi_k\frac{R^2}{k}J_2(kR) -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\sin^2\varphi_0}{R^2}\left\{(3\cos 2\varphi_k - 2)\frac{R^3}{k}J_3(kR) - \frac{R^3}{k}J_1 + \frac{2R^2}{k^2}J_2(kR)\right\}\right] =$$

Escaneado con CamScanner

H_m of m. coupled dots (chain)

Date. . .

$$= \frac{\pi M_s}{S_0}\cos\varphi_k \cdot \frac{R}{k}\left[-2J_1(kR) + 2i\sin\varphi_0\sin\varphi_k J_2(kR) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\sin^2\varphi_0\left\{ (3\cos 2\varphi_k - 2)J_3(kR) - J_1(kR) + \frac{2}{kR}J_2(kR)\right\}\right]$$

$$-2J_3 - J_1 + \frac{2}{x}J_2 = -2\left(\frac{4}{x}J_2 - J_1\right) - J_1 + \frac{2}{x}J_2 =$$

$$= -\frac{6}{x}J_2 + J_1$$

$$\{\dots\} = 3\cos 2\varphi_k\left(\frac{4}{x}J_2 - J_1\right) - \frac{6}{x}J_2 + J_1 =$$

$$= \frac{6}{x}J_2\left[2\cos 2\varphi_k - 1\right] + J_1\left[1 - 3\cos 2\varphi_k\right]$$

$$\left(\frac{\vec{k}}{k}\cdot\vec{M}_k\right) = \frac{\pi M_s}{S_0}\cos\varphi_k \cdot \frac{R}{k}\left[-2J_1(kR) + 2i\sin\varphi_0\sin\varphi_k J_2(kR) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\sin^2\varphi_0\left\{\frac{6}{kR}J_2(kR)(2\cos 2\varphi_k - 1) + J_1(kR)(1-3\cos 2\varphi_k)\right\}\right]$$

$$\Rightarrow \left|\left(\frac{\vec{k}}{k}\cdot\vec{M}_k\right)\right|^2 = \left(\frac{\pi R M_s}{S_0}\right)^2\frac{\cos^2\varphi_k}{k^2}\left[4J_1^2(kR) + \right.$$

$$+ 2J_1(kR)\sin^2\varphi_0\left\{\frac{6}{kR}J_2(kR)(2\cos 2\varphi_k - 1) + J_1(kR)(1-3\cos 2\varphi_k)\right\} +$$

$$\left. + 4\sin^2\varphi_0\sin^2\varphi_k J_2^2(kR)\right] = \left|(\cdot)\right|^2_{\varphi_0=0} +$$

$$+ \left(\frac{\pi R M_s}{S_0}\right)^2\frac{\cos^2\varphi_k}{k^2}2\sin^2\varphi_0\left[J_1(kR)\left\{\frac{6}{kR}J_2(kR)(2\cos 2\varphi_k - 1) + J_1(kR)(1-3\cos 2\varphi_k\right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\sin^2\varphi_k J_2^2(kR)\right], \qquad \sin^2\varphi_k = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi_k)$$

$$\Rightarrow W_m(\varphi_0) = W_m(\varphi_0=0) + 2\pi\sum_{\vec{k}} f(kL)\left(\frac{\pi R M_s}{S_0}\right)^2\frac{\cos^2\varphi_k}{k^2}\left[\dots\right]\cdot 2\varphi_0^2.$$

$$W_m^{\text{uncoupl}}(\varphi_0) = W_m(0) - \frac{\pi}{2}\varphi_0^2\int_0^\infty \frac{dk}{k}f(kL)\left[J_1^2(kR) - J_2^2(kR)\right]$$

Hablamos de dots uncoupled $d/R \to \infty$ (porque para dots uncoupled $d_1 = 1$ una constante d_2 a $T_1 = 2\pi R$)

$$\sum_{\vec{k}}(\dots) \to A\int d^2\vec{k}(\dots) = A\int_0^\infty dk\,k\int_0^{2\pi} d\varphi_k(\dots)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_k\cos^2\varphi_k\left[C_1\cos 2\varphi_k + C_2\right] = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi_k\left[1+\cos 2\varphi_k\right]\left[C_1\cos 2\varphi_k + C_2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int d\varphi_k\left[C_1\cos 2\varphi_k + C_2 + C_1\cos^2 2\varphi_k + C_2\cos 2\varphi_k\right] =$$

Escaneado con CamScanner

Date.

$= \frac{1}{2}\left[C_2 \cdot 2\pi + C_1 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{\pi}{2}\left[C_1 + 2C_2 \right] =$

$= \frac{\pi}{2}\left[J_1 J_2 \frac{12}{(kR)} - 3J_1^2 - J_2^2 + 2\left(-J_1 J_2 \frac{6}{kR} + J_1^2 + J_2^2 \right) \right] =$

$= \frac{\pi}{2}\left[-J_1^2 + J_2^2 \right] = -\frac{\pi}{2}\left[J_1^2(kR) - J_2^2(kR) \right]$ — верно.

$\sum_{\vec{k}} (\dots) \to \frac{S_0}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{k} \, (\dots)$

Нареждаме предел идеалн. дота (W_m надо норм. на ед. обема дота):

$$W_m(\varphi_0) = W_m(0) + 2\pi \left(\frac{\pi R}{S_0}\right)^2 \sum_k f(kL) \frac{\cos^2\varphi_k}{k^2} \left[\dots \right] \cdot 2\varphi_0^2$$

$$\sum_{\vec{k}} f(kL) \frac{\cos^2\varphi_k}{k^2} \left[\dots \right] = \frac{S_0}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk\, k \int_0^{2\pi} d\varphi_k f \frac{\cos^2\varphi_k}{k^2} \left[\dots \right] =$$

$$= \frac{S_0}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(kL) \int d\varphi_k \cos^2\varphi_k \left[\dots \right] = \frac{S_0}{4\pi^2} \int \frac{dk}{k} f(kL) \left(-\frac{\pi}{2}\right) \left[J_1^2 - J_2^2 \right]$$

$$W_m(\varphi_0) = W_m(0) + 4\pi\varphi_0^2 \frac{\pi^2 R^2}{S_0^2} \left(\frac{S_0 L}{S_d L}\right) \frac{S_0}{4\pi^2} \left(-\frac{\pi}{2}\right) \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(kL) \left[J_1^2(kR) - J_2^2(kR) \right]$$

↓ на ед. V_d

$$= W_m(0) + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\varphi_0^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(kL) \left[J_1^2(kR) - J_2^2(kR) \right] -$$

– в частния случай за isolated dot (M_S^2 убрахме в нормировката W_m).

Общото разглеждане $W_m(\varphi_0)$ of "buckle" dot array по φ_0:

$$\Rightarrow W_m(\varphi_0) = W_m(\varphi_0 = 0) + 4\pi\varphi_0^2 \left(\frac{\pi R}{S_0}\right)^2 \sum_{\vec{k}} f(kL) \frac{\cos^2\varphi_k}{k^2} \times$$

$$\times \left[\underbrace{\left\{ \frac{12}{kR} J_1(kR) J_2(kR) - 3J_1^2(kR) - J_2^2(kR) \right\}}_{C_1} \cos 2\varphi_k - \underbrace{\frac{6}{kR} J_1(kR) J_2(kR) + J_1^2(kR) + J_2^2(kR)}_{C_2} \right]$$

При нормировка на ед. обема дота надо $\times \frac{V_0}{V_d} = \frac{S_0}{S_d}$ ($S_d = \pi R^2$):

(един дот на елемент. F-клетка)

$$\Rightarrow W_m(\varphi_0) = W_m(0) + \frac{4\pi^2}{S_0} \varphi_0^2 \sum_{\vec{k}} \frac{f(kL)}{k^2} \cos^2\varphi_k \left[\left\{ \dots \right\} \cos 2\varphi_k - \frac{6}{kR} J_1 J_2 + J_1^2 + J_2^2 \right]$$

$$W_{tot}(\varphi_0, h) = W_{s.d.}(h) + \frac{1}{2}\varphi_0^2 \left[\frac{1}{4} h + \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 - \pi F(\beta, d/R) \right], \text{ где}$$

$$F(\beta, d/R) = -\frac{8\pi}{S_0} \sum_{\vec{k}} \frac{f(kL)}{k^2} \cos^2\varphi_k \left[C_1 \cos 2\varphi_k + C_2 \right] \text{ и пока}$$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

nucleation of m. coupled dot-array is ($h = H/H_{c2}$)

$$h_n = 4\pi \mathbb{F}(\beta, d/R) - 4\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 = 4\pi\left[\mathbb{F}(\beta, d/R) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\right]$$

и при $d/R \to \infty$ $\mathbb{F}(\beta, d/R) \to F(\beta) = F_1(\beta) - F_2(\beta) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} f(\beta t)\left[J_1^2(t) - J_2^2(t)\right]$

Квадратурно берем by $\varphi \to \varphi' = \varphi - \pi/2$, тогда

$$\tilde{I}_\mu(\varphi_0) = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos\varphi\, e^{i\mu\varphi}}{\sqrt{1 + \sin^2\varphi_0 + 2\sin\varphi_0 \sin\varphi}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(\mu-1)}}{\sin\varphi_0} I_\mu\left(\frac{1}{\sin\varphi_0}\right),$$

где $I_\mu(s) = 2\int_0^\pi d\varphi \frac{\sin\varphi \cdot \sin\mu\varphi}{\sqrt{1+s^2-2s\cos\varphi}}$, т.е. "$s$" $\to \frac{1}{\sin\varphi_0}$

"s" - relative vortex shift. Можем H_{an} (s) и H_n (φ_0) (Ys) сравнить

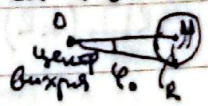
$$W_m^{buckle}(\varphi_0) = \frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1} F_\mu(\beta)\left|\tilde{I}_\mu(\varphi_0)\right|^2 = \frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1} F_\mu(\beta)\, I_\mu^2\left(\frac{1}{\sin\varphi_0}\right)\cdot\frac{1}{s^2}$$

$$C_1(x) = \frac{12}{x} J_1(x) J_2(x) - 3J_1^2(x) - J_2^2(x)$$

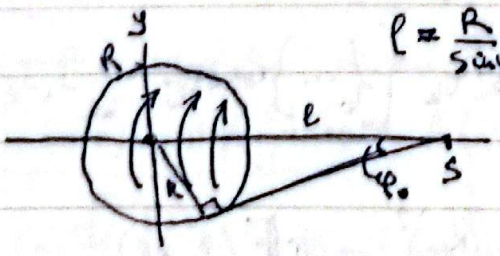
$$C_2(x) = -\frac{6}{x} J_1(x) J_2(x) + J_1^2(x) + J_2^2(x)$$

$$\frac{W_m(\varphi_0)}{M_s^2 V_d} = W_m(\varphi_0) = W_m(0) + \frac{(2\pi)^2}{S_0}\varphi_0^2 \sum_{\vec{k}} \frac{f(kL)}{k^2}\cos^2\varphi_k \left[C_1(kR)\cos 2\varphi_k + C_2(kR)\right]$$

намагничен. энергия of array of coupled dots in "buckle" state, параметризация через угол φ_0 ($\varphi_0 \ll 1$).



→ Кроме "buckle" - модели (одно-вихревая) возможны и другие модели of nucleation - H_n (двух-компонентная или двух-вортекс, например).



$l = \frac{R}{\sin\varphi_0}$, $S = \frac{1}{\sin\varphi_0}$ - относит. смещение центра вихря

$f(z) = \frac{i}{c}(z - S)$

За рамките vortex-Усова и „rigid" vortex model.

(това сделано за 19/V 002. – 19/VI 012.)

Date. 19.06.01

I 1) 19/V 002. – тиолеза о vortex-shift с $(\vec{m}.\vec{n})_S = 0$

2) ^{Ур-я}_{24/2} Брауна для vortex в $\vec{H}$. (двиловые моды с $(\vec{m}.\vec{n})_S = 0$.

I 1) 30/VI 002. – 2/VII Анализ для безобменной 2D-vortex модели by Bryant-Suhl '89.

2) 4/X Анализ экс. за пределами vortex-Усова.

3) 8-11/X Энергия vortexa с $\gamma = 2$ в ним. поле.

II 1) 17-31/X (PRB·01) Расчет conformal vortex model в $H \neq 0$ с К. Метловым ($z \to z' = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ – self-to-self mapping eq. кружка с $(\partial\vec{m}/\partial n)_S = 0$)

2) χ_{in} и боковые заряды, conf. model — 10-13/XI 002.

3) торцевые заряды, conform. model — 19-21/XI 002.

4) Комплекс. намагничивание и топол. заряд. — 27-28/XI
Инвариантность W_{ex} и/или $z \to z' = f(z)$ self-to-self conformal mapping.

5) Разбор письма Б.А.И. Условие $\left(\frac{\partial\vec{m}}{\partial n}\right)_S = 0$ – сохран. при $z \to z' = f(z)$ self-to-self. Эквивалентность conformal model сдвига вихря с нетоп. по движению пары „вихрь" – „антивихрь" к границе дом и их аннигиляции – 8-10/XII

IV 1) Теор. устойчивость вихря вне conformal mode 5, 18/II 012.

2) Теор. устойчивость вихря вне моды с $(\vec{m}.\vec{n})_S = 0$, но $\frac{\partial\vec{m}}{\partial n} \neq 0$ – 22/II

V 1) Вариац. ур-я для m_z, m_φ, m_ρ вихря. Ограничения vortex Усова. — 22-25/IV

2) MFD vortex-s.d. на основе пробной функции — 26-28/IV

3) Вариац. ур-е для $\Theta(\rho)$, new vortex. — 3/V, 9/V

4) Возмущения vortex Усова $\Theta(\rho) = \Theta_{VS}(\rho) + \delta(\rho)$ — 6-8/V

Escaneado con CamScanner

Date. . . Комплекс. подход к вортех.

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

$\operatorname{div}\vec{m} = 2\,\mathrm{Re}\frac{\partial m^+}{\partial z} = 4\,\mathrm{Re}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{w(z)}{1+|w|^2}\right)$, $z = x+iy$.

$m^+ = m_x + i m_y = \frac{2w(z)}{1+|w(z)|^2}$, $m_z = \frac{1-|w|^2}{1+|w|^2}$

$\frac{\partial m^+}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{div}\vec{m} + i(\operatorname{rot}\vec{m})_z\right]$, $\operatorname{div}\vec{m} = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial m^+}{\partial z}\right)$, $(\operatorname{rot}\vec{m})_z = 2\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial m^+}{\partial z}\right)$

$w(z) = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}$, $\theta, \varphi \overset{\text{Зеленс. ор}}{\to} (x,y)$, $\vec{m} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\bar{\nabla} = 2\frac{\partial}{\partial z}$

ФГ ферм. $\hat{\Gamma}(\vec{r},\vec{r}') = -\nabla_r \nabla_{r'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$. $\Gamma_{\alpha\beta}$, $\alpha,\beta = x,y,z$.

(конкурент sc-модели $\sin x\rho/x\rho$)

20/VI Расчет В.Р. солитона в цилиндре: $\operatorname{tg}\frac{\theta(\rho)}{2} = \rho/b$ $\forall \rho \le R$

$W_{ex} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \int_0^R d\rho\,\rho\left[(\theta'_\rho)^2 + \frac{\sin^2\theta(\rho)}{\rho^2}\right] = 4\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{1}{c^2+1}$, $c = \frac{b}{R}$

$\varepsilon_{ex} = \frac{1}{4\pi} W_{ex} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{1}{c^2+1}$

$\varepsilon_m^{face} = \frac{1}{4\pi} W_m^{face} = \frac{R}{L}\left[g(0) - g(L/R)\right]$, $g(x) = \int_0^\infty dk\, e^{-kx}\left[\int_0^1 d\rho\,\rho \frac{c^2-\rho^2}{c^2+\rho^2} J_0(k\rho)\right]$

$\varepsilon_{tot}(c) = \varepsilon_{ex}(c) + \varepsilon_m(c)$ и "с" надо найти из $\frac{\partial \varepsilon_{tot}}{\partial c} = 0$.

$\varepsilon_{tot}(c)$ после мини-миздания сравнили с энергией vortex $\left(\frac{L}{R}\right)$ и с $\perp$-S.d. $\to R_c(L)$-кв.

~~Vortex~~, график разных vortex ansatz

21/VI Полная энергия вортекса в цилиндре (см. 26/IV):

$W_{tot} = W_{ex} + W_m$, (плотность в ед. M_s^2) $\to W_{ex} = \frac{W_{ex}}{M_s^2 V_d} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \int_0^R d\rho\,\rho\left[\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2 + \frac{\sin^2\theta(\rho)}{\rho^2}\right]$

$\to W_m = \frac{W_m^{face}}{M_s^2 V_d} = \frac{4\pi}{\beta}\int_0^\infty dx\left[1 - e^{-\beta x}\right] I^2(x)$, $I(x) = \int_0^1 dz\, z\, m_z(z) J_0(xz)$

$z = \rho/R$, $c = b/R$.

$W_{ex} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \int_0^1 dz\, z\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2 + \frac{\sin^2\theta(z)}{z^2}\right]$

→ Конкурирующие модели: а) Усова $m_z(z) = \frac{b^2-\rho^2}{b^2+\rho^2} = \frac{c^2-z^2}{c^2+z^2}$, $\rho \le b$, $z \le c$, $z \in [0,c]$

$\sin\theta(\rho) = \frac{2b\rho}{b^2+\rho^2} = \frac{2cz}{c^2+z^2}$

ФП-II : vortex ⇄ 1 s.d.

$m_z(\rho) = \frac{\sin x\rho}{x\rho} = 0 \to x\rho = \pi$, $x = \frac{\pi}{\rho}$

Date.

2) как с пробными функциями от 26/IV

$m_z(\rho) = \frac{\sin x\rho}{x\rho}$ или $m_z(r) = \frac{\sin xr}{xr}$, x – вариационный параметр

$m_z(r) = \cos\theta(r)$, $m_z(r) = \frac{\sin \frac{\pi r}{c}}{\frac{\pi r}{c}} \cdot \frac{c}{\pi}$.

3) BP-soliton $\forall\rho$: $\operatorname{tg}\frac{\theta(r)}{2} = \frac{r}{c}$, $r \in [0,1]$, $\sin\theta(r) = \frac{2cr}{c^2+r^2}$

$m_z(r) = \frac{c^2 - r^2}{c^2 + r^2}$

$c = \delta/R$ – безразмер. радиус vortex „core".

Различие решения Усова 1) и BP 3) только в том, что $r \in [0,c]$ – у Усова и $r \in [0,1]$ у BP в W_m – разное. ($\forall r > c$ $\theta(r) = \pi/2$). Если $c \gg 1$, то 1) и 3) совпадают. W_m

$c > 1$ – соотв. „core" > домена т.е. большие $\langle m_z \rangle$

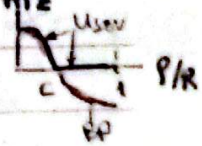
$$W_{tot} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \int_0^1 dr\, r \left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)^2 + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\right] + \frac{4\pi}{\beta}\int_0^\infty dx \left[1 - e^{-\beta x}\right] I^2(x),$$

$$I(x) = \int_0^1 dr\, r\, m_z(r)\, J_0(rx)$$

3) $W_{tot}^{BP}(c) = 4\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{1}{c^2+1} + \frac{4\pi}{\beta}\int_0^\infty dx \left[1 - e^{-\beta x}\right]\left[\int_0^1 dr\, r \frac{c^2 - r^2}{c^2 + r^2} J_0(rx)\right]^2$

1) $W_{tot}^{us}(c) = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \left[2 - \ln c\right] + \frac{4\pi}{\beta}\int_0^\infty dx \left[1 - e^{-\beta x}\right]\left[\int_0^c dr\, r \frac{c^2 - r^2}{c^2 + r^2} J_0(rx)\right]^2$

2) $\theta(r) = \arccos\left(\frac{\sin xr}{xr}\right)$, $m_z(r) = \frac{\sin xr}{xr}$ $\forall r \in [0,1]$.



→ Сравнение W_{tot}^{us} с $W_{tot}^{new}\left(\frac{\sin xr}{xr}\right)$.

$\delta/R_0 = 2$		$\delta/R_0 = 0{,}946$		$\frac{1}{R_0}R_M = 0{,}908$;	δ/R_0
R/R_0	2,0	1,5	1,39	1,17	1,0	0,946 ← рост R
W_{tot}^{us}	0,794	1,284	1,457	1,937	2,483	
W_{tot}^{new}	0,844 $x = 5{,}37$	1,315 $x = 4{,}78$	1,493 4,63	1,964 3,62	1,958 0,092	1,928 $x = 0{,}094$
$W_{t.s.d}$	2,09	2,55	2,43	2,18	1,962	1,887 (c=0)
W_{tot}^{BP}	0,650 $c = 0{,}779$	1,127 $c = 0{,}780$	1,309 0,780	1,843 1,780	2,003 $c = \infty$	1,925 $c = \infty$

Переход из new-vortex (x – модель m_z) или BP-soliton (с конечно) в 1-s.d. state – есть ФП II. (с→∞)

но $x = 0$ дает $W_t^{new} = 1{,}925$? (минимум)

а) Неочевидно, почему при $R = \delta$ $W_{tot}^{new}(x=0)$ и $W_{t.s.d}$ не совпадают и нет ли ФП I из сост. с $x \neq 0$ в $x = 0$ с $R \downarrow$.

б) Неочевидно, почему $W_t^{BP}(c)$ имеет столь резкий min, независ. от R, и есть ли ФП-I в состоянии $c = \infty$, т. 1 s.d. state?

Escaneado con CamScanner

Date. . .

План работы с Кэем:

1) Комплексное представление намагниченности цилиндров (позволит избавиться от свободных параметров одной модели и решить в одну строку)

2) МФД к/цилиндра в R–L координатах.

3) Поле nucleation и annihilation в „квадратичной" модели вихрей – антивихрей и скирмионов – антискирмионов.

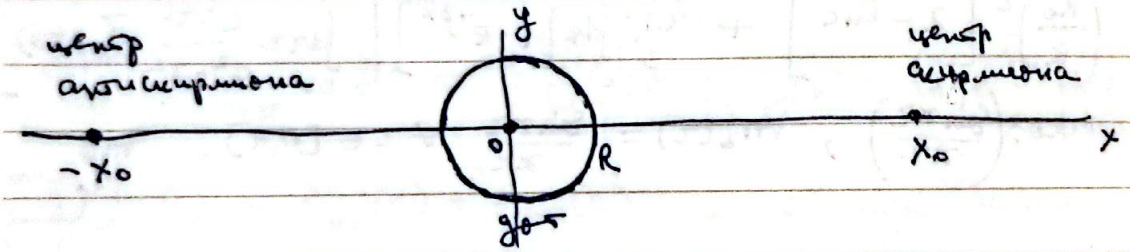
„Leaf" state Квадратичная модель.

24/VI Описание линий потери устойчивости Single domain state на МФД R–L с помощью пары скирмионов.

$$m_x + i m_y = \sin\theta e^{i\Phi}, \quad m_z = \cos\theta, \quad \theta, \Phi = f(\vec{r}).$$

θ, Φ – сферические углы $\vec{m}$, $|\vec{m}|^2 = 1$.

$$m_x + i m_y = \frac{2W(z)}{1+|W|^2}, \quad m_z = \frac{1-|W|^2}{1+|W|^2}, \quad z = x + iy.$$



$W(z) = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} e^{i\Phi}$. Скирмион радиуса b с центром в z_0: просто $W(z) = \frac{z}{b}$. С центром в $z = z_0$:

$$W(z) = \frac{z - z_0}{b}.$$

Должно быть для пары скирмион – антискирмион

$$\Phi_0(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y-y_2}{x-x_2}\right),$$

где (x_1, y_1) и (x_2, y_2) – координаты центра скирмиона и анти-скирмиона.

Видимо, для пары анти-скирм./скирмион одинакового радиуса

$$W(z) = \frac{z - z_{01}}{b} \cdot \frac{b}{z - z_{02}} = \frac{z - z_{01}}{z - z_{02}}$$

Quadratic model, $f(z) = iCz + A - \bar{A}z^2$

Date.

$w(z) = \frac{z-z_1}{z-z_2} = \frac{(z-z_1)(\bar{z}-\bar{z}_2)}{|z-z_2|^2} = \frac{|z|^2 - z_1\bar{z} - \bar{z}_2 z + z_1\bar{z}_2}{|z-z_2|^2}$

пусть $z_1 = x_0$ – вещ., $z_2 = -x_0 = \bar{z}_2$

$w(z) = \frac{|z|^2 - x_0\bar{z} + x_0 z - x_0^2}{|z+x_0|^2} = \frac{|z|^2 - x_0^2 + 2ix_0 y}{|z+x_0|^2} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} e^{i\varphi(x,y)}$

$\operatorname{tg}\varphi(x,y) = \frac{2x_0 y}{|z|^2 - x_0^2}$, с другой стороны (при $y_1 = y_2 = 0$, $x_1 = -x_2 = x_0$)

$\varphi_0(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x-x_0} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x+x_0} = \left| \begin{array}{c} \operatorname{arctg}A - \operatorname{arctg}B = \\ = \operatorname{arctg}\frac{A-B}{1+AB} \end{array} \right| =$

$= \operatorname{arctg}\frac{\frac{y}{(x-x_0)} - \frac{y}{(x+x_0)}}{1 + y^2\frac{1}{(x^2-x_0^2)}} = \operatorname{arctg}\frac{y(x+x_0) - y(x-x_0)}{x^2 - x_0^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{2yx_0}{y^2 - x_0^2}$

Пара стримон/антистримон с координатами $x_0, -x_0$ описывается $w(z) = \frac{z-x_0}{z+x_0}$, $\operatorname{tg}\varphi(x,y) = \frac{2x_0 y}{y^2 - x_0^2}$ и

$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} = |w|^2 = \frac{1}{|z+x_0|^4}\left[\rho \dots\right]$

Но в действительности у нас не пара стримон/антистримон

т.к. $f(z) = iCz + A - \bar{A}z^2$ и нет $\frac{1}{z}$-члена.

Стабильность || s.d. state в ним. зоне (|| flower state) или "слой" state

29/VI

Распределение напряженности в shifted vortex без нач. поверх. токовых зарядов есть

$\to w(z) = \left\{ \begin{array}{ll} f(z), & |f| \le 1 \\ f(z)/|f(z)|, & |f| > 1 \end{array} \right\}$, $f(z) = iCz + A - \bar{A}z^2$, C – вещ.

тогда $f(z)$ есть решение задачи Римана–Гильберта с гранич. условием $(\vec{m}\cdot\vec{n})_S = 0$ на бок. поверхности цилиндра

т.к. старшая степень в $f(z)$ есть "2" $\vec{m}(z)$ кластон. заряд $Q = 2$ (total), $\vec{m}(z)$ состоит из двух солитонов с топол. зарядом $Q = 1$.

$f(z) = iCz + A - \bar{A}z^2 = -\bar{A}\left[z^2 - \frac{A}{\bar{A}} - i\frac{C}{\bar{A}}z\right] = -\bar{A}(z-z_1)(z-z_2)$

Центры солитонов $z_{1,2} = \frac{1}{2\bar{A}}\left[iC \pm \sqrt{4|A|^2 - C^2}\right]$,

откуда видно, что будут разные классы решений

Date. . . "Leaf" or "Flower state или. дома, $\xi > 1$.

в зависимости от знака $D = 4|A|^2 - C^2$.

→ Видно, если считать $A \sim H$ (in plane mag. field), то ур-е $4|A|^2 = C^2$ будет кольцом единиц поля H_{an} в рамках модели.

$1 = |f(z)|^2 = |iz C + A - \bar{A} z^2|^2$ - ур-е „core" of vortex.

Если $C = 0$, то $|f(z)|^2 = |A - \bar{A} z^2|^2 = 1$

Пусть $A = |A| e^{i\alpha}$, $z = \rho e^{i\varphi}$, $|A - \bar{A} z^2|^2 = |A|^2 |e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} z^2|^2 =$

$= |A|^2 |e^{i\alpha}(1 - e^{-2i\alpha} \rho^2 e^{i2\varphi})|^2 = |A|^2 |1 - \rho^2 e^{i2(\varphi-\alpha)}|^2 =$

$= |A|^2 (1 - \rho^2 e^{i2(\varphi-\alpha)})(1 - \rho^2 e^{-i2(\varphi-\alpha)}) = |A|^2 [1 - \rho^2 e^{-} - \rho^2 e^{+} + \rho^4] = |A|^2 [1 - 2\rho^2 \cos 2(\varphi-\alpha) + \rho^4] = 1$ -

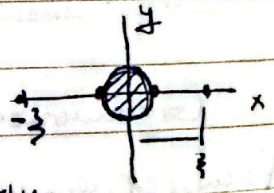
ур-е на vortex „core", центр сист. координат в центре дома.

$$f(z) = A - \bar{A} z^2 = -\bar{A}\left(z^2 - \frac{A}{\bar{A}}\right) = -\bar{A}\left(z^2 - e^{i2\alpha}\right)$$

Положение часов (их центров) определ. $z^2 - e^{i2\alpha} = 0$

$\rho^2 e^{i2\varphi} = e^{i2\alpha}$, $\rho = 1$, $\varphi = \alpha$.

Положим $\alpha = 0$, центры спинонов на Ox

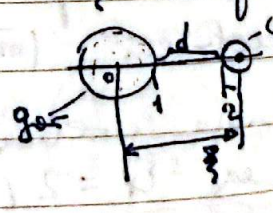


$f(z) = -\bar{A}(z^2 - 1) = -A(z-1)(z+1)$ - центры при $z = \pm 1$ на границе дома ($R = 1$).

→ Модель нуклеации vortexa (центры спинонов вне дома): „Leaf state"

спинионы из ∞ приближаются к границе дома.

Пусть положение колосов (центров) будет $z = \pm \xi$ и предположим что радиус спинона $r < (\xi - 1)$, т.е. его „core" лежит вне дома.



→ $f(z) = -A(z - \xi)(z + \xi)$ -

- если в области дома $\rho \le 1$ только маркировка часов $\vec{m}(\rho)$ $\xi > 1$.

$W(z, \bar{z}) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$ задает $\vec{m}(\rho)$.

В перон. области ($|W| = 1$) $e_{ex} = 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right)$

Escaneado con CamScanner

Т-ма Римана-Грина: $\frac{1}{2i}\oint_{\partial D} u(\xi,\bar\xi)\,d\xi = \iint_D \frac{\partial u(z,\bar z)}{\partial \bar z}\,dx\,dy$ (нарем. на гр. D)

Date.

$E_{ex} = (\cdot)\iint_{S_d} dx\,dy\, e_{ex} = (\cdot)2\int dS\left(\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial \bar W}{\partial \bar z} + \frac{\partial \bar W}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial \bar z}\right) =$

$= (\cdot)\int dS\,\frac{\partial}{\partial \bar z}\left[\frac{1}{f(z)}\frac{\partial f}{\partial z}\ln|f(z)|^2\right] = \left|\text{в силу теоремы Римана-Грина}\right| =$

$= (\cdot)\frac{1}{2i}\oint_{\partial D}\frac{1}{f(z)}\frac{\partial f}{\partial z}\ln f(z)f(\bar z)\,dz$, ∂D - граница круга, т.е. $\rho = 1$

$(z\in\partial D)$

$f(z) = -A(z^2-\xi^2)$, $\overline{f(z)} = f(\bar z) = -A(\bar z^2-\xi^2)$

$\frac{\partial f}{\partial z} = -2Az$. $\ln|f(z)|^2 = \ln\left[A^2(z^2-\xi^2)(\bar z^2-\xi^2)\right]$

$E_{ex} = \frac{(\cdot)}{2i}\oint_{\partial D}\frac{(-2Az)}{[-A(z^2-\xi^2)]}\ln\left[A^2(z^2-\xi^2)(\bar z^2-\xi^2)\right]dz =$

$= \frac{(\cdot)}{i}\oint_{\partial D}\frac{z}{z^2-\xi^2}\ln\left[A^2(z^2-\xi^2)(\bar z^2-\xi^2)\right]dz = \left|\begin{array}{l} z=\rho e^{i\varphi},\ \rho=1,\ \bar z = 1/z \\ dz = i\rho e^{i\varphi}d\varphi \end{array}\right| =$

$= \frac{(\cdot)}{i}\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{e^{i\varphi}}{e^{2i\varphi}-\xi^2}\ln\left[A^2(e^{i2\varphi}-\xi^2)(e^{-i2\varphi}-\xi^2)\right]ie^{i\varphi} =$

$= (\cdot)\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{e^{2i\varphi}}{e^{2i\varphi}-\xi^2}\ln\left[A^2(1-2\xi^2\cos 2\varphi+\xi^4)\right] =$

$= (\cdot)\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-\xi^2e^{-i2\varphi}}\ln\left[A^2(1-2\xi^2\cos 2\varphi+\xi^4)\right] = \left|\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \text{ дает } \int d\varphi\sin 2\varphi = 0\right|$

$\frac{1}{1-\xi^2e^{-i2\varphi}} = \frac{1-\xi^2e^{2i\varphi}}{(1-\xi^2e^{-i2\varphi})(1-\xi^2e^{i2\varphi})} = \frac{1-\xi^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)}{1-2\xi^2\cos 2\varphi+\xi^4}$

$\Rightarrow E_{ex} = (\cdot)\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{1-\xi^2\cos 2\varphi}{1-2\xi^2\cos 2\varphi+\xi^4}\ln\left[A^2(1-2\xi^2\cos 2\varphi+\xi^4)\right]$

$I_1(\xi) = \int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{1-\xi^2\cos 2\varphi}{1-2\xi^2\cos 2\varphi+\xi^4} = \left|2\varphi = x,\ d\varphi = \frac{1}{2}dx\right| =$

$= \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} dx\,\frac{1-\xi^2\cos x}{1-2\xi^2\cos x+\xi^4} = \frac{1}{2}4\int_0^{\pi} dx\,\frac{1-\xi^2\cos x}{1-2\xi^2\cos x+\xi^4} =$

$= 2\cdot\pi\,\frac{1}{|1-\xi^4|} - 2\xi^2\int_0^{\pi} dx\,\frac{\cos x}{1-2\xi^2\cos x+\xi^4} = \frac{2\pi}{|1-\xi^4|} - 2\xi^2\frac{\pi}{(\xi^4-1)\xi^2} = 0$ $(\xi>1)$

(проверить)

$I_2(\xi) = \int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{1-\xi^2\cos 2\varphi}{1-2\xi^2\cos 2\varphi+\xi^4}\ln(1-2\xi^2\cos 2\varphi+\xi^4) =$

Escaneado con CamScanner

Математика

Date. . . II-Flower state → Vortex nucleation

$$= 2\int_0^{\pi} dx\ \frac{1-\xi^2\cos x}{1-2\xi^2\cos x+\xi^4}\ln\left(1-2\xi^2\cos x+\xi^4\right) =$$

$$= 2\cdot 2\pi\ \underset{(\xi<1)}{\ln(1-\xi^4)} - 2\xi^2\int dx\ \frac{\cos x}{1-2\xi^2\cos x+\xi^4}\ln(1-2\xi^2\cos x+\xi^4)$$

$$\rightarrow E_{ex} = (\cdot)\left[\ln A^2\cdot I_1(\xi) + I_2(\xi)\right] = I_2(\xi)\cdot(\cdot)$$

$(\cdot) = \frac{1}{2}LC$, $\tilde{E}_{ex} = \frac{1}{4\pi V_d}E_{ex} = \frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 I_2(\xi)$ — Exch. energy of skyrmion

30/VI Razer Em. Тополевых зарядов нет, т.к. $\pi_2 = 0$ для мерона. Обменный член проблематичен(?).

Топологич. поверх. заряда $\mathcal{Z} = (\vec{m}\cdot\vec{n})_S$, $\vec{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$

$\vec{n} \rightarrow n(z) = n_x + in_y = e^{i\varphi}$, $m_x + im_y = \frac{2w(z,\bar{z})}{1+|w|^2}$

Для мерона: $w(z,\bar{z}) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$ и $|w|=1 \rightarrow m_x+im_y = w(z,\bar{z})$

$$\mathcal{Z} = (\vec{m}\cdot\vec{n})_{S_\delta} = \mathrm{Re}\left[(m_x+im_y)\cdot(n_x-in_y)\right] = \mathrm{Re}\left[w(z,\bar{z})e^{-i\varphi}\right]$$

$$w(z,\bar{z}) = \frac{f(z)}{|f(z)|},\quad f(z) = -A(z-\xi)(z+\xi)$$

$$\mathcal{Z} = \mathrm{Re}\left[\frac{-A(z-\xi)(z+\xi)}{|f(z)|}\cdot e^{-i\varphi}\right] = \frac{1}{|f|}\mathrm{Re}\left[A(\xi^2-z^2)e^{-i\varphi}\right] = \left|\begin{matrix}z=\rho e^{i\varphi}\\ \rho=1\end{matrix}\right|$$

$$= \frac{A}{|f(z)|}\mathrm{Re}\left[(\xi^2-e^{2i\varphi})e^{-i\varphi}\right] = \frac{A}{|f(z)|}(\xi^2-1)\cos\varphi$$

$$|f(z)| = |A(\xi^2-z^2)| \underset{|z|=1}{=} |A|\,|(\xi^2-e^{i2\varphi})| = |A|\sqrt{(\xi^2-e^{i2\varphi})(\xi^2-e^{-i2\varphi})} =$$

$$= |A|\sqrt{1-2\xi^2\cos 2\varphi+\xi^4},\quad A = |A|e^{i\alpha},\ \alpha = 0,$$

$$\mathcal{Z} = \frac{A}{|A|}\frac{(\xi^2-1)\cos\varphi}{\sqrt{1-2\xi^2\cos 2\varphi+\xi^4}},\quad e = \frac{E}{4\pi M_s^2 V_d}$$

$$E_m^{side} = \frac{1}{2}\int_{S_{бок.}} dS\int dS'\ \frac{\mathcal{Z}(r)\,\mathcal{Z}(r')}{|\vec{r}-\vec{r}'|},\quad \mathcal{Z}(r) = \mathcal{Z}(\rho) = \frac{(\xi^2-1)\cos\varphi}{\sqrt{1-2\xi^2\cos 2\varphi+\xi^4}}$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(z-z')^2+\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\varphi-\varphi')}} = \left|\rho\leftrightarrow\frac{\rho}{R}\right| =$$

$$= \frac{1}{R}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2}(z-z')^2+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2+\left(\frac{\rho'}{R}\right)^2-2\left(\frac{\rho}{R}\right)\left(\frac{\rho'}{R}\right)\cos(\varphi-\varphi')}},\quad dS = dz\cdot R\,d\varphi$$

$$\frac{1}{|r-r'|} = \int_0^\infty dk\, e^{-k|z-z'|}J_0(k|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|),\quad J_0(k|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|) = J_0(k\rho)J_0(k\rho')$$

Escaneado con CamScanner

Date.

$$+2\sum_{\mu=1}^{\infty} J_\mu(k\rho) J_\mu(k\rho') \cos\mu(\varphi-\varphi') = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} J_\mu(k\rho) J_\mu(k\rho') e^{i\mu(\varphi-\varphi')}$$

$$E_m^{side} = \frac{1}{2}\int_0^L dz \int_0^{2\pi} R d\varphi \int_0^L dz' \int_0^{2\pi} R d\varphi' \int_0^\infty dk\, e^{-k|z-z'|} \sum_\mu J_\mu(k\rho) J_\mu(k\rho') e^{i\mu(\varphi-\varphi')} \times$$

$$\times \frac{(\xi^2-1)\cos\varphi}{\sqrt{1-2\xi^2\cos 2\varphi+\xi^4}} \cdot \frac{(\xi^2-1)\cos\varphi'}{\sqrt{1-2\xi^2\cos 2\varphi'+\xi^4}} =$$

$$= \frac{1}{2} R^2 (\xi^2-1)^2 \int_0^L dz \int_0^L dz' \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\infty dk\, e^{-k|z-z'|} \sum_\mu J_\mu(k\rho) J_\mu(k\rho') e^{i\mu\varphi} e^{-i\mu\varphi'} \times$$

$$\times \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-2\xi^2\cos 2\varphi+\xi^4}} \cdot \frac{\cos\varphi'}{\sqrt{1-2\xi^2\cos 2\varphi'+\xi^4}} = \left| \int_0^L dz\, dz' e^{-k|z-z'|} = \frac{2L}{k} f(kL) \right| =$$

$$= \frac{1}{2} R^2 (\xi^2-1)^2 2L \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(kL) \sum_\mu J_\mu(k\rho) J_\mu(k\rho') |\mathcal{J}_\mu(\xi)|^2$$

$$\mathcal{J}_\mu(\xi) = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{e^{i\mu\varphi}\cos\varphi}{\sqrt{1-2\xi^2\cos 2\varphi+\xi^4}}$$

$$E_m^{side} = R^2 L (\xi^2-1)^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(kL) \sum_\mu J_\mu(k\rho) J_\mu(k\rho') |\mathcal{J}_\mu(\xi)|^2 = \left| \begin{array}{l} kR = x \\ \frac{L}{R} = \beta \\ \rho/R \to \rho \\ \text{но } \rho=1 \text{ здесь} \\ \text{и } \rho'=1 \end{array} \right| =$$

$$= R^2 L (\xi^2-1)^2 \int_0^\infty \frac{dx}{x} f(\beta x) \sum_\mu J_\mu(x) J_\mu(x) |\mathcal{J}_\mu(\xi)|^2$$

$$\to \varepsilon_m^{side} = \frac{1}{4\pi V_d} E_m^{side} = \frac{1}{4\pi \cdot \pi R^2 L} R^2 L (\xi^2-1)^2 \int_0^\infty \frac{dx}{x} f(\beta x) \sum_\mu J_\mu^2(x) |\mathcal{J}_\mu(\xi)|^2 =$$

$$= \frac{(\xi^2-1)^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dx}{x} f(\beta x) \sum_\mu J_\mu^2(x) |\mathcal{J}_\mu(\xi)|^2$$

$$\mathcal{J}_\mu(\xi) = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{e^{i\mu\varphi}\cos\varphi}{\sqrt{(\dots)}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos\mu\varphi \cdot \cos\varphi}{\sqrt{1-2\xi^2\cos 2\varphi+\xi^4}}$$

$$\to \varepsilon_m^{side}(\xi) = \frac{(\xi^2-1)^2}{(2\pi)^2} \sum_\mu \int_0^\infty \frac{dx}{x} f(\beta x) J_\mu^2(x) \cdot \mathcal{J}_\mu^2(\xi) = \left| \begin{array}{l} \text{смотреть обозначения} \\ \text{PRB'01} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{(\xi^2-1)^2}{(2\pi)^2} \sum_\mu I_\mu(\beta) \mathcal{J}_\mu^2(\xi), \qquad I_\mu(\beta) = \int_0^\infty \frac{dx}{x} f(\beta x) J_\mu^2(x)$$

Маг. side энергия
II – flower state

Имеем min по ξ от полной энергии газа $\varepsilon(\xi) = \varepsilon_{ox}(\xi) + \varepsilon_m^{side}(\xi)$

Проверка: пусть $\xi \to \infty$, $\mathcal{J}_\mu(\xi) \approx \frac{1}{\xi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\mu\varphi \cos\varphi = \frac{1}{\xi^2} \cdot \pi(\delta_{\mu,1} + \delta_{\mu,-1})$

$$\varepsilon_m^{side}(\xi\to\infty) = \frac{\xi^4}{(2\pi)^2} \sum_\mu I_\mu(\beta) \frac{\pi^2}{\xi^4}(\delta_{\mu,1}+\delta_{\mu,-1}) = \frac{1}{2} I_1(\beta) \quad \text{и т.к.}$$

$$\frac{1}{V_d} E_m^{side}(\xi\to\infty) = 4\pi \varepsilon_m^{side} = 2\pi I_1(\beta),$$ верно, т.к. $I_1(\beta)$ – размер. оператор в маг. поле

Escaneado con CamScanner

Date. 01. 07.

$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2}$, $x \to 0$

Разложение по $\frac{1}{\xi} \ll 1$. $\frac{1}{\xi} = y$, (ξ) – уравнение для сканирующего

$$J_\mu(\xi) = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos\mu\varphi \cdot \cos\varphi}{\sqrt{1 - 2\xi^2\cos 2\varphi + \xi^4}} = \frac{1}{\xi^2}\int d\varphi \frac{\cos\mu\varphi\cdot\cos\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\xi^4} - \frac{2}{\xi^2}\cos 2\varphi + 1}} =$$

$$= y^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos\mu\varphi\cdot\cos\varphi}{\sqrt{1 - 2y^2\cos 2\varphi + y^4}} = y^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\mu\varphi\cos\varphi \left[1 + y^2\cos 2\varphi\right] =$$

$$= y^2\left[\pi(\delta_{\mu 1} + \delta_{\mu,-1}) + y^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi\cos 2\varphi\cdot\cos\mu\varphi\right] =$$

$$= y^2\left[\pi(\dots) + \frac{y^2}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \cos\mu\varphi\left[\cos(2\varphi-\varphi) + \cos(2\varphi+\varphi)\right]\right] =$$

$$= y^2\left[\pi(\delta_{\mu 1} + \delta_{\mu,-1}) + \frac{1}{2}y^2\pi(\delta_{\mu 1} + \delta_{\mu,-1} + \delta_{\mu 3} + \delta_{\mu,-3})\right]$$

$$\mathcal{E}_m^{side}(\xi) = \frac{(\xi^2-1)^2}{(2\pi)^2}\cdot 2\sum_{\mu=1} I_\mu(\beta)\, J_\mu^2(\xi), \quad \text{т.к. } (\text{при } \mu=0) = 0$$

$$J_\mu(y) = y^2\pi\left[\delta_{\mu 1} + \frac{1}{2}y^2(\delta_{\mu 1} + \delta_{\mu 3})\right]$$

$$J_\mu^2(y) = \pi^2 y^4\left[\delta_{\mu 1} + 2\delta_{\mu 1}\frac{1}{2}y^2(\delta_{\mu 1}+\delta_{\mu 3}) + O(y^4)\right] =$$

$$= \pi^2 y^4\left[\delta_{\mu 1} + y^2\delta_{\mu 1} + O(y^4)\right] = \pi^2 y^4 \delta_{\mu 1}\left[1 + y^2 + O(y^4)\right]$$

$$\mathcal{E}_m^{side}(y) = \frac{2}{(2\pi)^2}\left(\frac{1}{y^4} - 2\frac{1}{y^2} + 1\right)\sum_{\mu=1} I_\mu(\beta)\, J_\mu^2(y) =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{1}{y^4} - \frac{2}{y^2} + 1\right) I_1(\beta)\,\pi^2 y^4(1+y^2) =$$

$$= \frac{1}{2} I_1(\beta)\left(1 - \frac{1}{y^2}\right)^2 y^4(1+y^2) = \frac{1}{2} I_1(\beta)(y^2-1)^2(y^2+1) =$$

$$= \frac{1}{2} I_1(\beta)(y^2-1)^2 = \frac{1}{2} I_1(\beta)(y^4-1)(y^2-1) =$$

$$= -\frac{1}{2} I_1(\beta)(y^2-1) = \frac{1}{2} I_1(\beta) - \frac{1}{2} I_1(\beta) y^2 .$$

1/√4 $\mathcal{E}_m^{side}(\xi) = \frac{1}{2} I_1(\beta) - \frac{1}{2} I_1(\beta) y^2$, $y = 1/\xi$.

$$\mathcal{E}_{ex}(\xi) = \frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 I_2(\xi), \quad I_2(\xi) = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1 - \xi^2\cos 2\varphi}{1 - 2\xi^2\cos 2\varphi + \xi^4}\ln(\dots)$$

$$= \int d\varphi \frac{\ln(1 - 2\xi^2\cos 2\varphi + \xi^4)}{1 - 2\xi^2\cos 2\varphi + \xi^4} - \xi^2\int d\varphi \frac{\cos 2\varphi}{(\dots)}\ln(\dots)$$

При $\xi \gg 1$ $\quad y = \frac{1}{\xi} \to 0$

$$I_2(\xi) = y^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{y^2 - \cos 2\varphi}{1 - 2y^2\cos 2\varphi + y^4}\ln\left[(1 - 2y^2\cos 2\varphi + y^4)^{1/y^4}\right]$$

$$= y^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \left[(y^2 - \cos 2\varphi)(1 + 2y^2\cos 2\varphi) + O(y^4) \right] \left[-2y^2\cos 2\varphi - 4\ln y + O(y^4) \right] =$$

$$= y^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \left[y^2 - \cos 2\varphi - 2y^2\cos^2 2\varphi \right] \left[-4\ln y - 2y^2\cos 2\varphi \right] =$$

$$= y^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \left[-\cos 2\varphi + y^2(1 - 2\cos^2 2\varphi) \right] \left[-4\ln y - 2y^2\cos 2\varphi \right] =$$

$$= y^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \left[4\cos 2\varphi \cdot \ln y + 2y^2\cos^2 2\varphi - 4\ln y \cdot y^2(-\cos 2\varphi) + O(y^4) \right] =$$

$$= 2y^4 \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2 2\varphi = 2y^4 \cdot \pi = 2\pi y^4, \text{ т.е. } \left(I_2(\xi) \simeq \frac{2\pi}{\xi^2} \right), \ \xi \gg 1.$$

Перейдем к $I_1(\xi)$. Рассм. $\frac{1}{1 - \rho e^{i\varphi}} = \sum_{n=0} \rho^n e^{in\varphi}$, $z = \rho e^{i\varphi}$, $|z| = \rho < 1$.

$$\text{Re}\,\frac{1}{1 - \rho e^{i\varphi}} = \text{Re}\,\frac{1 - \rho e^{-i\varphi}}{(1 - \rho e^{i\varphi})(1 - \rho e^{-i\varphi})} = \text{Re}\,\frac{1 - \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2} = \frac{1 - \rho\cos\varphi}{1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2}$$

Отсюда $\frac{1 - \rho\cos\varphi}{1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2} = \sum_{n=0} \rho^n \cos n\varphi, \quad \rho < 1.$

Если $\rho > 1$, $|z| > 1$: $\frac{1}{1 - \rho e^{i\varphi}} = \frac{1}{1 - z} = \frac{1}{z}\frac{1}{\frac{1}{z} - 1} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}\left(\frac{1}{z}\right)^n =$

$$= -\frac{e^{-i\varphi}}{\rho} \sum_{n=0} \frac{1}{\rho^n} e^{-in\varphi} = -\frac{1}{\rho} \sum_{n=0} \frac{1}{\rho^n} e^{-i(n+1)\varphi}$$

$$\frac{1 - \rho\cos\varphi}{1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2} = \begin{cases} \sum_{n=0} \rho^n \cos n\varphi, & \rho < 1 \\ -\frac{1}{\rho} \sum_{n=0} \frac{1}{\rho^n} \cos(n+1)\varphi, & \rho > 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1 - \rho\cos 2\varphi}{1 - 2\rho\cos 2\varphi + \rho^2} = \left| \rho = \xi^2 \right| = -\frac{1}{\xi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \sum_{n=0} \frac{1}{\xi^{2n}} \cos 2(n+1)\varphi = 0$$

и $I_1(\xi) = 0$ — верно. $\varepsilon_{ex} = \frac{1}{8\pi^2}(R_0/R)^2 I_2(\xi) = \frac{1}{4\pi}(R_0/R)^2 \frac{1}{\xi^4}$

Вывод: при $\xi \gg 1$: $\varepsilon_{tot}(y) = \varepsilon_{tot}(0) - \frac{1}{2} I_1(\beta) y^2 + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 y^4$ —

no side-wall contribute to $(\dots)y^4$ и

здесь нет объемных зарядов. Min $\varepsilon_{tot}(y)$ всегда при $y \neq 0$ ($\xi \neq \infty$).

Причина $\varepsilon_{ex}(y) \sim y^4$, $y \to 0$ видимо в том, что рассм. ДВА цилиндра (вихря). В "rigid" модели и вводим для nucleation один вихрь вне ядра и получаем $\varepsilon_{ex} \sim y^2 \sim \rho_0^2$.

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$\mathcal{E}_m^{vol}$

$\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

→ Обобщение задачи ас двух антипараллельных вихрей.

$$W(z,\bar z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}, \quad f(z) = -A(z-\xi)(z+\xi) = A(\xi^2 - z^2)$$

Для вектора $|W|=1$ и $m_x + i m_y = W(z,\bar z)$. $\frac{\partial W}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

$$\operatorname{div}\vec m = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + i\left(\frac{\partial m_y}{\partial x} - \frac{\partial m_x}{\partial y}\right)\right]$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{f(z)}{|f|} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{f(z)}{\sqrt{f(z)f(\bar z)}} = \frac{1}{\sqrt{f(\bar z)}}\frac{\partial}{\partial z}\sqrt{f(z)} = \frac{1}{2\sqrt{f(z)f(\bar z)}}\frac{\partial f(z)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = -2Az, \quad \operatorname{div}\vec m = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{2|f(z)|}(-2Az) = -\frac{2Ax}{|f(z)|}$$

$$W_m^{vol} = \frac{1}{2}\int_{V_d} dv\,dv'\,\frac{\rho(r)\rho(r')}{|r-r'|}, \quad \rho(r) = \operatorname{div}\vec m(r)$$

$$W_m^{vol} = \frac{1}{2}\int_{V_d} d^3r\,d^3r'\,\frac{\operatorname{div}\vec m(r)\cdot\operatorname{div}\vec m(r')}{|r-r'|} = \frac{1}{2}\int d^2\vec\rho\,d^2\vec\rho'\int_0^L dz\,dz' \times$$

$$\times \int_0^\infty dk\, e^{-k|z-z'|}\sum_\mu J_\mu(k\rho)J_\mu(k\rho')e^{i\mu(\varphi-\varphi')}\,4A^2\,\frac{\rho\rho'\cos\varphi\cos\varphi'}{A^2\sqrt{\rho^4 - 2\xi^2\rho^2\cos 2\varphi + \xi^4}} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{\rho'^4 - 2\rho'^2\xi^2\cos 2\varphi' + \xi^4}} = \frac{1}{2}4\cdot(2L)\int d^2\vec\rho\int d^2\vec\rho'\int_0^\infty \frac{dk}{k} f(kL)\sum_\mu J_\mu(k\rho)J_\mu(k\rho')\times$$

$$\times e^{i\mu\varphi}e^{-i\mu\varphi'}\frac{\rho\rho'\cos\varphi\cos\varphi'}{\sqrt{\rho^4 - 2\xi^2\rho^2\cos 2\varphi + \xi^4}\sqrt{\rho'^4 - 2\xi^2\rho'^2\cos 2\varphi + \xi^4}} =$$

$$= 4L\int_0^R d\rho\,\rho\int_0^R d\rho'\,\rho'\int_0^\infty \frac{dk}{k} f(kL)\sum_\mu J_\mu(k\rho)J_\mu(k\rho')\rho\rho'\,\mathcal{J}_\mu(\rho,\xi)\mathcal{J}_\mu^*(\rho',\xi)$$

$$\mathcal{J}_\mu(\rho,\xi) = \int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{\cos\varphi\cdot e^{i\mu\varphi}}{\sqrt{\rho^4 - 2\xi^2\rho^2\cos 2\varphi + \xi^4}}, \quad e^{i\mu\varphi}\to\cos\mu\varphi \text{ и } \mathcal{J}_\mu(\rho=1,\xi) = \mathcal{J}_\mu(\xi)$$

$$\mathcal{E}_m^{vol} = \frac{1}{4\pi V_d}W_m^{vol} = \frac{1}{4\pi\cdot\pi R^2 L}4L\int_0^R d\rho\,\rho^2\int_0^R d\rho'\,\rho'^2\int\frac{dk}{k}f(kL)\sum_\mu J_\mu(k\rho)J_\mu(\dots)\times$$

$$\times \mathcal{J}_\mu(\rho,\xi)\mathcal{J}_\mu(\rho',\xi) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 d\rho\,\rho^2\int_0^1 d\rho'\,\rho'^2\int_0^\infty\frac{dx}{x}f(\beta x)\sum_\mu J_\mu(x\rho)J_\mu(x\rho')\mathcal{J}_\mu(\rho,\xi)\mathcal{J}_\mu(\dots)$$

где ρ и ξ уже в ед. R, т.е. безразмерны, $\rho<1$.

$$\mathcal{J}_\mu(\rho,\xi) = \int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{\cos\mu\varphi\cdot\cos\varphi}{\sqrt{\rho^4 - 2\rho^2\xi^2\cos 2\varphi + \xi^4}}, \quad \mathcal{J}_0 = 0$$

Escaneado con CamScanner

Note.

Разложение по $\frac{1}{\xi} \ll 1$: $\frac{1}{\sqrt{\rho^4 - 2\rho^2\xi^2\cos 2\varphi + \xi^4}} = \frac{1}{\xi^2}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{\xi}\right)^4 - 2\left(\frac{\rho}{\xi}\right)^2\cos 2\varphi + 1}}$

$= \frac{1}{\rho^2} y'^2 \frac{1}{\sqrt{y'^4 - 2y'^2\cos 2\varphi + 1}} = \left| \begin{matrix} y' = \frac{\rho}{\xi} \ll 1 \\ \text{аналог. } y = \frac{1}{\xi} \end{matrix} \right|$, $J_\mu(\rho,1) = \frac{1}{\rho^2} J_\mu(y')$

см. ур. 30/VI : $J_\mu(\rho,\xi) \underset{\xi \gg 1}{=} \frac{1}{\rho^2} y'^2 \pi \left[\delta_{\mu 1} + \frac{1}{2} y'^2 (\delta_{\mu 1} + \delta_{\mu 3})\right]$, $\tilde{y}' = \frac{\rho'}{\xi}$

$J_\mu(\rho,\xi) J_\mu(\rho',\xi) = \frac{\pi}{\rho^2} y^2 \left[\delta_{\mu 1} + \frac{1}{2} y'^2 (\delta_{\mu 1} + \delta_{\mu 3})\right] \frac{\pi}{\rho'^2} \tilde{y}'^2 \left[\delta_{\mu 1} + \frac{1}{2}\tilde{y}'^2 (\delta_{\mu 1} + \delta_{\mu 3})\right]$

$= \frac{\pi^2}{\xi^4}\left[\delta_{\mu 1} + \delta_{\mu 1}\frac{1}{2}\tilde{y}'^2 + \delta_{\mu 1}\frac{1}{2} y'^2\right] = \frac{\delta_{\mu 1}}{\xi^4}\pi^2\left[1 + \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{\xi^2} + \frac{1}{2}\frac{\rho'^2}{\xi^2}\right]$ -

здесь нет ген. множителя $\sim(\xi^2-1)^2$ как в W_m^{side}, поэтому

$J_\mu(\rho,\xi) J_\mu(\rho',\xi) = \frac{\pi^2}{\xi^4}\delta_{\mu 1} + O(1/\xi^6)$ при $\xi \gg 1$.

$\varepsilon_m^{ME} = \frac{1}{\pi^2}\cdot 2 \int_0^1 d\rho\,\rho^2 \int_0^1 d\rho'\,\rho'^2 \int_0^\infty \frac{dx}{x} f(\beta x) \sum_{\mu=1} J_\mu(x\rho) J_\mu(x\rho') \frac{\pi^2}{\xi^4}\delta_{\mu 1} =$

$= \frac{2}{\xi^4} \int_0^1 d\rho\,\rho^2 \int_0^1 d\rho'\,\rho'^2 \int_0^\infty \frac{dx}{x} f(\beta x)\, J_1(x\rho)\, J_1(x\rho')$

$\int_0^1 d\rho\,\rho^2 J_1(x\rho) = \frac{1}{x} J_2(x)$, см. 13/VI .

$\varepsilon_m^{ME} = \frac{2}{\xi^4}\int_0^\infty dx\, f(\beta x)\frac{1}{x^3} J_2^2(x) > 0$ - свойственно uniform ($\beta=\infty$) state.

Каков ли ε_m^{side} относит. вклад в $(\dots)y^4$?

$J_\mu(\xi) = y^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos\mu\varphi\cdot\cos\varphi}{\sqrt{1 - 2y^2\cos 2\varphi + y^4}} = \left| \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + 3\frac{x^2}{8} + \dots \\ x = 2y^2\cos 2\varphi - y^4 \end{matrix} \right| =$

$= y^2 \int d\varphi \cos\mu\varphi\cdot\cos\varphi\left[1 + y^2\cos 2\varphi - \frac{1}{2}y^4 + \frac{3}{8}4y^4\cos^2 2\varphi + O(y^6)\right] =$

$= y^2 \int d\varphi \cos\mu\varphi\cdot\cos\varphi\left[1 + y^2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}y^4(3\cos^2 2\varphi - 1)\right]$

$\int_0^{2\pi} d\varphi \cos\mu\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\cos^2 2\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \cos\mu\varphi\cos\varphi(1+\cos 4\varphi) = \frac{1}{2}\pi\delta_{\mu 1} +$

$+\frac{1}{2}\int d\varphi \cos\mu\varphi\cos\varphi\cos 4\varphi = \frac{\pi}{2}\delta_{\mu 1} + \frac{1}{4}\int d\varphi\cos\mu\varphi\left[\cos 3\varphi + \cos 5\varphi\right] =$

$= \frac{\pi}{2}\delta_{\mu 1} + \frac{\pi}{4}(\delta_{\mu 3} + \delta_{\mu 5})$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$$\tilde{J}_\mu(y) = y^2\pi\left[\delta_{\mu 1} + \tfrac{1}{2}y^2(\delta_{\mu 1}+\delta_{\mu 3}) + \tfrac{1}{2}y^4\left\{\tfrac{3}{2}\delta_{\mu 1} + \tfrac{3}{4}\delta_{\mu 3} + \tfrac{3}{4}\delta_{\mu 5} - \dots\right.\right.$$

$$= \pi y^2\left[\delta_{\mu 1} + \tfrac{1}{2}y^2(\delta_{\mu 1}+\delta_{\mu 3}) + \tfrac{1}{2}y^4\tfrac{1}{2}\left(\delta_{\mu 1} + \tfrac{3}{2}\delta_{\mu 3} + \tfrac{3}{2}\delta_{\mu 5}\right)\right]$$

$$\tilde{J}^2_\mu(y) = \pi^2 y^4\left[\delta_{\mu 1} + \tfrac{1}{4}y^4(\delta_{\mu 1}+\delta_{\mu 3}) + y^2\delta_{\mu 1} + \tfrac{1}{2}y^4\delta_{\mu 1}\right] =$$

$$= \pi^2 y^4\left[\delta_{\mu 1} + y^2\delta_{\mu 1} + \tfrac{3}{4}y^4\delta_{\mu 1} + \tfrac{1}{4}y^4\delta_{\mu 3}\right]$$

$$\varepsilon^{Side}_m(y) = \frac{2}{(2\pi)^2}\left(\frac{1}{y^2}-1\right)^2\sum_{\mu=1} I_\mu(\beta)\,\tilde{J}^2_\mu(y) =$$

$$= \tfrac{1}{2}(1-y^2)^2\sum_{\mu=1} I_\mu(\beta)\left[\delta_{\mu 1} + y^2\delta_{\mu 1} + \tfrac{3}{4}y^4\delta_{\mu 1} + \tfrac{1}{4}y^4\delta_{\mu 3}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{2}(1-y^2)^2 I_1(\beta)\left(1+y^2+\tfrac{3}{4}y^4\right) + \tfrac{1}{2}(1-y^2)^2 I_3(\beta)\tfrac{1}{4}y^4 = \left|\text{до } y^4\right| =$$

$$= \tfrac{1}{2}I_1(\beta)\left[(1-y^4)(1-y^2) + \tfrac{3}{4}y^4\right] + \tfrac{1}{8}I_3(\beta)y^4 =$$

$$= \tfrac{1}{2}I_1(\beta)\left[1-y^2-y^4+\tfrac{3}{4}y^4\right] + \tfrac{1}{8}I_3(\beta)y^4 =$$

$$= \tfrac{1}{2}I_1(\beta) - \tfrac{1}{2}I_1(\beta)y^2 - \tfrac{1}{8}\left[I_1(\beta) - I_3(\beta)\right]y^4$$

$$\varepsilon_{tot}(y) = \varepsilon_{ex}(y) + \varepsilon^{Side}_m(y) + \varepsilon^{vol}_m(y) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 y^4 + \tfrac{1}{2}I_1(\beta) - \tfrac{1}{2}I_1(\beta)y^2 - \tfrac{1}{8}\left[I_1 - I_3\right]y^4 + 2y^4\tilde{I}(\beta) =$$

$$= \varepsilon_{tot}(0) - \tfrac{1}{2}I_1(\beta)y^2 + \left\{\frac{1}{4\pi}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 + 2\tilde{I}(\beta) - \tfrac{1}{8}\left[I_1(\beta) - I_3(\beta)\right]\right\}y^4$$

$$\tilde{I}(\beta) = \int_0^\infty dx\, f(\beta x)\,\frac{1}{x^3}J_2^2(x), \quad I_\mu(\beta) = \int_0^\infty \frac{dx}{x} f(\beta x) J_\mu^2(x).$$

$$\varepsilon_{tot}(y) = \varepsilon_{tot}(0) + \tfrac{1}{2}A_2(\beta)y^2 + \tfrac{1}{4}A_4(\beta,R)y^4, \quad y = \tfrac{1}{\beta}.$$

это неверно, см. 9/8

$$A_2(\beta) = -I_1(\beta), \quad A_4(\beta,R) = 4\left\{\frac{1}{4\pi}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 + 2\tilde{I}(\beta) - \tfrac{1}{8}\left[I_1(\beta) - I_3(\beta)\right]\right.$$

При $A_2 < 0$, $A_4 > 0$ минимум $\varepsilon_{tot}(y)$ даёт $y_0^2 = -\frac{A_2}{A_4}$;

$\varepsilon^{min}_{tot}(y_0) = \varepsilon_{tot}(0) - \frac{1}{4}\frac{A_2^2}{A_4}$, в точке $y=0$ — локальный max.

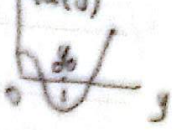
Escaneado con CamScanner

Date.

Тему физически сообщ. линии $A_4(\beta, R) = 0$?

файл new-vortex.mod.

Разложение $\varepsilon_{tot}(y)$ по y^2 хорошо ч/з $\beta \to 0$ (при $\beta \le 0{,}1$, $y_0^2 < 0{,}2$)



Построим линию $A_4(\beta, R) = 0$.

Разложение по y^2 асимптотически правильно лишь при $\beta \ll 1$

энергия "flower" state с конечным $y = \frac{1}{\xi}$ $\forall \beta$ лежит

энергия uniform II state с $\xi = \infty$, $y = 0$

	($R_0 = 18$ nm)							
L/R_0	10,55	3,64	2,72	1,78	1,38	1,14	0,98	0,88
R/R_0	1,5	1,8	2	2,5	3,0	3,5	4,0	6,0

→ На кривой $R_c(L) \to A_4(\beta, R) = 0$ идет снижение высоты R с ростом L/R_0, чтобы иметь физ. смысл потери устойчивости "flower" state. А если H здесь? На фазовой диаграмме A_2?

→ Посчитаем ε_m для пробных "ξ" – смещений скирмиона, не разлагая по $\frac{1}{\xi}$, $\xi \gg 1$.

$$\varepsilon_m^{vol}(\xi) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 d\rho \rho^2 \int_0^1 d\rho' \rho'^2 \int_0^\infty \frac{dx}{x} f(\beta x) \sum_{\mu=1} J_\mu(x\rho) J_\mu(x\rho') \hat{J}_\mu(\rho, \xi) \hat{J}_\mu(\rho', \xi)$$

$$F_\mu(\xi, x) = \int_0^1 d\rho \rho^2 J_\mu(x\rho) \hat{J}_\mu(\rho, \xi), \quad \hat{J}_\mu(\rho, \xi) = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos\mu\varphi \cdot \cos\varphi}{\sqrt{\rho^4 - 2\rho^2\xi^2\cos 2\varphi + \xi^4}}$$

$$\varepsilon_m^{vol}(\xi) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{dx}{x} f(\beta x) \sum_{\mu=1} F_\mu^2(\xi, x)$$ – т. объемная энергия II-flower state (ξ – положение центра скирмиона)

$$\varepsilon_{tot}(\xi) = \varepsilon_{ex}(\xi) + \varepsilon_m^{side}(\xi) + \varepsilon_m^{vol}(\xi)$$

Найдем где расположен $\min \varepsilon_{tot}(\xi)$.

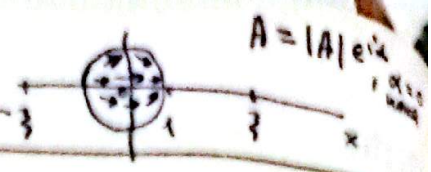
$L/R_0 = 0{,}5$; $R/R_0 = 1$ → $\xi_0 \cong 1{,}50$ → $\varepsilon_{tot}(\xi_0) = 0{,}067$ ($\varepsilon_{tot}^{uniform}(\beta = 0{,}3) = 0{,}091$)

$L/R_0 = 0{,}5$; $R/R_0 = 2$ → $\xi_0 = 1{,}18$ → $\varepsilon_{tot}(\xi_0) = 0{,}029$ ($\varepsilon_{tot}^{unif}(\beta = 1/4) = 0{,}059$)

Escaneado con CamScanner

Date. . .

Ось $0x$ - выделена.



6/VII "Flower" state, недиагональные компоненты (quadrupole moment)

"Meron state (центры инстантонов вне S_1 диска):

$$m_x + i m_y = W(z,\bar z),\quad W(z,\bar z) = \frac{f(z)}{|f(z)|},\quad f(z) = A(\xi^2 - z^2)$$

$$m_x(x,y) = \mathrm{Re}\, W(z,\bar z) = \frac{1}{|f(z)|}\mathrm{Re}\, f(z) = \frac{A}{|f|}\mathrm{Re}\,(\xi^2 - \rho^2 e^{i2\varphi}) =$$

$$= \frac{A}{|f(z)|}(\xi^2 - \rho^2\cos 2\varphi),\quad |f(z)| = \sqrt{f(z)\overline{f(z)}} = A\sqrt{(\xi^2 - \rho^2 e^{i2\varphi})(\xi^2 - \rho^2 e^{-i2\varphi})}$$

$$= A\sqrt{\rho^4 - 2\rho^2\xi^2\cos 2\varphi + \xi^4}$$

$$m_x(\vec\rho) = \frac{\xi^2 - \rho^2\cos 2\varphi}{\sqrt{\rho^4 - 2\rho^2\xi^2\cos 2\varphi + \xi^4}},\quad m_y(\vec\rho) = -\frac{\rho^2\sin 2\varphi}{\sqrt{\rho^4 - 2\rho^2\xi^2\cos 2\varphi + \xi^4}}$$

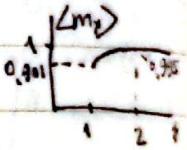
"Flower" state

$$\langle m_y\rangle_S = \frac{1}{S_d}\int_{S_d} dS\, m_y = 0,\quad \langle m_x\rangle_S = \frac{1}{S_d}\int_{S_d} d^2\vec\rho\; m_x(\vec\rho) = \left|\begin{matrix} R\to 1 \\ \rho/R\to\rho \\ \xi/R\to\xi \end{matrix}\right| =$$

$S_d = \pi R^2 \to \pi$

$$\langle m_x\rangle_S = \frac{1}{\pi}\int_0^1 d\rho\,\rho\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{\xi^2 - \rho^2\cos 2\varphi}{\sqrt{\rho^4 - 2\rho^2\xi^2\cos 2\varphi + \xi^4}}$$

— гран. момент (использ. фиол. начала th n)



$$\frac{1}{|\vec\rho - \vec\rho\,'|} = \int_0^\infty dk\, J_0(k|\vec\rho - \vec\rho\,'|) = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho'\rho\cos(\varphi - \varphi') + \rho'^2}} =$$

$$= \int dk \sum_\mu J_\mu(k\rho) J_\mu(k\rho') e^{i\mu(\varphi - \varphi')}.\quad \text{Здесь } \rho\to\rho^2,\ \rho'\to\xi^2,\ \varphi'\to\varphi$$

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^4 - 2\rho^2\xi^2\cos 2\varphi + \xi^4}} = \int_0^\infty dk \sum_\mu J_\mu(k\rho^2) J_\mu(k\xi^2) e^{i\mu 2\varphi} =$$

$$= \int dk\left[J_0(k\rho^2)J_0(k\xi^2) + 2\sum_{\mu=1} J_\mu(k\rho^2) J_\mu(k\xi^2)\cos 2\mu\varphi\right]$$

$$\langle m_x\rangle_{S_d} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 d\rho\,\rho\int_0^{2\pi} d\varphi\,(\xi^2 - \rho^2\cos 2\varphi)\int dk\left[J_0 J_0 + 2\sum_{\mu=1} J_\mu J_\mu\cos 2\mu\varphi\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\rho\,\rho\int_0^1 \left[\xi^2\cdot 2\pi J_0(k\rho^2)J_0(k\xi^2) - \rho^2\cdot 2\pi J_2(k\rho^2)J_2(k\xi^2)\right] =$$

$$= \frac{2\pi}{\pi}\int_0^\infty dk\int_0^1 d\rho\,\rho\left[\xi^2 J_0(k\rho^2)J_0(k\xi^2) - \rho^2 J_2(k\rho^2)J_2(k\xi^2)\right] = \left|\rho^2 = x\right| =$$

$$= \int_0^\infty dk\int_0^1 dx\left[\xi^2 J_0(kx)J_0(k\xi^2) - x\, J_2(kx)J_2(k\xi^2)\right]$$

$$\int_0^1 dx\, J_0(kx) = \frac{1}{k}\int_0^k dy\, J_0(y) = \frac{1}{k}2\sum_{\nu=0} J_{2\nu+1}(k)\quad \text{см. теорем. ф. Сонина}$$

$$\int_0^1 dx\, x\, J_2(kx) = \ldots \text{ так много не берется.}$$

$$\int_0^\infty dk\, J_0(k\xi^2)\frac{1}{k}J_{2\nu+1}(k) = F_\nu(\xi^2)$$

Date.

$$\langle m_x \rangle_S = \int_0^\infty dk \left[\zeta^2 J_0(k\zeta^2) \frac{2}{k} \sum_{\nu=0} J_{2\nu+1}(k) - \int_0^1 dx\, x\, J_2(kx) J_2(k\zeta^2) \right] =$$

$$= \int_0^\infty \frac{dk}{k} J_0(k\zeta^2) J_{2\nu+1}(k) - \int_0^1 dx\, x \int_0^\infty dk\, J_2(kx) J_2(k\zeta^2)$$

$$= 2\zeta^2 \sum_{\nu=0}$$

при $\zeta \to \infty$ $\sum_{\nu=0} \int \frac{dk}{k} J_0(k\zeta^2) J_{2\nu+1}(k) = \sum_{\nu=0} F_\nu(\zeta^2) \to \frac{1}{2} \frac{1}{\zeta^2}$ и $\langle m_x \rangle_S \to 1$.

$$\to Q_{\alpha\beta} = \int_{V_d} d^3z \left[3 m_\alpha x_\beta + 3 m_\beta x_\alpha - 2\delta_{\alpha\beta} (\vec{m} \cdot \vec{r}) \right]$$

Для нерона $m_z = 0$ и $Q_{zz} = 0$. $\vec{m} \cdot \vec{r} = \vec{m} \cdot \vec{\rho} = m_x x + m_y y =$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\cdot)}} (\zeta^2 - \rho^2 \cos 2\varphi, -\rho^2 \sin 2\varphi)(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\cdot)}} \left(\rho\cos\varphi (\zeta^2 - \rho^2 \cos 2\varphi) - \rho^3 \sin\varphi \sin 2\varphi \right) \text{ и } \int_0^{2\pi} d\varphi\, (\vec{m} \cdot \vec{\rho}) = 0$$

$$Q_{\alpha\beta} = L \int d^2\vec{\rho} \left[3 m_\alpha x_\beta + 3 m_\beta x_\alpha - 2\delta_{\alpha\beta} (\vec{m} \cdot \vec{\rho}) \right] \quad \text{где } \alpha, \beta = x, y.$$

$$Q_{\alpha z} = 3 \int d^3z \left[m_\alpha z \right] = 3 \int_{-L/2}^{L/2} dz \cdot z \int d^2\vec{\rho}\, m_\alpha(\vec{\rho}) = 0$$

$$Q_{xx} = L \int d^2\vec{\rho} \left[6 m_x x - 2(\vec{m}\vec{\rho}) \right] = 2L \int d^2\vec{\rho} \left[2 m_x x - m_y y \right]$$

$$\int d^2\vec{\rho}\, m_x x = \int d^2\vec{\rho}\, \frac{(\zeta^2 - \rho^2\cos 2\varphi)\rho\cos\varphi}{\sqrt{\rho^4 - 2\zeta^2\rho^2\cos 2\varphi + \zeta^4}} \sim \int d\varphi \frac{[\cos\varphi \text{ или } \cos 3\varphi]}{\sqrt{(\cdot)}} = 0.$$

→ У Усова (ЖЭТФ'94) есть только $m_y, m_z \neq 0$, т.к. $m_x = 0$ и/за использования ТВ – 120 порядка $\vec{M}_0 \parallel Ox$, $\vec{m} \perp \vec{M}_0$.

$$\int d^2\vec{\rho}\, (\vec{m} \cdot \vec{\rho}) = \int_0^1 d\rho\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\rho\zeta^2\cos\varphi - \rho^3\cos\varphi}{\sqrt{(\cdot)}} = \int_0^1 d\rho\rho^2(\zeta^2 - \rho^2) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi \cos\varphi}{\sqrt{\rho^4 - 2\rho^2\zeta^2\cos 2\varphi + \zeta^4}} =$$

$= 0$, т.к. в разложении $\frac{1}{\sqrt{(\cdot)}}$ есть только четные $\cos^{2n}\varphi$.

$$Q_{xx} = L \int d^2\vec{\rho} \left[6 m_x x - 2(\vec{m} \cdot \vec{\rho}) \right] = 0 \text{ тогда.}$$

$$Q_{yy} = 6L \int d^2\vec{\rho} \left[m_y y \right] = 6L \int d\rho\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(-\rho^2)\sin^2\varphi \cdot \rho\sin\varphi}{\sqrt{(\cdot)}} \sim \int d\varphi \frac{[\cos\varphi \text{ или } \cos 3\varphi]}{\sqrt{(\cdot)}} =$$

$$Q_{xy} = 3L \int d^2\vec{\rho} \left[m_x y + m_y x \right] = 3L \int d\rho\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(\zeta^2 - \rho^2\cos 2\varphi)\rho\sin\varphi - \rho^3 \sin 2\varphi \cos\varphi}{\sqrt{(\cdot)}} =$$

$$= 3L \int d\rho\rho \int d\varphi \frac{1}{\sqrt{(\cdot)}} \rho \left[\zeta^2 \sin\varphi - \rho^2 \sin\varphi (\cos 2\varphi + 2\cos^2\varphi) \right] \sim \int d\varphi \frac{[\sin\varphi \text{ или } \sin 3\varphi]}{\sqrt{(\cdot)}} = 0$$

Вывод: в "flower" state с $f(z) = A(\zeta^2 - z^2)$ $Q_{\alpha\beta} = 0$.

"квадрупольного момента" дома нет.

Date. . .

→ Оценка избыточной энергии "flavour" state (1/3)

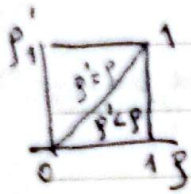
$$\varepsilon_m^{vol}(\xi) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{dx}{x} f(\rho x) \sum_{\mu=1} F_\mu^2(\xi x) \,, \quad f(a) \le 1$$

$$\varepsilon_m^{vol}(\xi) \le \frac{2}{\pi^2}\int \frac{dx}{x}\sum_{\mu=1} F_\mu^2(\xi,x) = \frac{2}{\pi^2}\sum_{\mu=1}\left[\frac{dx}{x}\left[\int_0^1 d\rho\rho^2 J_\mu(x\rho) J_\mu(\rho\xi)\right.\right.$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\sum_{\mu=1}\int_0^\infty \frac{dx}{x}\int_0^1 d\rho\rho^2 J_\mu(x\rho) J_\mu(\rho,\xi)\cdot\int_0^1 d\rho'\rho'^2 J_\mu(x\rho') J_\mu(\rho',\xi)$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} J_\mu(x\rho) J_\mu(x\rho') = \frac{1}{2\mu}\begin{cases}\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^\mu, & \rho<\rho' \\ \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^\mu, & \rho'<\rho\end{cases} = \frac{1}{2\mu}\Phi(\rho,\rho')$$

$$\varepsilon_m^{vol}(\xi) \le \frac{2}{\pi^2}\sum_{\mu=1}\frac{1}{(2\mu)}\int_0^1 d\rho\rho^2\int_0^1 d\rho'\rho'^2 J_\mu(\rho,\xi) J_\mu(\rho',\xi)\Phi(\rho,\rho') =$$



$$= \frac{2}{\pi^2}\frac{1}{4}\sum_{\mu=1}\frac{1}{\mu^2} 2\int_0^1 d\rho\rho^2 J_\mu(\rho,\xi)\int_0^\rho d\rho'\rho'^2 J_\mu(\rho',\xi)\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^\mu$$

$(\rho'<\rho)$

$$\Phi(\rho,\rho') \le \Phi_{max}(\rho=\rho') = 1$$

$$\to \varepsilon_m^{vol}(\xi) \le \frac{1}{2\pi^2}\sum_{\mu=1}\frac{1}{\mu^2}\left[\int_0^1 d\rho\rho^2 J_\mu(\rho,\xi)\right]^2$$

$$\int_0^1 d\rho\rho^2 J_\mu(\rho,\xi) = \int_0^1 d\rho\rho^2\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos\mu\varphi\cdot\cos\varphi}{\sqrt{\rho^4 - 2\xi^2\rho^2\cos 2\varphi + \xi^4}} = \left|\begin{matrix}\cos 2\varphi \to 1 \\ \varphi\to 0\end{matrix}\right|$$

$$= \int d\rho\rho^2\int d\varphi\frac{\cos\mu\varphi\cdot\cos\varphi}{(\rho^2-\xi^2)} = \int_0^1 d\rho\frac{\rho^2}{\rho^2-\xi^2}\pi\delta_{\mu 1} = \left[1-\xi\,\mathrm{arcth}\frac{1}{\xi}\right]\pi\delta_{\mu 1}$$

$$\to \varepsilon_m^{vol}(\xi) \le \frac{1}{2\pi^2}\sum_{\mu=1}\frac{1}{\mu^2}\pi^2\delta_{\mu 1}\left[1-\xi\,\mathrm{arcth}\frac{1}{\xi}\right]^2 = \frac{1}{2}\left[1-\xi\,\mathrm{arcth}\frac{1}{\xi}\right]^2$$

При $\xi>1$: $\mathrm{arcth}\frac{1}{\xi} = \mathrm{arcth}\,\xi = \sum_{n=0}\frac{1}{(2n+1)\xi^{2n+1}} = \frac{1}{\xi} + \frac{1}{3\xi^3} + \frac{1}{5\xi^5} + \dots$

$$\varepsilon_m^{vol}(\xi) \le \frac{1}{18}\frac{1}{\xi^4}$$, но при $\xi\to 1$ аналитическое продолжение за ξ не рассматривается, поскольку нарушается "core" поверхностного слоя.

См. продолжение 2/I

Date. . . → С Кокей для PRB-paper:

① Проверить аргументы сравнительного vortex R-L из работ JEMS'01 (Б)

② Рассм. равновесие E II:flower state и vortex и метастабильности II-flower state и/или vortex R. (когда отличает II flower → ⊥ s.d., II flower → vortex, равенство энергий)

③ Комплекс. представление намагниченности ($z = T(t)$).

////////

Послал на MMM в Seattle Abstracts по m. coupling с новостями, vortex dynamics (Нов., Ив.), SW micros (Славин). 9/VII

→ Сравнительный анализ моделей сдвига vortex. 10/VII

	Side Surface charges $\sigma = (\vec{M}\cdot\vec{n})$	$\partial\vec{M}/\partial n$	Доминиро $H_{an}(s\to\infty)$,
Rigid vortex m.	есть	$\neq 0$	— хорошо для χ, $H_{an}(s\to)$, плохо для $R_c(L)$ - сост.
Conformal m.	есть	0	— плохо для χ, не дает $R_c(L)$ хорошо для H_{an}; H_n - ?
Квадратич. М. ($\chi_{ij} = i\chi_0 + A - H_2 k$)	нет	$\neq 0$	— отн. $R_c(L)$ - сравн. vortex H_{an} - ? - нужно 0, т.к. $(\vec{m}\cdot\vec{r})_S = 0$ H_n - ? χ - ? (через "flower" не выходит)

По Барьяхтару - ФП - I (annihilation of vortex) при $H_i = 0$. H_i - полное внутр. поле в доме, грубо усредненное

$$H_i = H_{external} + H_{exch} + H_m \Rightarrow H_i = 0 \text{ даст } H_{ext} = H_{an}.$$

→ В conformal model $\langle H_{ex}\rangle_V = 0$ и в H_{an} обмен не входит, $H_{an} = f(L/R)$ и не зависится из-за об. вклада $\sim \left(\frac{R_0}{R}\right)^2$. Т.е. conformal model, в принципе, не может дать границы устойчивости вихря т.к. $H_{an}^{conf} > 0 \; \forall L, R$.

Интересно найти H_{an} "rigid" v. model и квадратич. модели из $H_i = 0$.

($f(z) = \frac{i}{c}(z - S)$)

Date. . .

$$\vec{H}_{ex} = \alpha \nabla^2 \vec{M}, \quad \langle \vec{H}_{ex} \rangle_{V_d} = \frac{\alpha}{V_d} \int_{V_d} d^3r \; div(grad \vec{M}) =$$

$$= \frac{\alpha}{V_d} \oint_S dS \, (grad \vec{M} \cdot \vec{n}) = \frac{\alpha}{V_d} \oint_S dS \frac{\partial \vec{M}}{\partial n} \quad (=0 \text{ para conformal model})$$

→ Rigid v. m. line „core" $w(z,\bar{z}) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$, $m_x + i m_y = w(z,\bar{z})$

$$w(z,\bar{z}) = \frac{i_c (z-s)}{|i_c (z-s)|} = i \frac{(z-s)}{|z-s|} = i \frac{(x-s)+i(y)}{\sqrt{(x-s)^2+y^2}} = \frac{-y+i(x-s)}{\sqrt{\rho^2+s^2-2xs}}$$

s - bans. ($\vec{s} \| 0x$)

Regreso. Hago $\langle H_{ex}^{\alpha} \rangle_{V_d} = \left(\frac{\alpha}{V_d}\right) \oint dS \frac{\partial M_\alpha}{\partial n}$, M_α - componente $\alpha = x, y, z$

$grad \vec{m} = \left(\frac{\partial m_x}{\partial x}, \frac{\partial m_y}{\partial y} \right)$, $\vec{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$

$$\nabla \Phi(\rho,\varphi,z) = \hat{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \hat{\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \hat{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \vec{n} = \hat{\rho} \text{ para x/y/z}$$

$$\rightarrow (grad \varphi \cdot \vec{n}) = (grad \Phi)_\rho = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}$$

$$m_x(\vec{\rho}) = Re\, w = \frac{-\rho \sin\varphi}{\sqrt{\rho^2+s^2-2\rho\cos\varphi \cdot s}}, \quad m_y(\vec{\rho}) = \frac{\rho\cos\varphi - s}{\sqrt{\rho^2+s^2-2s\rho\cos\varphi}}$$

Rigid v. m. line „core"

a) $$\frac{\partial m_x}{\partial n} = \frac{\partial m_x}{\partial \rho} = -\rho \sin\varphi \left(-\frac{1}{2}\right) \left[\rho^2+s^2-2\rho s\cos\varphi\right]^{-3/2} 2(\rho - s\cos\varphi) -$$

$$- \frac{\sin\varphi}{\sqrt{(\cdot)}} = \frac{\sin\varphi}{(\rho^2+s^2-2\rho s\cos\varphi)^{3/2}} \left[\rho(\rho - s\cos\varphi) - (\rho^2+s^2-2\rho s\cos\varphi)\right]$$

$$= \frac{s(\rho\cos\varphi - s)\sin\varphi}{(\rho^2+s^2-2\rho s\cos\varphi)^{3/2}}, \rightarrow \left(\frac{\partial m_x}{\partial n}\right)_{\rho=1} = \frac{s(\cos\varphi - s)\sin\varphi}{(1+s^2-2s\cos\varphi)^{3/2}}$$

b) $$\frac{\partial m_y}{\partial n} = \frac{\partial m_y}{\partial \rho} = (\rho\cos\varphi - s)\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\rho^2+s^2-2\rho s\cos\varphi\right]^{-3/2} 2(\rho - s\cos\varphi) +$$

$$+ \frac{\cos\varphi}{\sqrt{(\cdot)}} = \frac{1}{[\cdot]^{3/2}} \left[(\rho - s\cos\varphi)(s - \rho\cos\varphi) + \cos\varphi(\rho^2+s^2-2\rho s\cos\varphi) \right]$$

$$= \frac{1}{[\cdot]^{3/2}} \left[\rho s - \cancel{\rho^2\cos\varphi} - \cancel{s^2\cos\varphi} + s\rho\cos^2\varphi + \cancel{\cos\varphi \cdot \rho^2} + \cancel{\cos\varphi \cdot s^2} - 2\rho s\cos^2\varphi \right] =$$

$$= \frac{s\rho\sin^2\varphi}{[\rho^2+s^2-2s\rho\cos\varphi]^{3/2}}, \rightarrow \left(\frac{\partial m_y}{\partial n}\right)_{\substack{\rho=1 \\ s\,fixed}} = \frac{s\cdot\sin^2\varphi}{[1+s^2-2s\cos\varphi]^{3/2}}$$

$$\langle H_{ex}^x \rangle_V = \frac{dM_s}{V} \oint_S dS \frac{\partial m_x}{\partial n} = \frac{dM_s}{V} \left[\int_{S_{side}} dS \frac{\partial m_x}{\partial n} + \int_{S_{face}} dS \frac{\partial m_x}{\partial n} \right].$$

$$\int_{S_{face}} dS(\cdot) = \int_{face} dS \, (\cdot)_{s=0} = 0.$$

↑ se calcular en „s"

Escaneado con CamScanner

$$\langle H_{ex}^x \rangle_V = \frac{\alpha M_s}{V} \int_{side} dS \frac{\partial m_x}{\partial n} = \left(\frac{\alpha M_s}{V}\right) \int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{s(\cos\varphi - s)\sin\varphi}{[1+s^2-2s\cos\varphi]^{3/2}} = 0$$

$\frac{\partial m_x}{\partial n}$ в силу нечет. подынтегр. функции.

$$\langle H_{ex}^y \rangle_V = \frac{\alpha M_s}{V} \int_{side} dS \frac{\partial m_y}{\partial n} = \left(\frac{\alpha M_s}{V}\right) L \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{s \cdot \sin^2\varphi}{[1+s^2-2s\cos\varphi]^{3/2}} \approx |s<<1| =$$

$$= \frac{\alpha M_s}{\pi R^2 L} \cdot L \cdot s \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2\varphi = \frac{\alpha M_s}{\pi R^2} s \cdot \pi = |\alpha = R_0^2| = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 s M_s$$

$\langle M_s \rangle$

Более $H_i^y = H + \langle H_m^y \rangle + \langle H_{ex}^y \rangle = H + \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 s M_s - 4\pi N_{yy}(M_s s) = 0$

уравнение. $s \to 1$ даст H_{an}.

Аналогичный расчет H_{an} интересно провести для квадратичной Δ-модели.

Date. 11. 07. SW-rectan.dat

Компоненты ФГ для rectan.dat. Возможно ли разложение по h/w? (см. 8/VI).

$$\Delta = |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|$$

$$G_{zz}(\vec{\rho},\vec{\rho}') = G_{zz}(|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|) = \frac{2}{L}\left[\frac{1}{\sqrt{L^2+\Delta^2}} - \frac{1}{\Delta}\right]$$

$$G_{\alpha\beta}(\vec{\rho},\vec{\rho}') = G_{\alpha\beta}(\vec{\rho}-\vec{\rho}') = -\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta'} F(\Delta)$$
$$(\alpha\beta = x,y)$$

$$F(\Delta) = \frac{2}{L}\left[L\,\mathrm{Arsh}\left(\frac{L}{\Delta}\right) + \Delta - \sqrt{L^2+\Delta^2}\right]$$

$$F'(\Delta) = \frac{2}{L}\left[1 - \frac{\sqrt{L^2+\Delta^2}}{\Delta}\right], \qquad F''(\Delta) = 2\frac{L}{\Delta^2}\frac{1}{\sqrt{L^2+\Delta^2}}$$

$$G_{xx}(\vec{\rho},\vec{\rho}') = \frac{2L}{\Delta^2}\frac{1}{\sqrt{L^2+\Delta^2}}\frac{(x-x')^2}{\Delta^2} + \frac{1}{\Delta}\frac{2}{L}\left[1-\frac{\sqrt{L^2+\Delta^2}}{\Delta}\right]\left[1-\frac{(x-x')^2}{\Delta^2}\right] =$$

$$= \frac{2}{\Delta L}\left[1-\frac{\sqrt{L^2+\Delta^2}}{\Delta}\right] + 2\frac{(x-x')^2}{\Delta^2}\left\{\frac{L}{\Delta^2}\frac{1}{\sqrt{(\cdot)}} - \frac{1}{\Delta L}\left(1-\frac{\sqrt{L^2+\Delta^2}}{\Delta}\right)\right\} =$$

$$= \frac{2}{L\Delta}\left[1-\frac{\sqrt{L^2+\Delta^2}}{\Delta}\right] + 2\frac{(x-x')^2}{\Delta^2}\frac{1}{\Delta L}\left\{\frac{L^2}{\Delta}\frac{1}{\sqrt{L^2+\Delta^2}} + \frac{\sqrt{L^2+\Delta^2}}{\Delta} - 1\right\} =$$

$$= \frac{2}{L\Delta}\left[1-\frac{1}{\Delta}\sqrt{L^2+\Delta^2}\right] + 2\frac{(x-x')^2}{\Delta^2}\frac{1}{L\Delta^2\sqrt{L^2+\Delta^2}}\left[2L^2+\Delta^2-\Delta\sqrt{\Delta^2+L^2}\right]$$

$\left(\frac{L}{\Delta}\right)$ нельзя считать $\ll 1$ из-за $\Delta = |\vec{\rho}-\vec{\rho}'| = 0$ может.

→ Т.е. в координатном представлении самих $G_{\alpha\beta}$ по $\frac{L}{w}$ разложить нельзя. Можно разложить H_{mn}^{mn}, X_{mn}^{mn}, Z_{mn}^{mn} при $m=n=0$ по формулам Joseph-Schl. как средние фазовых факторов. Иначе H_{mn}^{mn}, X_{mn}^{mn}, Z_{mn}^{mn} — масс. эл. от $G_{\alpha\beta}$ не вычислить (на $\cos \pi m x$), при $m,n \neq 0$. В $\vec{k}$-представлении для разложения по $\frac{L}{w}$ можно получить только нав. член, которого недостаточно.

→ Может хотя $g_{\alpha\beta}(x,x') = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell dy\,dy'\,G_{\alpha\beta}(\vec{\rho},\vec{\rho}')$, оу $\parallel \vec{M}_0$ удастся получить в виде разложения по L/w или $L/\ell \ll 1$.

Например (см. 15/I 2000г.):

$$g_{zz}(x,x') = \frac{4}{L}\left[\ln\frac{\xi}{\sqrt{L^2+\xi^2}} - \frac{1}{2\ell}\frac{L^2}{\left(\ell+\sqrt{\ell^2+\xi^2}\right)} + \frac{1}{\ell}\left(\sqrt{L^2+\xi^2}-\xi\right)\right], \quad \xi = |x-x'|.$$

(это g_{zz} с точн. до (L/ℓ). $\ell\to\infty$ соотв. прежнему wires.

Escaneado con CamScanner

Проверка и доработка Hu,an "rigid" v. model

Date.

Это разложение для $g_{dp}(x,x')$ никаких преимуществ не дает, т.к. $\int_0^w dx\,dx' \cos(\pi m \frac{x}{w}) \cos(\pi n \frac{x'}{w}) g_{dp}(x,x') \sim H^{mn}_{ma}$, X^{mn}_{ma}, Z^{mn}_{ma} приведена считать численно, аналитически они не будут даже в пределе $\frac{l}{L} \to \infty$.

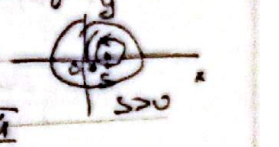
Упростим W_H и W_m - "rigid" vortex model (для paper с Ковасами) 12/VII

Две version of W_H (см. 17/IV 001.)

1) $W_H(s) = -h \frac{1}{\pi} \int_0^1 d\rho\,\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(s-\rho\cos\varphi)}{\sqrt{\rho^2+s^2-2\rho s\cos\varphi}}$, $s<0$, общая вихрь на Ox

2) $W_H(s) = -hs \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2\varphi \sqrt{1-s^2\sin^2\varphi}$ - w/m интегр. в сист. координат с центром в центре vortex

$m_x + i m_y = W(z,\bar z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$ - вне "core". $f(z) = \frac{i}{c} z$.



сдвиг на "s" вдоль x: $z \to z-s$ и $f(z) = \frac{i}{c}(z-s)$, см. 10/VI

и $m_x(\vec\rho) = \mathrm{Re}\,w$, $m_y(\vec\rho) = \mathrm{Im}\,w$.

$\langle m_x \rangle_{S_d} = 0$, $\langle m_y \rangle_{S_d} = \frac{1}{S_d} \int dS\, m_y(\vec\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 d\rho\,\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(\rho\cos\varphi - s)}{\sqrt{\rho^2+s^2-2\rho s\cos\varphi}} \neq$

$(S_d = \pi R^2 \to \pi)$ (т.к. осн. "core" на диаг. вихря)

$\neq -\frac{s}{\pi} \int_0^1 d\rho\,\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\sqrt{\rho^2+s^2-2\rho s\cos\varphi}}$, т.к. $\rho\cos\varphi$ - чем далек вихрь $\sim s$.

См. 9/IV 001.: $J_1 = \int_0^1 d\rho\,\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\sqrt{\rho^2+s^2-2\rho s\cos\varphi}} = 2\pi \int_0^\infty \frac{dk}{k} J_0(ks) J_1(k) =$

$= 2\pi \left[\int_0^\infty \frac{dk}{k} \{J_0(ks)-1\} J_1(k) + \int_0^\infty \frac{dk}{k} J_1(k) \right] = |s\le 1| = \left| \begin{matrix} 6.533 \\ \text{Тор.-Р.} \end{matrix} \right| =$

$= 2\pi \left[-\frac{1}{4} s^2 + 1 \right] = 2\pi \left[1 - \frac{1}{4} s^2 \right]$, $s \le 1$.

$\langle m_y \rangle_{S_d} = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho\,\rho^2 \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\rho^2+s^2-2\rho s\cos\varphi}} - s \int_0^1 d\rho\,\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\sqrt{\rho^2+s^2-2\rho s\cos\varphi}} \right]$

$J_2 = \int_0^1 d\rho\,\rho^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi \frac{1}{\sqrt{(\cdot)}} = 2\pi \int_0^1 d\rho\,\rho^2 \int_0^\infty dk\, J_1(k\rho) J_1(ks) =$

$= 2\pi \int dk\, J_1(ks) \int_0^1 d\rho\,\rho^2 J_1(k\rho) = 2\pi \int_0^\infty dk\, J_1(ks) \frac{1}{k} J_2(k)$

Для рассм. J_1 и J_2 вместе, либо $\frac{4}{k} J_2(k) = J_1(k) + J_3(k)$, $\frac{2}{ks} J_1(ks) = J_0(ks) + J_2(ks)$

Escaneado con CamScanner

Date. 14 · 07.

$$\langle m_y\rangle_s = \frac{1}{\pi}\left[2\pi\int_0^\infty \frac{dk}{k} J_1(ks) J_2(k) - s\,2\pi\int_0^\infty \frac{dk}{k} J_0(ks) J_1(k)\right].$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{dk}{k}\left[J_1(ks)J_2(k) - sJ_0(ks)J_1(k)\right] =$$

$$= 2\int \frac{dk}{k}\left[J_2(k)\,\frac{1}{2}ks\left\{J_0(ks)+J_2(ks)\right\} - s\,J_0(ks)\left\{J_0(k)+J_2(k)\right\}\frac{1}{2}k\right]$$

$$= s\int_0^\infty dk\left[J_2(k)J_2(ks) - J_0(k)J_0(ks)\right], \quad s\le 1, \text{ Ising model.}$$

При $s\to 0$ $\langle m_y\rangle_s = s(-1)\int_0^\infty dk\, J_0(k) = -s$ — верно, т.к. $\langle m_y\rangle_s > 0$ для $s>0$!

Нам все же нужно $J_2(s) = 2\pi\int_0^\infty \frac{dk}{k} J_1(ks) J_2(k)$

Тогда $\langle m_y\rangle_s = \frac{1}{\pi}\left[J_2 - sJ_1\right] = 2\left[\int_0^\infty \frac{dk}{k} J_1(ks)J_2(k) - s\left(1-\frac{1}{4}s^2\right)\right]$

$$F(s) = \int_0^\infty \frac{dk}{k} J_1(ks)\,J_2(k), \quad \int_0^s F(s)\,ds = \int_0^\infty \frac{dk}{k} J_2(k)\int_0^s ds\, J_1(ks) =$$

$$= \int \frac{dk}{k} J_2(k)\,\frac{1}{k}\left[1-J_0(ks)\right] = \int_0^\infty \frac{dk}{k^2} J_2(k) - \int_0^\infty \frac{dk}{k^2} J_2(k) J_0(ks)$$

При $s\to 0$: $\int \frac{dk}{k} J_1(ks)J_2(k) = \frac{s}{2}\int_0^\infty dk\, J_2(k) = \frac{s}{2}$ и $\langle m_y\rangle_s = 2\left[\frac{s}{2} - s\right] = -s$, верно.

$s\to -s$ (как в 9-10 (200)).

$$W_H(s) = -h\langle m_y\rangle_s = -hs\int_0^\infty dk\left[J_0(k)J_0(ks) - J_2(k)J_2(ks)\right]$$

Ising model

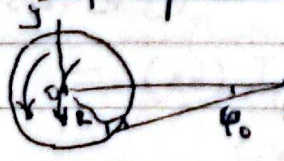
Можно показать. $\int_0^\infty dx\, J_\nu(ax)J_\nu(bx) = \frac{1}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^\nu P_{-1/2}^{(\nu,0)}\left(1-2\frac{b^2}{a^2}\right)$, $b<a$.

↑ полином Якоби.

$$\int dk\left[J_0(k)J_0(ks) - J_2(k)J_2(ks)\right] = P_{-1/2}^{(0,0)}(1-2s^2) - s^2 P_{-1/2}^{(2,0)}(1-2s^2)$$

Вообще $\to$ у $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, n — целое, n — дробное $\to$ функ-я Якоби. (Ферм.-Рамбер.)

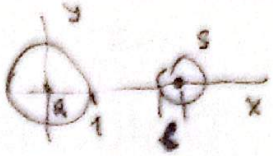
14/VII Проверим расчет H_n - nucleation in dot array от 13-14/



Исходим из канон. подхода с $f(z)=\frac{i}{z}$ по s - вне диска. Считаем $s>1$ (и даже $s\gg 1$), т.е. внутри диска нерочная область $w(z,\bar z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$ и компоненты $\vec m$ как 10/VII

$$m_x(\vec\rho) = -\frac{\rho\sin\varphi}{|\vec\rho|}, \quad m_y(\vec\rho) = \frac{\rho\cos\varphi - s}{|\vec\rho|}, \quad |\vec\rho| = \sqrt{\rho^2+s^2-2\rho s\cos\varphi}$$

Escaneado con CamScanner



Zadaće.

1. Pomoću (2-rigid. mod.) dokazati $\operatorname{div}\vec{m}=0$ ($W_m^{vol}=0$) i $W_m^{face}=0$, $s-c>1$, $s>1+c$, za "core" na vakuumu gdje. Naći W_m^{Side} i W_M.

$$\frac{1}{|f(\vartheta)|}=\frac{1}{\sqrt{\rho^2+s^2-2\rho s\cos\varphi}}=\left|\begin{matrix}s>\rho\\ \rho<1\end{matrix}\right|=\frac{1}{s}\sum_{n=0}P_n(\cos\varphi)\left(\frac{\rho}{s}\right)^n$$

$$\vartheta=(\vec{m}\cdot\vec{n})_s=\frac{1}{|f|}(-\rho\sin\varphi,\ \rho\cos\varphi-s)\cdot(\cos\varphi,\sin\varphi)=$$

$$=\frac{1}{|f|}\left[-\rho\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi(\rho\cos\varphi-s)\right]=-\frac{s\cdot\sin\varphi}{|f|}$$

$$\frac{1}{R^2}W_m^{Side}=\frac{1}{2}\int_{S\text{fun.}}dS\int_{S\text{fun.}}dS'\,\frac{\vartheta(z)\vartheta(z')}{|z-z'|}=\frac{1}{2}s^2\int_{S\text{fun.}}dS\int_{S\text{fun.}}dS'\,\frac{\sin\varphi\sin\varphi'}{|f_{(\vartheta)}|\cdot|f_{(\vartheta')}|\cdot|z-z'|}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\rho=1\text{ na }S_{fun.},\ dS=dz\,R\,d\varphi\\ |f(\vartheta)|=\sqrt{1+s^2-2s\cos\varphi}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}s^2R^2\int_0^{L/R}dz\,dz'\int_0^{2\pi}d\varphi\int d\varphi'\sin\varphi\sin\varphi'\int dk\,e^{-k|z-z'|}\cdot$$

$$\cdot\sum_\mu J_\mu^2(k)\,e^{i\mu(\varphi-\varphi')}\,\frac{1}{\sqrt{1+s^2-2s\cos\varphi}}\,\frac{1}{\sqrt{1+s^2-2s\cos\varphi'}}=$$

$$=\frac{1}{2}s^2\cdot(2L)\int_0^{2\pi}d\varphi\,d\varphi'\int\frac{dk}{k}f(\beta k)\sum_\mu J_\mu^2(k)\,\frac{e^{i\mu\varphi}\sin\varphi}{\sqrt{1+s^2-2s\cos\varphi}}\,\frac{e^{-i\mu\varphi'}\sin\varphi'}{\sqrt{1+s^2-2s\cos\varphi'}}$$

$$I_\mu(s)=\int_0^{2\pi}d\varphi\,\frac{e^{i\mu\varphi}\sin\varphi}{\sqrt{1+s^2-2s\cos\varphi}}=\int_0^{2\pi}d\varphi\,\frac{\sin\mu\varphi\cdot\sin\varphi}{\sqrt{1+s^2-2s\cos\varphi}}$$

$$\frac{W_m^{Side}}{M_s^2V_d}=\frac{1}{W_m^{Side}}=\frac{1}{\pi L}s^2L\int\frac{dk}{k}f(\beta k)\sum_\mu J_\mu^2(k)\,I_\mu^2(s)=$$

$$(L=\pi L)$$

$$=\frac{2}{\pi}s^2\int_0^\infty\frac{dk}{k}f(\beta k)\sum_{\mu=1}^\infty J_\mu^2(k)\,I_\mu^2(s)$$

— Lepo kako gnesca, tako i gnesca $s>1$.

"rigid" v. modal

Izračunajmo I_μ, $s>>1$ - razumljivo:

$$I_\mu(s)=\int_0^{2\pi}d\varphi\,\frac{\sin\mu\varphi\cdot\sin\varphi}{\sqrt{1+s^2-2s\cos\varphi}}=\int_0^{2\pi}d\varphi\,\sin\mu\varphi\cdot\sin\varphi\,\frac{1}{s}\sum_{n=0}\frac{1}{s^n}P_n(\cos\varphi)$$

$$=\frac{1}{s}\int_0^{2\pi}d\varphi\,\sin\mu\varphi\cdot\sin\varphi\left[1+\frac{1}{s}\cos\varphi+\frac{1}{s^2}\frac{1}{2}(3\cos^2\varphi-1)+\dots\right]=$$

$$=\frac{1}{s}\pi\delta_{\mu1}+\frac{1}{s^2}\int d\varphi\,\frac{1}{2}\left[\cos(\mu-1)\varphi-\cos(\mu+1)\varphi\right]\cos\varphi+\frac{1}{s^3}\frac{1}{2}\int d\varphi\,\cdot$$

$$\cdot\int d\varphi\,\frac{1}{2}\left[\cos(\mu-1)\varphi-\cos(\mu+1)\varphi\right]\frac{1}{2}\left[1+3\cos2\varphi\right]=$$

$$=\frac{1}{s}\pi\delta_{\mu1}+\frac{1}{2}\frac{1}{s^2}\pi(\delta_{\mu2}-\delta_{\mu0})+\frac{1}{s^3}\frac{1}{8}\pi\left[2\delta_{\mu1}+3\delta_{\mu3}-3\delta_{\mu1}\right]=$$

$$=\frac{\pi}{s}\left[\delta_{\mu1}+\frac{1}{2}\frac{1}{s}(\delta_{\mu2}-\delta_{\mu0})+\frac{1}{8}\frac{1}{s^2}(3\delta_{\mu3}-\delta_{\mu1})\right]$$

$$I_\mu^2(s)=\frac{\pi^2}{s^2}\left[\delta_{\mu1}+\frac{1}{4s^2}(\delta_{\mu2}+\delta_{\mu0})-\frac{9}{8}\frac{1}{s^2}\delta_{\mu1}\right]$$

Escaneado con CamScanner

Date. 15. 07.

$$W_m^{side}(s\gg1) = \frac{2}{\pi}s^2\int\frac{dk}{k}f(\rho k)\sum_{\mu=1} J_\mu^2(k)\frac{\pi^2}{s^2}\left[\delta_{\mu1}+\frac{1}{4s^2}\left(\delta_{\mu2}+\delta_{\mu0}-\delta_{\mu1}\right)\right]$$

$$= 2\pi\int\frac{dk}{k}f(\rho k)J_1^2(k) + \frac{2\pi}{4s^2}\int\frac{dk}{k}f(\rho k)\left[-J_1^2(k)+J_2^2(k)\right] =$$

$$= 2\pi F_1(\rho) + \frac{\pi}{2}\frac{1}{s^2}\int\frac{dk}{k}f(\rho k)\left[J_2^2(k)-J_1^2(k)\right]$$

$s = \frac{1}{\sin\varphi_0}$, $\sin\varphi_0 = \varphi_0 - \frac{1}{6}\varphi_0^3$, $\frac{1}{s} = \sin\varphi_0 = \varphi_0 - \frac{1}{6}\varphi_0^3$

$\frac{1}{s^2} = \sin^2\varphi_0 = \varphi_0^2 - \frac{1}{3}\varphi_0^4 + \dots$, сохр. до φ_0^2 $\frac{1}{s^2} = \varphi_0^2$.

$$\rightarrow W_m^{side}(s\gg1) = 2\pi F_1(\rho) + \frac{\pi}{2}\frac{1}{s^2}\left[F_2(\rho)-F_1(\rho)\right],\quad F_\mu(\rho) = \int_0^\infty\frac{dk}{k}f(\rho k)J_\mu^2(k)$$

Это разложение совпадает с разложением по $\frac{1}{s^2}=\varphi_0^2$ в квадратн. и/дифракции. Верно.

Zeaman $\rightarrow \langle m_y\rangle_s = \frac{1}{\pi}\int_0^1 d\rho\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\frac{\rho\cos\varphi - s}{\sqrt{\rho^2+s^2-2\rho s\cos\varphi}} = \frac{1}{\pi}\int d\rho\rho\int d\varphi(\rho\cos\varphi - s)\frac{1}{s}\sum_{n=0}P_n(\cos\varphi)\frac{\rho^n}{s^n}$

$$= \frac{1}{\pi}\int d\rho\rho\int d\varphi(\rho\cos\varphi-s)\frac{1}{s}\left[1+\frac{\rho}{s}\cos\varphi+\frac{\rho^2}{2s^2}(3\cos^2\varphi-1)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi s}\int d\rho\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\Big[\rho\cos\varphi+\frac{\rho^2}{s}\cos^2\varphi+\frac{\rho^3\cos\varphi}{2s^2}\frac{1}{2}(1+3\cos2\varphi) - s - \rho\cos\varphi -$$

$$-\frac{1}{2s}\frac{\rho^2}{2}(1+3\cos2\varphi)\Big] = \frac{1}{\pi s}\int_0^1 d\rho\rho\left[\frac{\rho^2}{s}\pi+\frac{1}{4}\frac{\rho^3}{s^2}\cdot0 - 2\pi s - \frac{2\pi\rho^2}{4s}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi s}\left[\frac{\pi}{s}\frac{1}{4} - \pi s - \frac{\pi}{2s}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\right] = -1+\frac{1}{8}\frac{1}{s^2},\quad s\gg1$$

$$W_H(s) = h\langle m_y\rangle_s = -h+\frac{h}{8}\frac{1}{s^2} = -h\left[1-\frac{1}{8}\frac{1}{s^2}\right]$$ — и/дифракц. поле.

15/VII Проверим расчет $W_H(s) = W_H(\varphi_0)$ от 3/V 002., используя φ_0 отличается умножением и/и $\sin^2\varphi_0 \sim \frac{1}{s^2}$. $a = \sin^2\varphi_0 = \frac{1}{s^2}$

$$J(\varphi_0) = \int_0^{\varphi_0}d\varphi\cos^2\varphi\sqrt{\sin^2\varphi_0-\sin^2\varphi} = \int_0^{\sin\varphi_0}dx\sqrt{1-x^2}\sqrt{a-x^2} =$$

$$= \left|\text{подст. } a^2 \sim \sin^4\varphi_0\right| = \int_0^{\sin\varphi_0}dx\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\sqrt{a-x^2};\quad J(a) = \int_0^{\sqrt{a}}dx\sqrt{1-x^2}\sqrt{a-x^2}$$

$$\frac{dJ}{da} = 0\cdot\frac{d}{da}\sqrt{a} - \sqrt{a}\cdot\frac{d0}{da} + \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{a}}dx\sqrt{1-x^2}\frac{1}{\sqrt{a-x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{a}}dx\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{a-x^2}}$$

$$J(\varphi_0) \simeq \int_0^{\sqrt{a}}dx\sqrt{a-x^2} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{a}}dx\,x^2\sqrt{a-x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2}\Big|_0^{\sqrt{a}} + \frac{1}{2}a\cdot\arcsin\left(x\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\Big|_0^{\sqrt{a}} - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}x(a-x^2)^{3/2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8}ax\sqrt{a-x^2} + \frac{1}{8}a^2\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}}\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}a\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{8}\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{4}a\left[1-\frac{1}{8}a\right] =$$

$$= \frac{\pi}{4}\sin^2\varphi_0\left[1-\frac{1}{8}\sin^2\varphi_0\right]$$

Escaneado con CamScanner

Date:

Ne vonga $W_H(\varphi_0) = -\frac{4}{\pi}\frac{h}{\sin^2\varphi_0} J(\varphi_0) = -h\left[1-\frac{1}{8}\sin^2\varphi_0\right]$ vna 3/2 cm. - верно.

$\langle m_y\rangle_S = S\int_0^\infty dk \left[J_2(k)J_2(ks) - J_0(k)J_0(ks)\right]$ верно на самом деле $s\neq 1$, но и для $S>1$ в силу обычного выбора ед.

При $S\gg 1$ $J_2(ks) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi ks}}\cos\left[ks-(2+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right] \approx (-1)J_0(ks)$

$J_0(ks) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi ks}}\cos\left[ks-\frac{\pi}{4}\right]$

$\langle m_y\rangle_S = S\int dk \left(\frac{2}{\pi ks}\right)\left[J_2(k)(-1)J_0(ks) - J_0(k)J_0(ks)\right] =$

$= -S\int dk\left[J_2(k)+J_0(k)\right]J_0(ks) \approx -S\int dk\,\frac{2}{k}J_1(k)J_0(ks) =$

$= -2S\int_0^\infty \frac{dk}{k}J_1(k)J_0(ks) = -2S\left[\int_0^\infty \frac{dk}{k}J_1(k)\{J_0(ks)-1\} + \int_0^\infty \frac{dk}{k}J_1(k)\right] =$

$= -2S\left[-\frac{1}{4}\{1+2\ln s\}+1\right]$? — расходимость. Неверно.

$\langle m_y\rangle_S = -S\sqrt{\frac{2}{\pi S}}\int \frac{dk}{\sqrt{k}}\left[J_2(k)+J_0(k)\right]\cos\left(ks-\frac{\pi}{4}\right) =$

$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,2S\int_0^\infty \frac{dk}{k^{3/2}}J_1(k)\cos(ks-\pi/4)$ — ?

Case 1

$y(a) = \int_0^{\sqrt{a}} dx\sqrt{1-x^2}\sqrt{a-x^2} = \sqrt{a}\int_0^{\sqrt{a}} dx\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{x^2}{a}} = \left|\begin{matrix}x=\sqrt{a}\,y\\ y=\frac{x}{\sqrt{a}}\end{matrix}\right| =$

$= \sqrt{a}\int_0^1 dy\sqrt{a}\sqrt{1-ay^2}\sqrt{1-y^2} = a\int_0^1 dy\sqrt{1-ay^2}\sqrt{1-y^2} =$

$= a\int_0^1 dy\,(1-\frac{1}{2}ay^2)\sqrt{1-y^2} = a\left[(..) - \frac{1}{2}a\int_0^1 dy\,y^2\sqrt{1-y^2}\right] =$

$= a\left[(\cdots) - \frac{1}{2}a\left\{-\frac{1}{4}y(1-y^2)^3 + \frac{1}{8}y\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{8}\arcsin y\right\}\right]_0^1 =$

$= a\left[(\cdots) - \frac{1}{2}a\,\frac{1}{8}\arcsin 1\right] = a\left[(\cdots) - \frac{a}{2\cdot 8}\cdot\frac{\pi}{2}\right] = a\frac{\pi}{4}\left[1-\frac{1}{8}a\right]$.

Как связан ли W_H верно для $S\gg 1$? $W_H(S)$ ок $14/VI$ $W_H(\varphi_0)$ ок 3/2002?

Проверим общий случай $S\gg 1$ (rigid v. model)

$W_{ext} = 4LC\int_{S_d} dS\,\frac{1}{(1+|w|^2)^2}\left[\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial \bar w}{\partial \bar z} + \frac{\partial w}{\partial \bar z}\frac{\partial \bar w}{\partial z}\right] = \left|\begin{matrix}\text{в перем.}\\ \text{области } |w|=1\end{matrix}\right| =$

$= \left(\frac{1}{2}4LC\right)2\int dS\left[\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial \bar w}{\partial \bar z} + \frac{\partial w}{\partial \bar z}\frac{\partial \bar w}{\partial z}\right] = \left|\begin{matrix}w(z,\bar z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}\\ \text{см. 29/VI}\end{matrix}\right| =$

$= \left(\frac{1}{2}4LC\right)\int_{S_d} dS\,\frac{\partial}{\partial \bar z}\left[\frac{1}{f(z)}\frac{\partial f}{\partial z}\ln|f(z)|^2\right] = \left(\frac{1}{2}4LC\right)\frac{1}{2i}\oint_{\partial D}\frac{1}{f(z)}\frac{\partial f}{\partial z}\ln|f|^2\,dz$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$$\frac{1}{1-2ts+t^2} = \sum_{k=0} U_k(s)\, t^k$$ (numeratore Polinomi

2D - spirale gaia, $x^2+y^2=\rho^2=R^2$, $f(z) = \frac{i}{c}(z-s)$ - rigid v. mag

$|f(z)|^2 = \frac{1}{c^2}(z-s)(\bar z - s) = \frac{1}{c^2}(\rho^2+s^2-2s\rho\cos\varphi)$, $z=\rho e^{i\varphi}$

$f'(z) = \frac{i}{c}$. $\frac{1}{\bar z - s} = \frac{z-s}{|z-s|^2}$

$$W_{ex} = \left(\tfrac12 LC\right)\frac{1}{2i}\int_{\partial D} dz\, \frac{1}{\frac{i}{c}(z-s)}\,\frac{i}{c}\ln\left[\frac{1}{c^2}(\rho^2+s^2-2\rho s\cos\varphi)\right]_{\rho=1} = \left|\begin{array}{l}\text{N}\\ z=e^{i\varphi}\\ dz = ie^{i\varphi}d\varphi\end{array}\right.$$

$$= \left(\tfrac12 LC\right)\frac{1}{2i}\times \int_0^{2\pi} d\varphi\, ie^{i\varphi}\,\frac{1}{e^{i\varphi}-s}\ln\left[\frac{1}{c^2}(1+s^2-2s\cos\varphi)\right] =$$

$$= \left(\tfrac12 LC\right)\frac12\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{1-s\cos\varphi - is\sin\varphi}{(1+s^2-2s\cos\varphi)}\ln\left[\frac{1}{c^2}(1+s^2-2s\cos\varphi)\right] =$$

$$= \left|\text{Im} = 0 \text{ B cons}\right| = \frac14 LC\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{1-s\cos\varphi}{1+s^2-2s\cos\varphi}\ln\left[\frac{1}{c^2}(1+s^2-2s\cos\varphi)\right]$$

$$W_{ex}(s) = \frac{1}{M_s^2 V_d}W'_{ex} = \frac{1}{M_s^2\pi R^2 L}\frac14 LC\int d\varphi(\cdot) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\int d\varphi(\cdot)$$

$$\xrightarrow{s>1} W_{ex}(s) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{1-s\cos\varphi}{1+s^2-2s\cos\varphi}\left[-2\ln c + \ln(1+s^2-2s\cos\varphi)\right]$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{1-s\cos\varphi}{1+s^2-2s\cos\varphi} = 2\int_0^{\pi} d\varphi\,\frac{1-s\cos\varphi}{1+s^2-2s\cos\varphi} = 0 \text{ comunque } 29/VI.$$

$$W_{ex}(s) \underset{(s>1)}{=} \frac{1}{4\pi}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{1-s\cos\varphi}{1+s^2-2s\cos\varphi}\ln(1+s^2-2s\cos\varphi)$$ - Eq. Lap. rigid. s>1

$$I(s) = 2\int_0^{\pi} d\varphi\,\frac{1-s\cos\varphi}{1+s^2-2s\cos\varphi}\ln(1+s^2-2s\cos\varphi) =$$

$$= 2\int_0^{\pi} d\varphi\,\frac{\ln(1+s^2-2s\cos\varphi)}{1+s^2-2s\cos\varphi} - 2s\int d\varphi\,\frac{\cos\varphi}{1+s^2-2s\cos\varphi}\ln(1+s^2-2s\cos\varphi)$$

$$= \frac{2}{s^2}\cdot\int_0^{\pi} d\varphi\,\frac{\ln(1-\frac2s\cos\varphi+\frac{1}{s^2})+\ln s^2}{1-\frac2s\cos\varphi+\frac{1}{s^2}} - \frac2s\int_0^{\pi} d\varphi\,\frac{\cos\varphi}{\frac{1}{s^2}+1-\frac2s\cos\varphi}\left[\ln\left(1-\frac2s\cos\varphi+\frac{1}{s^2}\right)+\right.$$

$$= \frac{2}{s^2}\ln s^2\cdot\pi - \frac2s\int_0^{\pi} d\varphi\cos\varphi\left[1+2\cos\varphi\cdot\frac1s+\frac{1}{s^2}(4\cos^2\varphi-1)+\dots\right]\times$$

$$\times\left[-\frac2s\cos\varphi+\dots+\ln s^2\right] = \frac{2\pi}{s^2}\ln s^2 - \frac2s\int_0^{\pi} d\varphi\cos\varphi\left[1+\frac2s\cos\varphi\right]\times$$

$$\times\left[\ln s^2 - \frac2s\cos\varphi\right] = \frac{2\pi}{s^2}\ln s^2 - \frac1s\int_0^{2\pi} d\varphi\left[\cos\varphi+\frac2s\cos^2\varphi\right]\left[\ln s^2 - \frac2s\cos\varphi\right] =$$

$$= \frac{2\pi}{s^2}\ln s^2 - \frac1s\int_0^{2\pi} d\varphi\left[\cos\varphi\cdot\ln s^2 - \frac2s\cos^2\varphi + \frac2s\ln s^2\cos^2\varphi - \dots\right] =$$

$$= \frac{2\pi}{s^2}\ln s^2 - \frac1s\left[-\frac2s\cdot\pi + \frac2s\ln s^2\cdot\pi\right] = \frac{2\pi}{s^2} \quad \lim_{s\to\infty}(s=\frac{1}{\sin\varphi})$$

$$W_{ex}(s) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 I(s) \underset{s>>1}{=} \frac{1}{4\pi}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\cdot\frac{2\pi}{s^2} = \frac12\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\frac{1}{s^2}$$ - coh. 3/I

Escaneado con CamScanner

H_n из 3 – "flower" state

Date.

$\sin\varphi_0 = \frac{1}{s}$

Если $\frac{3}{\sqrt{7}}$ (30/III 001.) а постоянная $W_{ex}(\varphi_0) = -\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \ln\cos\varphi_0$ или

$W_{ex}(s) = -\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \ln\sqrt{1-\sin^2\varphi_0} = -\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{s^2}\right)\cdot\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 =$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \ln\left(1-\frac{1}{s^2}\right)$, $s>1$, вихрь вне диска – "rigid".

$$W_{ex}(s) = -\frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \ln\left(1-\frac{1}{s^2}\right)$$

$s>1$ – вихрь в диске.

"rigid" v. model

Когда диск $s<1$ было $W_{ex}(s) = W_{ex}(0) + \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \ln(1-s^2)$ _ APL'01.

(вихрь в диске)

Вне диска $\to I(s) = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1-s\cos\varphi}{1+s^2-2s\cos\varphi} \ln(1+s^2-2s\cos\varphi) = -2\pi\ln\left(1-\frac{1}{s^2}\right)$ $(s>1)$

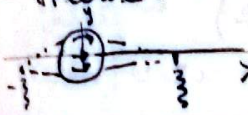
MCAD тоже вождение численно подтверждает (!)

Интересно сравнить H_n из "rigid" v. model и из "quadratic" model $(29/\sqrt{VI} - 1/\sqrt{VII})$.

"flower" state – на диске H_n

В quadratic model – "flower" state надо достигать W_H.

"Flower" state



$$\langle m_x\rangle_s = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho\rho \frac{\xi^2 - \rho^2\cos 2\varphi}{\sqrt{\rho^4 - 2\rho^2\xi^2\cos 2\varphi + \xi^4}}$$

"Rigid" v. model



$$\langle m_y\rangle_s = \frac{1}{\pi}\int_0^1 d\rho\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(\rho\cos\varphi - s)}{\sqrt{\rho^2+s^2-2\rho s\cos\varphi}}$$

$s \leftrightarrow \xi^2$, $\rho \leftrightarrow \rho^2$, $\cos\varphi \leftrightarrow \cos 2\varphi$.

Разложим: $\frac{1}{\sqrt{\rho^4 - 2\rho^2\xi^2\cos 2\varphi + \xi^4}} = \frac{1}{\xi^2}\sum_{n=0}\left(\frac{\rho}{\xi}\right)^{2n} P_n(\cos 2\varphi) =$

$= \frac{1}{\xi^2}\left[1 + \frac{\rho^2}{\xi^2}\cos 2\varphi + \frac{\rho^4}{\xi^4}\frac{1}{2}(3\cos^2 2\varphi - 1) + \dots\right]$

$\langle m_x\rangle_s = \frac{1}{\pi}\int_0^1 d\rho\rho\int_0^{2\pi} d\varphi\left(\xi^2 - \rho^2\cos 2\varphi\right)\frac{1}{\xi^2}\left[1 + \frac{\rho^2}{\xi^2}\cos 2\varphi + \dots\right] =$

$= \frac{1}{\pi\xi^2}\int_0^1 d\rho\rho\int_0^{2\pi} d\varphi\left[\xi^2 + \rho^2\cos 2\varphi - \rho^2\cos 2\varphi - \frac{\rho^4}{\xi^2}\cos^2 2\varphi + \frac{\rho^4}{\xi^2}\frac{1}{2}(3\cos^2 2\varphi - 1)\right] =$

$= 1 + \frac{1}{\pi\xi^2}\int d\rho\rho\int d\varphi\ \frac{\rho^4}{\xi^2}\left[-\cos^2 2\varphi + \frac{3}{2}\cos^2 2\varphi - \frac{1}{2}\right] =$

$= 1 + \frac{\pi^{-1}}{\xi^4}\int d\rho\rho^5\int d\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)\sin^2 2\varphi = 1 - \frac{\pi^{-1}}{\xi^4}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\pi = 1 - \frac{1}{12}\frac{1}{\xi^4}$ и

(чем $\langle m_y\rangle$ – rigid v. m.)

Нет $\frac{1}{\xi^2}$ члена. $W_H(\xi) = -h\langle m_x\rangle = -h + \frac{1}{12}h\frac{1}{\xi^4}$, это диска

коэфф. A_4 от $1/\sqrt{VII}$ более >0 и nucleation типа $A_2 = 0$ – нет в "flower" state.

Date. 16.07.

Разложение по "rigid" v. model

В "rigid" v. model $W_n(s) = -h\langle m_y \rangle_s$:

$$\rightarrow \underset{\text{(метод ряда)}}{\langle m_y \rangle_s} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 d\rho\,\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{s-\rho\cos\varphi}{\sqrt{\rho^2+s^2-2s\rho\cos\varphi}} = s\int_0^\infty dx \left[J_0(x)J_0(xs) - J_1(x)J_1(xs)\right]$$

Обе формулы верны $\forall s$ ($s<1$ и $s>1$), но $\frac{1}{\sqrt{(\cdot)}} = \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{s}\right)^n P_n(\cos\varphi)$ – удобно для $s>1$ ($s\gg 1$), а $J_n(x)$-формулы удобнее при $s\ll 1$ разложение

$$\rightarrow W_m^{\text{side}}(s) = \frac{2}{\pi} s^2 \sum_{\mu=1} F_\mu(\beta)\, I_\mu^2(s)$$ – верна для $\forall s$,

а разложения по $s\ll 1$ и $s\gg 1$ дадут H_{an} и H_n.

Для $s<1$ $\rightarrow W_{ex}(s) = W_{ex}(0) + \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \ln(1-s^2)$

$s>1$ $\rightarrow W_{ex}(s) = -\frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \ln\left(1-\frac{1}{s^2}\right) = -\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \ln\cos\varphi_0$

Выделенность т. $s=1$ в $W_{ex}(s)$ ($W_{ex}(1)$ – ln-расходимость) есть артефакт неправильной конечных размеров "core" (Solitary part) из-за несжимаемости частицы (граница диска $s=1$).

Если учесть конечный радиус "core" ($c = b/R$) и рассм. диски не пересекая $\left(\frac{R}{R}\right)^b$, то сингулярность исчезнет.

H_n – vortex rigid

16/VII Проверка H_n для coupled dots и расчет $H_n(d/R)$.

См. расчет H_n – 13-14/VI.

Т.к. параметризация "buckle" dot через "φ_0" и через "s" для shifted vortex эквивалентны с связью $s = \frac{1}{\sin\varphi_0}$, то расчет "rigid" v. model $f(z) = \frac{i}{c}(z-s)$ с $s\gg 1$ вне core.



Т.к. $s>1$ ($s\gg 1$), то внутри core $\rho^2<1$

сидит meron с $m_x(\vec\rho) = \mathrm{Re}\,w = \frac{-\rho\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2+s^2-2s\rho\cos\varphi}}$, $m_y(\vec\rho) = \frac{\rho\cos\varphi - s}{\sqrt{\rho^2+s^2-2s\rho\cos\varphi}}$

Для coupled array надо найти не $\vartheta = (\vec m\cdot\vec n)_s$, а $\left(\frac{\vec k}{k}\cdot\vec M_k\right)$.

$$M_{\vec k}^{\alpha} = \frac{1}{S_0}\int_{S_d} d^2\vec\rho\, e^{i\vec k\vec\rho} M_\alpha(\vec\rho),\quad S_0 - \text{площадь эл. ячейки array}$$

$$S_0\left(\frac{\vec k}{k}\cdot\vec m_{\vec k}\right) = \frac{\vec k}{k}\cdot\int_{S_d} d^2\vec\rho\, e^{i\vec k\vec\rho}\,\vec m(\vec\rho) = \int_{S_d} d^2\vec\rho\, e^{i\vec k\vec\rho}\left[m_x\cos\varphi_{\vec k} + m_y\sin\varphi_{\vec k}\right] =$$

$$= \int d^2\vec\rho\,\frac{e^{i\vec k\vec\rho}}{\sqrt{\rho^2+s^2-2s\rho\cos\varphi}}\left[-\rho\sin\varphi\cos\varphi_{\vec k} + \rho\cos\varphi\sin\varphi_{\vec k} - s\cdot\sin\varphi_{\vec k}\right] =$$

Escaneado con CamScanner

Date.

$= \int d^2\vec{\rho}\ \frac{e^{i\vec{k}\vec{\rho}}}{\sqrt{(\cdot)}} \left[\rho\sin(\varphi_k-\varphi) - s\cdot\sin\varphi_k\right]$. Разложим $s \gg 1$:

$m_x(\vec{\rho}) = \frac{-\rho\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2+s^2-2s\rho\cos\varphi}} = (-\rho\sin\varphi)\frac{1}{s}\sum_{n=0} P_n(\cos\varphi)\left(\frac{\rho}{s}\right)^n = \left| s>1 \right| =$

$= -\frac{\rho}{s}\sin\varphi\left[1 + \frac{\rho}{s}\cos\varphi + \frac{1}{4}\frac{\rho^2}{s^2}(1+3\cos 2\varphi) + \dots\right] \approx -\frac{\rho}{s}\sin\varphi\left[1+\frac{\rho}{s}\cos\varphi\right]$

$m_y(\vec{\rho}) = (\rho\cos\varphi - s)\frac{1}{s}\sum_{n=0}\left(\frac{\rho}{s}\right)^n P_n(\cos\varphi) = \left(\frac{\rho}{s}\cos\varphi - 1\right)\left[1+\frac{\rho}{s}\cos\varphi + \frac{1}{4}\frac{\rho^2}{s^2}(1+3\cos 2\varphi)\right]$

$e^{i\vec{k}\vec{\rho}} = \sum_\mu i^\mu J_\mu(k\rho)\, e^{i\mu(\varphi-\varphi_k)}$

$S_0\left(\frac{\vec{k}}{k}\cdot\vec{m}_k\right) = \int_0^1 d\rho\,\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \sum_\mu i^\mu J_\mu(k\rho) e^{-i\mu\varphi_k} e^{i\mu\varphi}\left[-\frac{\rho}{s}\sin\varphi\cos\varphi_k\left(1+\frac{\rho}{s}\cos\varphi\right) + \right.$

$\left. + \sin\varphi_k\left(\frac{\rho}{s}\cos\varphi - 1\right)\left\{1 + \frac{\rho}{s}\cos\varphi + \frac{1}{4}\frac{\rho^2}{s^2}(1+3\cos 2\varphi)\right\}\right]$

$[\dots] = -\frac{\rho}{s}\sin\varphi\cos\varphi_k - \frac{\rho^2}{s^2}\cos\varphi_k\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\rho}{s}\cos\varphi\sin\varphi_k + \frac{\rho^2}{s^2}\cos^2\varphi\sin\varphi_k -$

$- \sin\varphi_k - \frac{\rho}{s}\cos\varphi\sin\varphi_k - \frac{1}{4}\frac{\rho^2}{s^2}(1+3\cos 2\varphi)\sin\varphi_k =$

$= -\sin\varphi_k - \frac{\rho}{s}\sin\varphi\cos\varphi_k + \frac{\rho^2}{s^2}\left\{\cos^2\varphi\sin\varphi_k - \sin\varphi\cos\varphi\cos\varphi_k - \right.$

$\left. - \frac{1}{4}(1+3\cos 2\varphi)\sin\varphi_k\right\} =$

$= -\sin\varphi_k - \frac{\rho}{s}\sin\varphi\cos\varphi_k + \frac{\rho^2}{s^2}\left\{\sin\varphi_k\frac{1}{2}\sin^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\cos\varphi_k\right\}$

$\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i\mu\varphi}[\dots] = \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i\mu\varphi}\left[-\sin\varphi_k - \frac{\rho}{s}\sin\varphi\cos\varphi_k + \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{s^2}\left\{\sin^2\varphi\sin\varphi_k - \right.\right.$

$\left.\left. - \sin 2\varphi\cos\varphi_k\right\}\right]$

$= -\sin\varphi_k\cdot 2\pi\delta_{\mu 0} - \frac{\rho}{s}\cos\varphi_k\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i\mu\varphi}\sin\varphi + \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{s^2}\int d\varphi\, e^{i\mu\varphi}\left\{\sin^2\varphi\sin\varphi_k - \sin 2\varphi\cos\varphi_k\right\} =$

$\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i\mu\varphi}\sin 2\varphi = \int d\varphi\, e^{i\mu\varphi}\frac{1}{2i}\left(e^{i2\varphi} - e^{-i2\varphi}\right) = \frac{1}{2i}2\pi\left(\delta_{\mu,2} - \delta_{\mu,-2}\right)$, см. 13/VI

$\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i\mu\varphi}[\dots] = -\sin\varphi_k\cdot 2\pi\delta_{\mu 0} - \frac{\rho}{s}\cos\varphi_k\cdot i\pi(\delta_{\mu 1} - \delta_{\mu,-1}) +$

$+ \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{s^2}\left\{\sin\varphi_k\cdot\pi\delta_{\mu 0} - \sin\varphi_k\frac{\pi}{2}(\delta_{\mu 2} + \delta_{\mu,-2}) - \cos\varphi_k\frac{\pi}{i}(\delta_{\mu,-2} - \delta_{\mu 2})\right\}$

$S_0\left(\frac{\vec{k}}{k}\cdot\vec{m}_k\right) = \pi\int_0^1 d\rho\,\rho\sum_\mu i^\mu J_\mu(k\rho)e^{-i\mu\varphi_k}\left[-2\sin\varphi_k\delta_{\mu 0} - i\frac{\rho}{s}\cos\varphi_k(\delta_{\mu 1} - \delta_{\mu,-1}) + \right.$

$\left. + \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{s^2}\left\{\sin\varphi_k\cdot\delta_{\mu 0} - \frac{1}{2}\sin\varphi_k(\delta_{\mu 2} + \delta_{\mu,-2}) - \cos\varphi_k\cdot i(\delta_{\mu 2} - \delta_{\mu,-2})\right\}\right] =$

$= \pi\int d\rho\,\rho\left[-2\sin\varphi_k J_0(k\rho) - i\frac{\rho}{s}\cos\varphi_k\left(iJ_1 e^{-i\varphi_k} - i^{-1}J_{-1}e^{i\varphi_k}\right) + \right.$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$$+\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{s^2}\left\{\sin\varphi_k\cdot J_0-\frac{1}{2}\sin\varphi_k\left(-J_2e^{-i2\varphi_k}-J_{-2}e^{i2\varphi_k}\right)-\right.$$
$$\left.-i\cos\varphi_k\left(-J_2e^{-i2\varphi_k}+J_{-2}e^{i2\varphi_k}\right)\right\}\Big]=$$
$$=\pi\int d\rho\rho\left[-2\sin\varphi_k\cdot J_0-\frac{\rho}{s}\cos\varphi_k\cdot 2i\sin\varphi_k J_1+\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{s^2}\left\{\sin\varphi_k\cdot J_0+\sin\varphi_k\cos\right.\right.$$
$$\left.\left.-i\cos\varphi_k J_2\left(e^{i2\varphi_k}-e^{-i2\varphi_k}\right)\right\}\right]=\pi\int_0^{1\to R}d\rho\rho\left[-2J_0\sin\varphi_k-\right.$$
$$\left.-2i\frac{\rho}{s}\cos\varphi_k\sin\varphi_k J_1+\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{s^2}\left\{\sin\varphi_k J_0+J_2\sin\varphi_k\cos2\varphi_k+2J_2\cos\varphi_k\sin\right.\right.$$
$$\text{вне } J_n(k\rho)$$

$$S_0\left(\frac{\vec{k}}{k},\vec{m}_k\right)=-2\pi\sin\varphi_k\frac{R}{k}J_1(kR)-2\pi\frac{i}{s}\cos\varphi_k\sin\varphi_k\frac{R^2}{k}J_2(kR)+$$
$$+\frac{\pi}{2}\frac{1}{s^2}\sin\varphi_k\left[\frac{R^3}{k}J_1(kR)-\frac{2R^2}{k^2}J_2(kR)\right]+\frac{\pi}{2}\frac{1}{s^2}(\sin\varphi_k\cos2\varphi_k+2\cos\varphi_k\sin2\varphi_k)\frac{\rho^2}{k}$$
$$=-2\pi\sin\varphi_k\frac{R}{k}J_1-2\pi i\frac{1}{s}\cos\varphi_k\sin\varphi_k\frac{R^2}{k}J_2(kR)+$$
$$+\frac{\pi}{2}\frac{1}{s^2}\sin\varphi_k\frac{R^3}{k}\left[J_1(kR)-\frac{2}{kR}J_2(kR)+J_3(kR)\left(\cos2\varphi_k+4\cos^2\varphi_k\right)\right]$$

$$\rightarrow S_0^2\left|\left(\frac{\vec{k}}{k},\vec{m}_k\right)\right|^2=4\pi^2\sin^2\varphi_k\frac{R^2}{k^2}J_1^2+4\pi^2(+1)\frac{1}{s^2}\cos^2\varphi_k\sin^2\varphi_k\frac{R^4}{k^2}J_2^2+$$
$$+2(-2\pi)\sin\varphi_k\frac{R}{k}J_1\frac{\pi}{2}\frac{1}{s^2}\sin\varphi_k\frac{R^3}{k}\left[J_1-\frac{2}{kR}J_2+J_3\cdot\left(\cos2\varphi_k+4\cos^2\varphi_k\right)\right]=$$
$$=4\pi^2R^2\sin^2\varphi_k\frac{J_1^2}{k^2}+2\pi^2\frac{1}{s^2}\sin^2\varphi_k\frac{R^4}{k^2}\left[2\cos^2\varphi_k\cdot J_2^2-J_1\left\{J_1-\frac{2}{kR}J_2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+J_3\cdot\left(\cos2\varphi_k+4\cos^2\varphi_k\right)\right\}\right]$$

Свойства: $\left\{\begin{array}{l}J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)\\J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)=2J_n'(x)\end{array}\right\}$, здесь S - радиус, поэтому $\frac{S}{R}\to S$:

$$J_1+J_3=\frac{4}{x}J_2,\quad J_3(x)=\frac{4}{x}J_2(x)-J_1(x),\quad J_0+J_2=\frac{2}{x}J_1$$
$$\left[\ldots\right]=2\cos^2\varphi_k\cdot J_2^2-J_1\left\{J_1-\frac{2}{x}J_2+\left(\frac{4}{x}J_2-J_1\right)\left(6\cos^2\varphi_k-1\right)\right\}=$$
$$=2\cos^2\varphi_kJ_2^2-J_1^2+\frac{2}{x}J_1J_2-J_1\left(\frac{4}{x}J_2-J_1\right)6\cos^2\varphi_k+J_1\left(\frac{4}{x}J_2-J_1\right.$$
$$=2\cos^2\varphi_k\left(J_2^2-\frac{12}{x}J_1J_2+3J_1^2\right)+\frac{6}{x}J_1J_2-2J_1^2$$

Было 14/VI (с другими φ_k, $\langle\vec{M}\rangle_{\text{т.к.}}\|0x$): $\left[\ldots\right]=\cos2\varphi_k\left[\frac{12}{x}J_1J_2-3J_1^2-J_2^2\right]$
$+J_1^2+J_2^2-\frac{6}{x}J_1J_2=\left|\cos2\varphi_k=2\cos^2\varphi_k-1\right|=2\cos^2\varphi_k\left[\frac{12}{x}J_1J_2-3J_1^2-J_2^2\right]$
$-\frac{18}{x}J_1J_2+4J_1^2+2J_2^2$ — не совпадает даже после $\varphi_k\to\varphi_k+\frac{\pi}{2}$

Ой ли!

Escaneado con CamScanner

Date. SW wires (по e-mail Сабина)

Замена $\varphi_k \to \varphi_k \pm \pi/2$ ($\sin\varphi \to \cos\varphi$) в старом равенстве [13-14/II]:

$$= 2\sin^2\varphi_k \left[\frac{12}{\chi} J_1 J_2 - 3J_1^2 - J_2^2\right] - \frac{18}{\chi} J_1 J_2 + 4J_1^2 + 2J_2^2 =$$

$$= \left|\sin^2\varphi_k = 1 - \cos^2\varphi_k\right| = -2\cos^2\varphi_k \left[\frac{12}{\chi} J_1 J_2 - 3J_1^2 - J_2^2\right] +$$

$$+ \frac{6}{\chi} J_1 J_2 - 2J_1^2 \quad \text{в точности нашёл. 16/VII Вопрос. Дай [...].}$$

$$A_1(x) = \frac{12}{\chi} J_1 J_2 - 3J_1^2 - J_2^2 = 3J_1\left(\frac{4}{\chi} J_2 - J_1\right) - J_2^2 = 3J_1 J_3 - J_2^2$$

$$A_2(x) = -\frac{6}{\chi} J_1 J_2 + J_1^2 + J_2^2 = J_1\left(J_1 - \frac{6}{\chi} J_2\right) + J_2^2 =$$

$$= J_1\left(J_1 - \frac{4}{\chi} J_2\right) - \frac{2}{\chi} J_1 J_2 + J_2^2 = -J_1 J_3 + J_2\left(J_2 - \frac{2}{\chi} J_1\right) =$$

$$= -J_1 J_3 - J_0 J_2)$$

Не характеризуют ли $C_1(x)$ 4-fold anisotropy?

Редактирование и исправл. PRL - заготовки по 17/VII
м. ampled dots с Новосадом.

SW wires

Расчет SW-wires (new experiment Демокритова).

$H \parallel$ ось wire, $H = 600$ Oe, $w = 1\ \mu m$, $L = 30$ nm. Ref. - 12/IV.
Вещество - FeNi с $4\pi M_s = 10{,}2$ kOe. // Найти спектр ω_n (5-мод), профили $m_n(x)$ и эф. закрепление.

$\left(\frac{\gamma}{2\pi} = 2{,}95\ \frac{GHz}{kOe}\right)$. $p = L/w = \frac{30\ nm}{1\ \mu m} = \frac{30\ nm}{1000\ nm} = 0{,}03$

$\omega_M = \gamma \cdot 4\pi M_s = 2\pi f_M$; $f_M = \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right) \cdot 4\pi M_s = 2{,}95 \cdot \frac{GHz}{kOe} \cdot 10{,}2\ kOe = 30{,}1\ GHz$

Эксп. частоты - f_n мне пока неизвестны пока. $\frac{\omega_H}{\omega_M} = \frac{H}{4\pi M_s} = \frac{0{,}6}{10{,}2} = 0{,}059$

Расч. частоты ($N = 180$) $\omega_0 = 0{,}306$; $\omega_1 = 0{,}361$; $\omega_2 = 0{,}401$; $\omega_3 = 0{,}432$; $\omega_4 = 0{,}456$

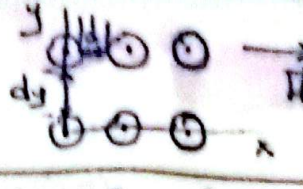
Закрепление мод: $\frac{m_0(1/2)}{m_0(0)} = 0{,}197$; $\frac{m_1(1/2)}{m_1(x=0{,}28)} = 0{,}291$ — range $\max|m_n(x)|$

Параметры закрепления ($\frac{\partial m_n}{\partial x} - d_n m_n = 0$ при $x = -y_2$): $d_n(0{,}03) = 26{,}1$; $d_n^4(0{,}03) = 14.9$ } см. 13/IV

Программа SW-мод

x	-0.5	-0.45	-0.40	-0.35	-0.30	-0.25	-0.20	-0.15	-.10	-0.05	0
$m_0(x)$	0.251	488	667	813	937	1,041	1.126	1.192	1.24	1.268	1.278
$m_1(x)$	-0.390	-.801	-1.086	-1.265	-1.339	-1.311	-1.186	-.974	-.691	-.358	0

Date. 18 · 07 ·



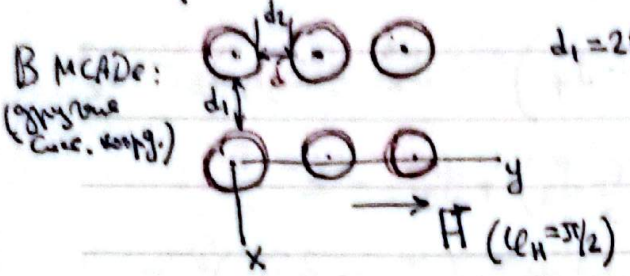
— такое Fig. 6 JAP/PRB paper

Расчет $H_n(d/R)$ для Coupled rectan. dot array.

Берем $L = 40$ нм, 60 нм. $\vec{H} \parallel$ оси намагн. ($\perp Ox$. $d = d_x$, β [illegible]

$H_n = H_n(\beta, d/R, \varphi_H)$. См. 8,12/III, 20-22/III, 5/IV, 11-[illegible]

Берем $2R = 0{,}42$ μm, $d_y = 2R = \text{const}$, $d_x = d$ — изменяется.



В MCADe: (другая сист. коорд.)

$d_1 = 2R = \text{const}$. d_2 — изм.: $\frac{d_2}{R} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$

$$\xi = \frac{T_1}{T_2} = \frac{2R + d_1}{2R + d_2} = \frac{2}{1 + \left(\frac{d_2}{2R}\right)}$$ — изм.

13-14/VI я посчитал H_n и $W_m(\varphi_0)$, задавая $\vec{H} \parallel Ox$ ($\vec{S} \parallel Oy$ — оси намагн.) и получил:

$$W_m(\varphi_0) = \frac{W_m(\varphi_0)}{M_s^2 V_d} = W_m(0) + \frac{(2\pi)^2}{S_0} \varphi_0^2 \sum_{\vec{k}} \frac{f(kL)}{k^2} \cos^2\varphi_k \left[C_1(kR)\cos 2\varphi_k + C_2(kR) \right]$$ ($\varphi_0 \ll 1$, или $\sin^2\varphi_0$)

где $\begin{cases} C_1(x) = \frac{12}{x} J_1(x) J_2(x) - 3J_1^2(x) - J_2^2(x) = 3J_1(x)J_3(x) - J_2^2(x) \\ C_2(x) = -\frac{6}{x} J_1(x) J_2(x) + J_1^2(x) + J_2^2(x) = -J_1(x)J_3(x) - J_0(x)J_2 \end{cases}$

Но для rectan. array $T_1 \neq T_2$ ($T_x \neq T_y$) и $\vec{H} \parallel Ox$ и $\vec{H} \parallel Oy$ дают разные [illegible]

В MCAD-file Rectan-lat-vortex.mcd выбрано: ось намагн. диск (т.е. перпендикулярный период в расч. пакета) $\parallel Oy$, т.е. $\vec{H} \parallel Oy$ ($\vec{S} \parallel Ox$) — спины

Именно $\vec{S} \parallel Ox$ ($\vec{H} \parallel Oy$) я и задавал в расчете — см. проверка от 16/II и получил:

$$\left|\left(\frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{m}_k\right)\right|^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{S_0^2} \frac{J_1^2}{k^2} \sin^2\varphi_k + \frac{4\pi^2 R^2}{S_0^2} \left(\frac{1}{s^2}\right) \frac{\sin^2\varphi_k}{k^2} \left[-C_1(kR)\cos^2\varphi_k + \frac{3}{kR} J_1 J_2 - \right.$$

$$W_m(\varphi_0) = \frac{W_m(\varphi_0)}{M_s^2 V_0} = 2\pi \sum_{\vec{k}} \frac{f(kL)}{k^2} \left|(\vec{k} \cdot \vec{m}_k)\right|^2$$, для нормир-ции на V_d надо умн. на $\frac{V_m}{V_d} = \frac{S_0 L}{S_0 L}$

V_m — объем эл. ячейки

$$W_m(\varphi_0) = \left(\frac{S_0}{\pi R^2}\right) 2\pi \sum_{\vec{k}} \frac{f(kL)}{k^2} \left|(\vec{k} \cdot \vec{m}_k)\right|^2 = \left(\text{член с } \varphi_0 = 0 \text{ т.е. } \frac{1}{s^2} = \sin^2\varphi_0 = 0,\ s = \infty\right) +$$

$$+ \left(\frac{S_0}{\pi R^2}\right) 2\pi \sum_{\vec{k}} f(kL) \frac{4\pi^2 R^2}{S_0^2} \left(\frac{1}{s^2}\right) \frac{\sin^2\varphi_k}{k^2} \left[-C_1(x)\cos^2\varphi_k + \frac{3}{x} J_1(x) J_2(x) - J_1^2(x) \right.$$ $x = kR$

$$= \left(\text{член } c\ s = \infty\right) + \frac{8\pi^2}{S_0} \left(\frac{1}{s^2}\right) \sum_{\vec{k}} \frac{f(kL)}{k^2} \sin^2\varphi_k \left[-C_1(x)\cos^2\varphi_k + \frac{3}{x} J_1(x) J_2(x) - J_1^2(x) \right.$$

Escaneado con CamScanner

Date.

$$\frac{3}{x} J_1 J_2 - J_1^2 = J_1\left(\frac{3}{x} J_2 - J_1\right) = J_1\left(\underbrace{\frac{4}{x} J_2 - J_1}_{J_3} - \frac{1}{x} J_2\right) = J_1\left(J_3 - \frac{1}{x} J_2\right)$$

$$\cos^2\varphi_k = \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi_k)$$

$$2\left[-C_1\cos^2\varphi_k + \frac{3}{x} J_1 J_2 - J_1^2\right] = \left[-C_1(1+\cos 2\varphi_k) + \frac{6}{x} J_1 J_2 - 2J_1^2\right] =$$

$$= \left[-C_1\cos 2\varphi_k - 3J_1 J_3 + J_2^2 + \frac{6}{x} J_1 J_2 - 2J_1^2\right] =$$

$$= \left[-C_1\cos 2\varphi_k - 3J_1 J_3 + J_2^2 + 3J_2(J_0 + J_2) - 2J_1^2\right] = |\text{иначе}| =$$

$$= \left[-C_1\cos 2\varphi_k - \frac{12}{x} J_1 J_2 + 3J_1^2 + J_2^2 + \frac{6}{x} J_1 J_2 - 2J_1^2\right] =$$

$$= \left[-C_1\cos 2\varphi_k - \frac{6}{x} J_1 J_2 + J_1^2 + J_2^2\right] = \left[-C_1\cos 2\varphi_k + C_2\right]$$

$$\omega_m(\varphi_0) = \left(\frac{2\omega_H}{cS=\infty}\right) + \frac{4\pi^2}{S_0}\left(\frac{1}{S^2}\right)\sum_{\vec{k}} \frac{f(kL)}{k^2}\sin^2\varphi_k \left[-C_1(x)\cos 2\varphi_k + C_2(x)\right]_{x=kR}$$

т.е. энергия surf. side charges vortex $cS \gg 1$ („buckle" dot)

где $\vec{S} \| Ox$, $\vec{H} \| Oy$

При переходе к полю $\vec{H} \| Ox$ просто $\varphi_k \to \varphi_k \pm \frac{\pi}{2}$ и получим (*).

$\sin^2\varphi_k$ и $\cos 2\varphi_k \to -\cos 2\varphi_k$.

→ Поле H_n определяется как $\frac{H_n}{M_s} = 4\pi\left[F(\beta, d/R) - \frac{1}{3}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\right]$,

где $F(\beta, d/R) = -\frac{8\pi}{S_0}\sum_{\vec{k}} \frac{f(kL)}{k^2}\sin^2\varphi_k \left[-C_1(x)\cos 2\varphi_k + C_2(x)\right]_{x=kR}$,

$S_0 = T_1 T_2$. $k^2 = \frac{(2\pi)^2}{T_1^2}\left[n_1^2 + \zeta^2 n_2^2\right]$, $\left(\zeta = \frac{T_1}{T_2}\right)$

$$\frac{8\pi}{S_0 k^2} = \frac{8\pi}{T_1 T_2 (2\pi)^2 \frac{1}{T_1^2}(n_1^2 + n_2^2\zeta^2)} = \frac{2}{\pi}\frac{\zeta}{(n_1^2 + n_2^2\zeta^2)}, \quad \sin^2\varphi_k = \frac{n_2^2\zeta^2}{n_1^2 + n_2^2\zeta^2}$$

$$\cos 2\varphi_k = \cos^2\varphi_k - \sin^2\varphi_k = \frac{n_1^2 - n_2^2\zeta^2}{n_1^2 + n_2^2\zeta^2}$$

$$F(\beta, d/R, \varphi_k = \pi/2) = -\frac{2}{\pi}\zeta^3 \sum_{\substack{n_1 n_2 \\ (-\infty)}}^{\infty} f(kL)\frac{n_2^2}{(n_1^2 + n_2^2\zeta^2)^2}\left[-C_1(kR)\frac{n_1^2 - n_2^2\zeta^2}{n_1^2 + n_2^2\zeta^2} + C_2(kR)\right]$$

$$\sum_{n_1 n_2} F(n_1^2, n_2^2) = 2\sum_{n_1=1} F(n_1^2, 0) + 2\sum_{n_2=1} F(0, n_2^2) + 4\sum_{\substack{n_1=1 \\ n_2=1}} F(n_1^2, n_2^2) + \underset{0}{\overset{\|}{F(0,0)}}$$

При $d/R \to \infty$ должно $F(\beta, d/R) \to F(\beta) = F_1(\beta) - F_2(\beta) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} f(\beta t)\left[J_1^2(t) - J_2^2(t)\right]$

$$\frac{H_n^{Comp}(\beta, R, d)}{H_n^{isol}(\beta, R)} = \frac{F(\beta, d/R) - \frac{1}{3}(R_0/R)^2}{F(\beta) - \frac{1}{3}(R_0/R)^2} \approx \frac{F(\beta, d/R)}{F(\beta)}, \text{ т.к. } \frac{R_0}{R} = \frac{1.8\,nm}{210\,nm} \ll 1$$

d/R	2	1.5	1	0.8	0.7	0.6	1/2	1/4	1/8	1/16
H_n^{Comp}/H_n^{isol}	0,755	0,607	0,302	0,080	-0,071	-0,26	-0,503	-1,54		
H_n^{Comp}/H_n	0,717	0,595	0,280	0,050	-0,107	-0,306	-0,562	-1,687		

$L_0 = 60$ nm
$L_1 = 40$ nm

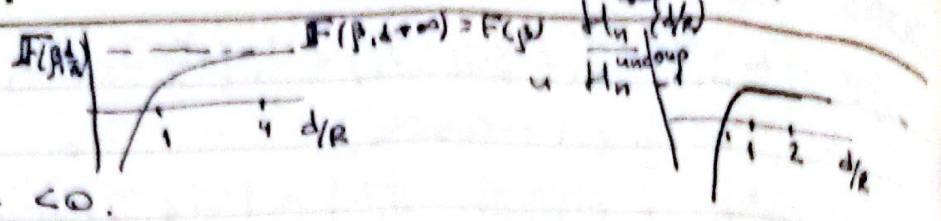
$R = 210$ nm
$d_1 = 2R$

Уменьш. d/R до 10 (включ.) чуть уменьш. H_n

H_n coupled dots

Date. 19.07.

Возможно



вместо сливаются <0.

$$W_m(\varphi_0) = W_m(\varphi_0=0) - \frac{\pi}{2}\varphi_0^2 \mathbb{F}(\beta, d/R)$$

$\mathbb{F}(\beta, d/R) < 0$ → рост энергии взаимодействия charges при малых d и/или отклонении φ_0 от from. dot state $\varphi_0 = 0$. ⊖⊖⊖ $\varphi_0 = 0$ самая минимально(?) энергия там ⊖⊖⊖ $\varphi_0 \ll 1$.

$W_m = W_m(self) + W_m(coupl)$

(в array и для isol. dot одинаково и > 0, с φ_0↑ только увеличивается ⇒ даёт >0 вклад в $\mathbb{F}$)

(Эта энергия растёт с φ_0! (будучи <0) и даёт <0 вклад в $\mathbb{F}$)

⇒ Правильный предел of isolated dot: $\begin{cases} d_1 = d_2 \\ \xi = 1 \end{cases}$ ($d_2 \to 0$ d) и $\frac{d_2}{R} \ll 1$

тогда предел берется за счет $\tau = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi R}{2R+d} \to 0$.

$kR = \frac{2\pi}{T_1}\sqrt{n_1^2 + n_2^2\xi^2}\cdot R = \left|\xi = \frac{T_1}{T_2} = 1\right| = \tau(n_1^2+n_2^2)^{1/2}$ и $\tau \ll 1$

позволяет $\sum_{(n_1,n_2)} (\cdot) \to \frac{S_0}{(2\pi)^2}\int d^2\vec{k}\,(\cdot)$.

⇒ А вот предел $\xi = \frac{T_1}{T_2} \gg 1$ — есть предел перехода к ($T_1 \gg T_2$) цепочке дотов $\parallel Oy$.

$$\mathbb{F}(\beta, d/R) = -\frac{2}{\pi}\xi^3 \sum_{n_1 n_2} f(\beta kR)\frac{n_2^2}{(n_1^2+n_2^2\xi^2)^2}\left[-C_1(kR)\frac{n_1^2 - n_2^2\xi^2}{n_1^2+n_2^2\xi^2} + C_2(kR)\right]$$

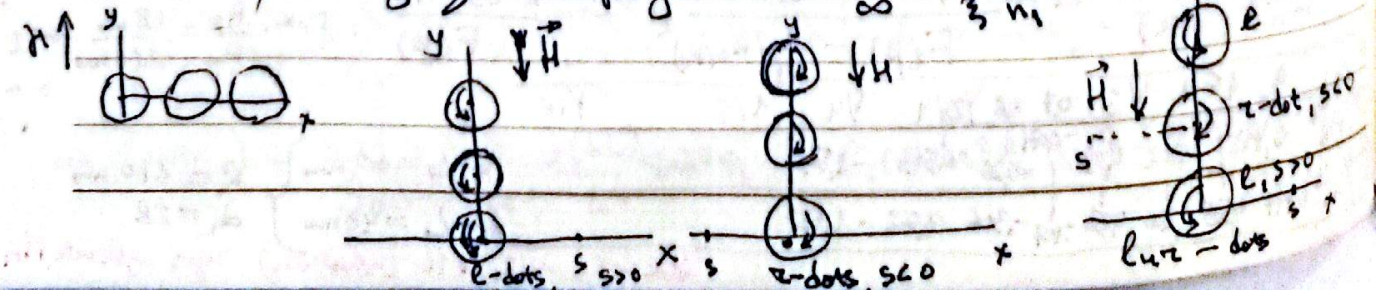
при $\xi \to \infty$ $[\ldots] = C_1(kR) + C_2(kR) = 2J_1J_3 - J_2^2 - J_0J_2^2 =$

$= 2J_1J_3 - J_2(J_2+J_0) \approx 2J_1J_3 - J_2\frac{2}{x}J_1 = 2J_1\left(J_3 - \frac{1}{x}J_2\right) =$

$= 2J_1\left(\frac{3}{x}J_2 - J_1\right) = \left|x = kR \approx \frac{2\pi R}{T_2}n_2 \text{ конечен}\right|$

$$\mathbb{F}(\beta, d/R)_{\xi \gg 1} = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{\xi}\sum_{n_1 n_2 \neq 0}\frac{2}{n_2^2}\left[J_1(kR)\left(\frac{3}{kR}J_2(kR) - J_1(kR)\right)\right]$$

— неопределенность из-за неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$: $\frac{1}{\xi}\sum_{n_1}(1)$.



Date. 20 · 07 ·

Чуть $\vec{s} \parallel Ox$

l-vortex ① линейн $w(z,\bar{z}) = i\,\frac{(z-s)}{|z-s|} = \frac{-y + i(x-s)}{\sqrt{\rho^2+s^2-2\rho s\cos\varphi}}$

r-vortex ② линейн $w(z,\bar{z}) = -i\,\frac{(z-s)}{|z-s|} = -\frac{-y + i(x-s)}{\sqrt{\rho^2+s^2-2\rho s\cos\varphi}}$

l-vortex : $m_y^l(\vec{\rho}) = \mathrm{Im}\, w(z,\bar{z}) = \frac{\rho\cos\varphi - s}{\sqrt{\rho^2+s^2-2\rho s\cos\varphi}}$, $s>0$ сонб. $\uparrow\uparrow \vec{H}\,\frac{y}{x}$

r-vortex : $m_y^r(\vec{\rho}) = \mathrm{Im}\, w(z,\bar{z}) = -\frac{\rho\cos\varphi - s}{\sqrt{\rho^2+s^2-2\rho s\cos\varphi}}$. Видно, что для $\frac{y}{x}\uparrow\uparrow\vec{H}$ надо использ. r-vortex с $s<0$, тогда $m_y \to -1$, $|s|\gg 1$.

$W_H(s) = -h_y \langle m_y\rangle_s = \left| h_y = -|h| \right| = |h|\, s \int_0^\infty dx \left[J_2(x) J_2(xs) - J_0(x) J_0(xs)\right]$ - некот. функция s. Получим переход от l-vortex к r-vortex, заменяем $m_y \to -m_y$, $s = |s| \to -s$ на линии $W_H(s)$.

W_H зависит от s^2 и одинакова для l и r-vortices.

Переход от l- к r-vortex: смена $m_x \to -m_x$, $m_y \to -m_y$ и $s = |s| \to -s$ (для l-вихря)

Для diluted dot : $W_m(s) = \frac{2}{\pi} s^2 \sum_{k=1}^{\mu} F_k(\beta)\, I_k^2(s)$ - тоже функция от s^2; и есть инвариантность отн. $\vec{m} \to \vec{m}$, т.к. $W_m \sim \delta(z)\delta(z') = (\vec{m}\cdot\vec{n})(\vec{m}\cdot\vec{n})$

Для одинаковых Coupled dots : $W_m \sim |k\cdot\vec{m}_k|^2$ инвариантна отн. $\vec{m} \to -\vec{m}$, и $W_m(s)$ - тоже функция s^2. Т.е. W_m одинакова для array из l-vortex или r-vortex dots.

Не изменится ли W_m если l-и r-vortex dots в array будут чередоваться? Т.е. array ① - ② - ① - ② ... или ① — ② / ② — ①

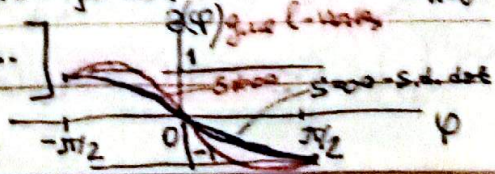


$E_{int} = \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} < 0$ для разных знаков q_1, q_2. $q_1 = -q_2 = Q$

$E_{int} = -\frac{Q^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ меньше для a) одинаковых зарядов, т.к. там $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ меньше.

Сечение $|k|/\overline{|v_\perp|}$ (для l-вихря) $\delta(\varphi) = (\vec{m}\cdot\vec{n})_s = -\frac{s\cdot\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2+s^2-2\rho s\cos\varphi}} = -s\sin\varphi \sum_{n=0} P_n(\cos\varphi)\frac{\rho^n}{s^n} =$

$= -\sin\varphi\left[1 + \frac{1}{s}\cos\varphi + \frac{1}{2s^2}(3\cos^2\varphi - 1) + \dots\right]$ ($\rho = 1$)



Date. . .

$H_n(d/R)$ anomaly ($H_n<0$ для $\frac{d}{R}<0{,}7-0{,}8$), видимо, с помощью l- и z-волн. дов не объяснить.

Может это ошибка MCAD из-за сложной функции под $\sum_{\vec{k}}(\dots)$?

$$W_m(\varphi_0) = W_m(\varphi_0=0) + \frac{4\pi^2}{S_0}\left(\frac{1}{S^2}\right)\sum_{\vec{k}} \frac{f(kb)}{k^2}\sin^2\varphi_k\left[-C_1(kR)\cos 2\varphi_k + C_2(kR)\right]$$

$\frac{1}{S^2} = \sin^2\varphi_0 \approx \varphi_0^2$, $\vec{H}$ || oy || нормали.

$$\left[-C_1\cos 2\varphi_k + C_2\right] = \left[-C_1(2\cos^2\varphi_k - 1) + C_2\right] =$$

$$= \left[-2C_1\cos^2\varphi_k + C_1 + C_2\right]$$

$$x = kR = \frac{2\pi R}{T_1}\sqrt{n_1^2 + n_2^2\xi^2} = \left|\begin{matrix} n_1\geq 1 \\ \text{или } n_2\geq 1\end{matrix}\right| = \tau\cdot\sqrt{n_1^2+n_2^2\xi^2} =$$

$$= \left|\begin{matrix} d/R = 2 \\ \xi = \frac{T_1}{T_2}\geq 1\end{matrix}\right| = 1{,}57\cdot\sqrt{n_1^2+n_2^2\xi^2} > 1 \quad \text{если } n_1\neq 0,\ n_2\neq 0 \Rightarrow \text{упрощаем } C_1(x),\ C_2(x)$$

(а $\vec{k}=0$ на одну функцию)

$$J_\nu(x) \underset{x>1}{\simeq} \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - (\nu+1/2)\frac{\pi}{2}\right)$$

Упрощение $C_{1,2}(x)$ позволит исключить MCAD-ошибку.

Тогда $H_n(d/R)<0$ будет означать невыгодную nucleation mode в coupled array.

$$\left[\dots\right] = \left[-C_1\cos 2\varphi_k + C_2\right], \quad C_1(x) = 3J_1(x)J_3(x) - J_2^2(x) =$$

$$= \frac{2}{\pi x}\left[3\cos\left(x-\tfrac{3}{4}\pi\right)\cos\left(x-\tfrac{7}{4}\pi\right) - \cos^2\left(x-\tfrac{5}{4}\pi\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi x}\left[-3\cos^2\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)\right] = -\frac{2}{\pi x}\left[3\cos^2(x+\pi/4) + \cos^2(x-\pi/4)\right] \leq 0$$

$$C_1(x) = -\frac{2\cdot 2}{\pi x}\left[1 - \sin x\cos x\right] \leq 0.$$

$$C_2(x) = -J_1(x)J_3(x) - J_0(x)J_2(x) = -\frac{2}{\pi x}\left[\cos\left(x-\tfrac{3}{4}\pi\right)\cos\left(x-\tfrac{7}{4}\pi\right) + \right.$$

$$\left. + \cos\left(x-\pi/4\right)\cos\left(x-\tfrac{5}{4}\pi\right)\right] = -\frac{2}{\pi x}\left[-\cos^2\left(x+\pi/4\right) + \cos^2\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)\cdot(-1)\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi x}\left[\cos^2\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{2}{\pi x} \geq 0, \quad x>1.$$

$$\left[\dots\right] = \frac{4}{\pi x}\left(1-\sin x\cos x\right)\cos 2\varphi_k + \frac{2}{\pi x} = \frac{2}{\pi x}\left[2(1-\sin x\cos x)\cos 2\varphi_k + 1\right]$$

$$\sin^2\varphi_k\left[-C_1\cos 2\varphi_k + C_2\right] = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi_k)\left[-C_1\cos 2\varphi_k + C_2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[C_2 - (C_1+C_2)\cos 2\varphi_k + C_1\cos^2 2\varphi_k\right]$$

Escaneado con CamScanner

Date.

$W_m(\varphi_0) = W_m(0) + \frac{4\pi^2}{S_0}\left(\frac{1}{S^2}\right)\sum_{k\neq 0}\frac{f(kL)}{k^2}\frac{1}{2}\left[C_2 - (C_1+C_2)\cos 2\varphi_k + C_1\cos^2 2\varphi_k\right]$

$\cos 2\varphi_k = -\sin^2\varphi_k + \cos^2\varphi_k = \frac{k_y^2 - k_x^2}{k^2} = \frac{n_1^2 - n_2^2\xi^2}{n_1^2 + n_2^2\xi^2}$, $\langle\cos 2\varphi_k\rangle_{\xi=1} = 0$ (сумма $\xi=1$ = нечетн. пом.)

Для сумм $\xi=1$ $\langle\cos 2\varphi_k\rangle_k = 0$ и $\left[C_2 + C_1\cos 2\varphi_k\right] =$

$= \left[\frac{2}{\pi x} - \frac{4}{\pi x}(1 - \sin x\cos x)\cos^2 2\varphi_k\right] = \frac{2}{\pi x}\left[-1 + 2\sin x\cos x\cos^2 2\varphi_k\right] =$ (неполож!), см. ниже

$= \frac{2}{\pi x}\left[\sin 2x\cos^2 2\varphi_k - 1\right] < 0$ (!) $\Rightarrow \Phi > 0$.

$C_1 + C_2 = -\frac{4}{\pi x}(1 - \sin x\cos x) + \frac{2}{\pi x} = \frac{2}{\pi x}\left[1 - 2(1 - \sin x\cos x)\right] =$

$= \frac{2}{\pi x}\left[\sin 2x - 1\right] \leq 0$, $x = kR$

$W_m(\varphi_0) = W_m(0) + \frac{4\pi^2}{S_0}\left(\frac{1}{S^2}\right)\frac{1}{2}\frac{2}{\pi R}\sum_{k\neq 0}\frac{f(kL)}{k^3}\left[\underbrace{(\sin 2x\cos^2 2\varphi_k - 1)}_{\text{знак} < 0} -\right.$

$\left. - (\sin 2x - 1)\cos 2\varphi_k\right] =$

$= W_m(0) + \frac{4\pi}{S_0 R}\varphi_0^2\sum_{k\neq 0}\frac{f(kL)}{k^3}\left[\underbrace{(\sin 2x\cos^2 2\varphi_k - 1)}_{<0} - \underbrace{(\sin 2x - 1)\cos 2\varphi_k}_{\text{знак не опр. из-за } \cos 2\varphi_k \text{ при } \xi\neq 1}\right]$ - ?

$\sum_{\vec{k}\neq 0} F(k)\cos 2\varphi_k = \sum_{n_1 n_2} F(k)\frac{n_1^2 - n_2^2\xi^2}{n_1^2 + n_2^2\xi^2} = \sum_{n_1 n_2}\tilde{F}(k)(n_1^2 - n_2^2\xi^2)$ - знак?

Итак $W_m(\varphi_0) = W_m(0) + \frac{8\pi}{S_0 R}\varphi_0^2\sum_{\vec{k}}\frac{f(kL)}{k^3}\sin^2\varphi_k\left[2(1 - \sin x\cos x)\cos 2\varphi_k + 1\right]$

Итого $C_2 + C_1\cos^2 2\varphi_k = \frac{2}{\pi x}\left[1 - 2(1 - \sin x\cos x)\cos^2 2\varphi_k\right] =$

$= \frac{2}{\pi x}\left[1 - 2\cos^2 2\varphi_k + \sin 2x\cos^2 2\varphi_k\right]$ и

$W_m(\varphi_0) = W_m(0) + \frac{4\pi}{S_0 R}\varphi_0^2\sum_{\vec{k}\neq 0}\frac{f(kL)}{k^3}\left[1 - 2\cos^2 2\varphi_k + \sin 2x\cos^2 2\varphi_k - \right.$

$\left. - (\sin 2x - 1)\cos 2\varphi_k\right]$

$\frac{8\pi}{S_0 R k^3} = \frac{8\pi}{T_1 T_2}\frac{1}{\frac{(2\pi)^2}{T_1^2}(n_1^2 + n_2^2\xi^2)}\frac{1}{\frac{2\pi R}{T_1}\sqrt{n_1^2 + n_2^2\xi^2}} = \frac{2}{\pi}\frac{\xi}{(n_1^2 + n_2^2\xi^2)}\frac{1}{2\sqrt{n_1^2 + n_2^2\xi^2}}$

$W_m(\varphi_0) = W_m(0) + \varphi_0^2\frac{2}{\pi}\frac{\xi}{2}\sum_{\vec{k}\neq 0} f(kL)\frac{n_2^2\xi^2}{(n_1^2 + n_2^2\xi^2)^{5/2}}\left[2(1 - \frac{1}{2}\sin 2x)\cos 2\varphi_k + 1\right]$

$\Phi(\xi, d/R) = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\frac{\xi^3}{2}\sum_{k\neq 0} f(kL)\frac{n_2^2}{(n_1^2 + n_2^2\xi^2)^{5/2}}\left[2(1 - \frac{1}{2}\sin 2x)\cos 2\varphi_k + 1\right]$

Escaneado con CamScanner

Date. 21 · 07 ·

$$F(\beta,d/R) = -\frac{8\pi}{S_0}\sum_{\vec{k}}\frac{f(kL)}{k^2}\sin^2\varphi_k\left[-C_1\cos 2\varphi_k + C_2\right] =$$

$$= -\frac{8\pi}{S_0}\cdot\frac{2}{\pi R}\sum_{\vec{k}\neq 0}\frac{f(kL)}{k^3}\sin^2\varphi_k\left[2\left(1-\tfrac{1}{2}\sin 2\chi\right)\cos 2\varphi_k + 1\right]$$

$$\frac{2\pi}{S_0}\frac{2}{\pi R}\frac{1}{k^3}\sin^2\varphi_k = \frac{8\pi}{T_1T_2}\frac{2}{\pi R}\frac{1}{\frac{(2\pi)^3}{T_1^3}(n_1^2+n_2^2\xi^2)^{3/2}}\frac{n_2^2\xi^2}{n_1^2+n_2^2\xi^2} =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{\left(\frac{2\pi R}{T_1}\right)}\xi^3\frac{n_2^2}{(n_1^2+n_2^2\xi^2)^{5/2}} = \frac{4}{\pi^2}\frac{\xi^3}{\tau}\frac{n_2^2}{(n_1^2+n_2^2\xi^2)^{5/2}} \quad \left|\ \xi = \frac{T_1}{T_2},\ \tau = kR\right.$$

ξ нормир. = const

$$\rightarrow F(\beta,d/R) = -\frac{4}{\pi^2}\frac{\xi^3}{\tau}\sum_{\vec{k}\neq 0} f(kL)\frac{n_2^2}{(n_1^2+n_2^2\xi^2)^{5/2}}\left[2\left(1-\tfrac{1}{2}\sin 2kR\right)\cos 2\varphi_k + 1\right]$$

Ранее 18/VII было:

$$F(\beta,d/R) = -\frac{2}{\pi}\xi^3\sum_{\substack{n_1,n_2\\(-\infty)}}^{\infty} f(kL)\frac{n_2^2}{(n_1^2+n_2\xi^2)^2}\left[-C_1(x)\cos 2\varphi_k + C_2\right]$$

Эта ф-ла получается при замене $C_1(x) \simeq -\frac{4}{\pi x}\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)$, $C_2 \simeq \frac{2}{\pi}$ которые очень точны при $x \gg 1$ и хороши при $x \geq 1$.

$kR = \frac{2\pi R}{T_1}\sqrt{n_1^2+n_2^2\xi^2} = \tau\sqrt{n_1^2+n_2^2\xi^2}$. $n_2 = 0$ не дает вклада в $\sum_{n_2\neq 0}(\dots)$

$(kR)_{min} = \tau\sqrt{0^2+1^2\xi^2} = \tau\xi = \left|\begin{matrix} d_1 = 2R \\ \tau = \pi/2 \end{matrix}\right| = \frac{\pi}{2}\frac{2}{1+\frac{1}{2}(d/R)} = \left|\frac{d}{R}\leq 1\right| = \frac{2}{3}\pi > 2$

MCAD показывает, что приближ. для $C_1(x), C_2(x)$ очень хорошо для $x > 1{,}4$.

(n_1,n_2): $(0,1) \rightarrow kR = \tau\xi$; $(1,1) \rightarrow kR = \tau\sqrt{1+\xi^2} \simeq \frac{\pi}{2}\frac{5}{3} > 2$

$(0,2) \rightarrow kR = \sqrt{2}\tau\xi$; $(1,2) \rightarrow kR = \tau\sqrt{1+4\xi^2} \simeq \frac{\pi}{2}\cdot 2\cdot\frac{4}{3} > \pi$

$\xi_{min} = \frac{2}{1+\frac{1}{2}\cdot 1} = \frac{4}{3}$

Для $(0,1)$; $(1,1)$; $(0,2)$ надо наложить точную ф-лу $C_1(x), C_2$

Для $\sum_{\substack{n_1,n_2\\(-\infty)}}^{\infty} F(n_1,n_2)$ по n_1,n_2:

$$= 2\sum_{\substack{n_1=1\\n_2=0}}^{\infty} F + 2\sum_{\substack{n_2=1\\n_1=0}}^{\infty} F + 4\sum_{\substack{n_1=1\\n_2=1}} F(n_1,n_2) =$$

$$= 2\left[F(0,1) + F(0,2) + \sum_{\substack{n_2=4\\n_1=0}} F(n_1,n_2)\right] + 4\left[F(1,1) + F(1,2) + F(2,1) + F(2,2) + \sum_{\substack{n_1=3\\n_2=3}} F(n_1,n_2)\right] =$$

$$= 2\left[\sum_{n_2=1}^{3} F(0,n_2) + \sum_{n_2=4}^{\infty}\tilde{F}(0,n_2)\right] + 4\left[\sum_{\substack{n_1=1\\n_2=1}}^{2} F(n_1,n_2) + \sum_{\substack{n_1=3\\n_2=3}}\tilde{F}(n_1,n_2)\right],$$

где $\tilde{F}$ – означает, что уже с большой точностью применимо

Escaneado con CamScanner

Date.

Аналит. разложения для $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

Удобно записана $\sum_{n_1 n_2} F(n_1 n_2)$.

$$\sum_{\substack{n_1=1\\ n_2=1}}^{\infty} F(n_1,n_2) = \sum_{n_1=1} \left\{ \sum_{n_2=1}^{n_2^*=2} F(n_1,n_2) + \sum_{n_2=n_2^*+1}^{\infty} F(n_1,n_2) \right\} =$$

$$= \sum_{n_2=1}^{n_2^*} \sum_{n_1=1}^{\infty} F(n_1,n_2) + \sum_{n_2=n_2^*+1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} F(n_1,n_2) = \sum_{n_2=1}^{n_2^*} \left(\sum_{n_1=1}^{n_1^*} + \sum_{n_1=n_1^*+1}^{\infty} \right) +$$

$$+ \sum_{n_2=n_2^*+1}^{\infty} \left(\sum_{n_1=1}^{n_1^*} + \sum_{n_1=n_1^*+1}^{\infty} \right) = \sum_{n_2=1}^{n_2^*} \sum_{n_1=1}^{n_1^*} + \sum_{n_2=1}^{n_2^*} \sum_{n_1=n_1^*+1}^{\infty} +$$

$$+ \sum_{n_2=n_2^*+1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{n_1^*} + \sum_{n_2=n_2^*+1}^{\infty} \sum_{n_1=n_1^*+1}^{\infty}.$$

здесь $C_1(x)$, $C_2(x)$ – точно, в остальных $\sum_{n_1 n_2}$ – приближенно.

Выбирая достаточно большие n_1^*, n_2^* всегда можно добиться $x = kR = r\sqrt{n_1^2 + n_2^2 \xi^2} > 4$. Например $n_1^* = n_2^* = 3$ уже хорошо.

→ Наличие в $W_m(\varphi_0)$ членов $\cos 2\varphi_k$ говорит об uniaxial, а $\cos^2 2\varphi_k \to \cos 4\varphi_k$ об fourfold анизотропии (?). А есть ли в "buckle" state с малых $\varphi_0 \ll 1$ квадруп. момент $\hat{Q}$?

$$m_x(\vec{\rho}) = -\frac{\rho \sin\varphi}{\sqrt{\rho^2+s^2-2\rho s\cos\varphi}} = -\frac{\rho}{s}\sin\varphi \sum_{n=0} P_n(\cos\varphi)\frac{\rho^n}{s^n} =$$

$$= -\frac{\rho}{s}\sin\varphi \left[1 + \frac{\rho}{s}\cos\varphi + O(\rho/s^2) \right]$$

$$m_y(\vec{\rho}) = \frac{\rho\cos\varphi - s}{\sqrt{\rho^2+s^2-2\rho s\cos\varphi}} = (\rho\cos\varphi - s)\frac{1}{s}\sum_{n=0} P_n(\cos\varphi)\frac{\rho^n}{s^n} =$$

$$= \frac{1}{s}\left[\cancel{\rho\cos\varphi} + \frac{\rho^2}{s}\cos^2\varphi + (-s) - \cancel{\rho\cos\varphi} - \frac{\rho^2}{2s}(3\cos^2\varphi - 1) + O(\rho/s^2) \right] =$$

$$= -1 + \frac{\rho^2}{2s^2}\sin^2\varphi + O(1/s^3)$$

$$Q_{\alpha\beta} = L\int_{S_1} d^2\vec{\rho}\left[3m_\alpha x_\beta + 3m_\beta x_\alpha - 2\delta_{\alpha\beta}(\vec{m}\cdot\vec{\rho}) \right]_{\beta,\alpha = x,y}$$, см. 6/VII.

Для "buckle" dot (meron из одного vortex'а с центром вне диска) $m_z = 0$. $\vec{m}\cdot\vec{\rho} = \rho m_x\cos\varphi + \rho m_y \sin\varphi = \rho\left[-\frac{\rho}{s}\sin\varphi\cos\varphi\left(1+\frac{\rho}{s}\cos\varphi\right) + (-\sin\varphi) + \frac{\rho^2}{2s^2}\sin^3\varphi \right] \to \int_0^{2\pi} d\varphi(\vec{m}\cdot\vec{\rho}) = 0$. $Q_{zz} = 0$, $Q_{\alpha z} = 0$.

$$Q_{xx} = 2L\int d^2\vec{\rho}\, m_x x = 6L\int d^2\vec{\rho}(-1)\frac{\rho^2}{s}\sin\varphi\cos\varphi\left(1+\frac{\rho}{s}\cos\varphi\right) = 0$$

$$Q_{yy} = 6L\int d^2\vec{\rho}\, m_y y = 6L\int d^2\vec{\rho}\,\rho\sin\varphi\left[-1 + \frac{\rho^2}{2s^2}\sin^2\varphi \right] = 0$$

$$Q_{xy} = 3L\int d^2\vec{\rho}\left[m_x y + m_y x \right] = 3L\int d^2\vec{\rho}\,\rho\left[-\frac{\rho}{s}\sin^2\varphi\left(1+\frac{\rho}{s}\cos\varphi\right) + \right.$$

Escaneado con CamScanner

Date. . .

$+ \cos\varphi\left(-1+\frac{\rho^2}{2s^2}\sin^2\varphi\right) = 3L\int d^2\vec{\rho}\,\rho\left(-\frac{\rho}{s}\sin^2\varphi\right) = 3L\left(-\frac{1}{s}\right)\times$

$\times \int_0^R d\rho\cdot\rho^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2\varphi = -\frac{3}{s}L\,\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^R \cdot\pi = -\frac{1}{s}3L\,\frac{1}{4}R^4\cdot\pi = -\frac{1}{s}\frac{3}{4}\pi L R^4$

$V_d = \pi R^2 L$, s - здесь размерное, $s \to s/R$.

квадрупольный момент и дальнодействие

$$Q_{xy} = Q_{yx} = -\frac{1}{s}\frac{3}{4}RV_d \quad (\text{в eg. } M_s). \qquad \frac{1}{s} = \sin\varphi_0.$$

Тогда $W_m^{2q} \sim Q^2 \sim \frac{1}{s^2} \sim \varphi_0^2$ имеет чувствительно большую величину. (Здесь Han - coupled dots было $Q \sim s^2$, $s \ll 1$)

→ При расчете Han (d/R), квадрупол. (полюс) вклады $\sim Q \sim s^2$ я проверял, т.к. рассчитывал коэф. при s^2, $s \ll 1$.

Здесь полюса $s=1$ для Han (d/R)-нахождения, оставив в W_m^{coupl} только dip-dip вклад при $s=1$ (вычисления). Хотя при $s \approx 1$ Q-вклад велик. Это и дало uniaxial анизотропию Han(d/R, φ_H) характерную для dip-interaction между дотами. Для Hn (d/R) ($s>>1$) Q-вклад тоже велик. Но он уже приводит к сильной быстрой падению H_n (d/R) и вычисления состоят в том, чтобы Q-Q член из W_m^{coupl} вычислив посчитав W_m^{dip} dip-dip приближении как Han (d/R).

Hn. Han (d/R)

Напомню. $W_m = 2\pi\sum_{\vec{k}} \frac{f(kL)}{k^2}\left|(\vec{k}\cdot\vec{M}_k)\right|^2$, $\vec{M}_k = \frac{1}{S_0}\int_{S_0} d^2\vec{\rho}\, e^{i\vec{k}\vec{\rho}}\vec{M}(\vec{\rho})$

→ В dip-dip приближении для interdot interaction $\vec{M}(\vec{\rho}) \to \langle\vec{M}\rangle_{S_d}$ м. энергия такая же как и для одного диполя с моментом $\vec{\mu} = V_d\langle\vec{M}\rangle$

В "rigid" v. model $\langle\vec{M}\rangle_{S_d} = M_s s\left(\frac{\vec{H}}{H}\right) \parallel \vec{H}$ для $s \ll 1$. $\langle\vec{M}\rangle \parallel \vec{H}$.

$$\vec{M}_k = \frac{\langle\vec{M}\rangle}{S_0}\int_{S_d} d^2\vec{\rho}\, e^{i\vec{k}\vec{\rho}} = \frac{\langle\vec{M}\rangle}{S_0}\frac{2\pi R}{k}J_1^2(kR), \quad \left(\frac{\vec{k}}{k}\cdot\vec{M}_k\right) = \frac{2\pi R}{S_0 k}J_1^2(kR)\cdot r\cos\varphi$$

$$W_m = 2\pi\sum_{\vec{k}} f(kL)\frac{4\pi^2R^2}{S_0^2k^2}J_1^2\langle\vec{M}\rangle^2\cos^2(\varphi_k-\varphi_H), \text{ как eg. объема диска}$$

$$\to W_m = 2\pi\frac{4\pi^2R^2}{S_0^2}\langle\vec{M}\rangle^2\frac{S_0}{(\pi R^2)}\sum_{\vec{k}}\frac{f(kL)}{k^2}J_1^2(kR)\cos^2(\varphi_k-\varphi_H) = \frac{8\pi^2}{S_0}\sum_{\vec{k}} f(kL)\frac{J_1^2}{k^2}\cos^2\varphi_k \cdot r(k)$$

Если $s \ll 1$ и $|\langle\vec{M}\rangle| = M_s s$ → $W_m = \frac{8\pi^2}{S_0}s^2\sum_{\vec{k}} f(kL)\frac{J_1^2(kR)}{k^2}\cos^2(\varphi_k-\varphi_H)$,

что дает $F(\beta, d/R, \varphi_H) = \frac{1}{2\pi}W_m = \frac{4\pi}{T_1T_2}\sum_{\vec{k}} f(kL)\frac{J_1^2}{k^2}\cos^2(\varphi_k-\varphi_H)$ — Верно для Han (d/R)

Но вообще в dip. приближении → $W_m = \frac{8\pi^2}{S_0}\langle\vec{M}\rangle^2\sum_{\vec{k}} f(kL)\frac{J_1^2(kR)}{k^2}\cos^2(\varphi_k-\varphi_H)$,

где $\langle\vec{M}\rangle$ - считать отдельно

SW wires

Date. 22.07.

Уточним расчет частот SW wires для нового эксперимента Демокритова (см. (7(VI)). Hlong wire, $H = 600$ Oe, $4\pi M_s = 10.2$ kOe, $w = 1$ μm, $L = 30$ μm.

	0	1	2	3	4	5
		фур-ия.				
	7.5 (0.250)	9.2	11.1	12.6	13.5	14.3
	-	9.8 (0.306)	11.4 (0.361)	12.7 (0.401)	13.6 (0.432)	14.5 (0.456)
	-	9.2 (0.306)	10.9 (0.363)	12.1 (0.404)	13.0 (0.437)	13.7 (0.463)
	-	9.2	10.9	12.2	13.2	13.9

← частоты (0.463) из Table 17/VI

← частоты с поправкой на обмен

Частоты SW wires:

$$\omega_m^2 = \left(\omega_H + 1 + \frac{\lambda_m}{4\pi}\right)\left(\omega_H - \frac{\lambda_m}{4\pi}\right), \quad \omega_H = \frac{0.6}{10.2} = 0.059$$

λ_n – СЗ

$$\lambda_n m_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx'\, g(x,x')\, m_n(x'), \quad g(\xi) = \frac{2}{p}\ln\left(\frac{\xi^2}{\xi^2+p^2}\right)$$

При $p \ll 1$ можно записать $\lambda_n = -4\pi + c_n p$ и зад. ур.

$$\tilde{\Lambda}_n m_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} dx'\, g_L(x,x')\, m_n(x'), \quad g_L(\xi) = \frac{p}{\pi}\frac{1}{\xi^2+p},$$

где $\tilde{\Lambda}_n = 1 - \frac{p}{2\pi} c_n = -1 - \frac{1}{2\pi}\lambda_n$. $\quad -\frac{\lambda_n}{4\pi} = \frac{1}{2}(\tilde{\Lambda}_n + 1)$.

Для учет обмена надо $\omega_H \to \Omega_{m0} = \omega_H + \alpha' \varkappa_{m0}^2$,

$\varkappa_{m0} = \frac{\pi m}{w}$. $\quad \alpha' = \frac{\alpha}{4\pi} = 2.5\cdot 10^{-13}\ \text{cm}^2$.

$$\to \omega_{ex}^m = \alpha'\left(\frac{\pi m}{w}\right)^2 = 2.5\cdot 10^{-13}\ \frac{\text{cm}^2}{(10^{-4})^2\,\text{cm}^2}\,\pi^2 m^2 = 2.47\cdot 10^{-4} m^2.$$

($m = 1, 2, 3\ldots$ номер моды)

При этом $m=1$ 

≈ соотв. первой SW мода wires.

Тогда $\omega_m^2 = \left[\omega_H + \omega_{ex}^m + 1 + \frac{\lambda_m}{4\pi}\right]\left[\omega_H + \omega_{ex}^m - \frac{\lambda_m}{4\pi}\right]$,

SW частоты wires с поправкой на обмен.

Видно из Table, что поправка на обмен ω_{ex}^m, тоже и сдвигает ω_m в прав. направлении, но недостаточна для объяснения f_m – эксп. с $m = 3, 4, 5$.

Escaneado con CamScanner

Date. . .

2 Vortex - complex description

Резюме по комплексному описанию точных догов. $\vec{m}(\vec{p})$

1) дог не эллипсоид → $\vec{m}(\vec{p})$ неоднородно и описывается возбужденными состояниями обмен. задачи → $f(z)$, $z = x+iy$, где $f(z)$ – аналит. функция (кроме конечного числа полюсов)

2) $f(z)$ разложима в ряд по $(z-a_i)^{\nu}$ и/или $(z-b_i)^{-\nu}$, каждый член которого – „солитон" или „антисолитон"
$w(z) = f(z)$, $\vec{m}$ через $w(z)$

3) Требование мин магнитостат. энергии (face surface charges) $m_z =$ торцевых зарядов приводит к $w(z,\bar{z}) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$ – введению „тонов"-областей

4) Требование мин боковых поверх. зарядов $(\vec{m}\cdot\vec{n})_S = 0$ снимает жесткость (не годится в $H \neq 0$) и приводит к $\vec{m}(\vec{p})$ зависимости от 4-параметров $C, A, \bar{A}$ и d (масштаб)
Для цилиндра это $f(z) = B(z-z_1)(z-z_2)$ – квадратич. фун-я

5) $f(z)$ могут быть лишь полиномами, т.к. $E_{ex} \sim Q \sim |N_+ - N_-|$ – обмен. энергия ~ топол. заряду Q, определ. как $\max(\mu,\nu)$ – максим. степень числителя или знаменателя f

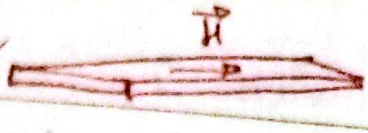
6) Самое простое: $f(z) = az+b$ → „rigid" v. model $f(z) = \frac{i}{c}(z+\frac{d}{c})$
($f(z) = \text{const}$ – тривиально и соотв. ground state $\vec{m} = \text{const}$ of E_{ex})
Следующее по сложности $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ → „Conformal" model $\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right)$
$f(z) = icz^2 + A - \bar{A}z^2$ – „quadratic" model, $Q=2$. $Q=1$

При этом „rigid" v. model – one vortex (soliton)
„Flower", „Conformal" and „quadratic" models в цилиндре – two solitons
($\nabla_z = (\vec{m}\vec{n})_S = 0$)

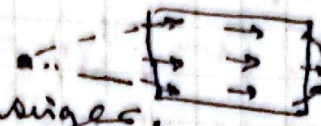
$f(z) = -A(z-z_3)(z+z_3)$ – „flower" state $(29|\bar{1})$ – two solitons (Skyrmions)

„Flower" state и „quadratic" m. частный случай для
$f(z) = az^2 + bz + c$ с $Q=2$.

PlanMemo 23.07.01

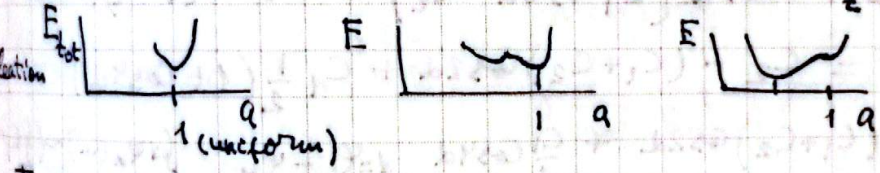
SW 

Для описания SW в rectan. dot надо знать dote. статическое $H_d(\vec{r})$, т.е. статическое $\vec{m}(\vec{\rho})$. Граничные Заряды $(m \cdot n)_S$ для реального $\vec{m}(\vec{\rho})$ будут значительно меньше в $H \leq M_S$, чем для $\vec{m} = const$ (как раньше предполагали). А это важно для низкой моды (2-ая точка поворота-?)

Если для $H \gg M_S$  2-х симметричное описание еще приведет, то для $H \leq M_S$ $\vec{m}(\vec{\rho})$ будет похоже на C- или S- state в rectan. dot ($H=0$) или shifted vortex state.

Conformal model - H_n-?

Дает подойдет ли "conformal" model $f(z) = \frac{z-a}{1-az}$ для описания nucleation в цилиндре при $a \gg 1$? Если $a>1$ to mapping уже не self-to-self и W_{ex} будет зависеть от a. Внутри дота как 29-30/12 берем "мясо". Но отклонение от $a=1$ (hom. dot - uniform state), видимо, дальше, чем от $a=\infty$ (когда $f(z) \approx \frac{1}{z}$ - антивихрь в доте )



с уменьшением H.

Тогда W - полезно надо разложить по $\varepsilon = 1-a \ll 1$

$$W(\varepsilon) = W(0)_{a=1} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 W''_\varepsilon, \quad W''_\varepsilon = 0 \text{ и даст } H_n.$$

$$f(z) = \frac{z-1+\varepsilon}{1-(1-\varepsilon)z} = \frac{z-1+\varepsilon}{1-z+\varepsilon z} = \frac{1}{(1-z)}\frac{(z-1)+\varepsilon}{1+\varepsilon\left(\frac{z}{z-1}\right)} = \frac{(z-1)+\varepsilon}{(1-z)}\left[1-\varepsilon\frac{z}{z-1}+\varepsilon^2\frac{z^2}{(z-1)^2}+\dots\right] =$$

$$= \frac{1}{(1-z)}\left[(z-1) - \varepsilon z + \varepsilon^2 z^2 \frac{1}{(z-1)} + \varepsilon - \varepsilon^2\frac{z}{(z-1)} + O(\varepsilon^3)\right] =$$

$$= \frac{1}{(1-z)}\left[(z-1) + \varepsilon(1-z) + \varepsilon^2\frac{z}{(z-1)}(z-1) + \dots\right] = -1 + \varepsilon - \varepsilon^2\frac{z}{(z-1)} + O(\varepsilon^3)$$

- разложение сингулярно на границе дота $|z|=1$. (увы!) $\varepsilon = 0 \to$ uniform dot.

Так просто H_n в conformal model не найдем.

Plan Memo.

H_n random, lat. array (dip. ферромагнитное дальнодействующее coupling)

Date. Модель $H_n(d/R)$ для random lat. of coupled dots

В дип. приближении дальнодействующий режим $\langle \vec{M} \rangle_{Sd} = M_s(T)$

$\vec{H} \parallel oy$, $\varphi_H = \pi/2$, range (Cm. 15(VII)) $\langle m_x \rangle_{Sd} \neq 0$, $\langle m_y \rangle_{Sd} = 1 - \frac{1}{8}\frac{1}{S^2}$

$$W_m(s) = \frac{2\pi^2}{S_0}\langle \vec{M} \rangle_{Sd}^2 \sum_{\vec{k}} f(kL)\frac{J_1^2}{k^2}\cos^2(\varphi_k - \varphi_H) =$$

$$= (\dots)\left(1 - \frac{1}{8}S^2\right)^2 = (\dots)\left(1 - \frac{1}{4}\frac{1}{S^2} + O(1/S^4)\right) = 2\pi\left[\frac{4\pi}{S_0}\sum_{\vec{k}} f\frac{J_1^2}{k^2}\cos^2(\varphi_k - \varphi_H)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\frac{1}{S^2}\frac{4\pi}{S_0}\sum_{\vec{k}} f\frac{J_1^2}{k^2}\cos^2(\varphi_k - \varphi_H)\right] = 2\pi\left[F_1(\beta, d/R, \varphi_H) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{S^2}\frac{\pi}{S_0}\sum_{\vec{k}} f\frac{J_1^2}{k^2}\cos^2(\varphi_k - \varphi_H)\right], \quad \frac{1}{S^2} = \varphi_0^2, \quad F_1(\beta, d/R) \xrightarrow[d/R \to \infty]{} F_1(\beta)$$

– разные р. сил

$$W_m(\varphi_0) = W_m(0) - \varphi_0^2(2\pi)\frac{\pi}{S_0}\sum_{\vec{k}}(\dots) = W_m(0) - \frac{3\pi}{2}\varphi_0^2 F(\beta, d/R)$$

$$F(\beta, d/R) = \frac{4\pi}{S_0}\sum_{\vec{k}} f(kL)\frac{J_1^2(kR)}{k^2}\cos^2(\varphi_{\vec{k}} - \varphi_H)$$

– для H_n $\varphi_0^2 \ll 1$.

С другой стороны $\cos^2\alpha(C_1\cos 2\alpha + C_2) = C_2 - (C_1 + C_2)\cos 2\alpha +$

$$+ C_1\cos^2 2\alpha = C_2 - (C_1 + C_2)\cos 2\alpha + C_1\frac{1}{2}(1 + \cos 4\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}C_1 + C_2 - (C_1 + C_2)\cos 2\alpha + \frac{C_1}{2}\cos 4\alpha, \quad \alpha = \varphi_k - \varphi_H.$$

Чбб!

→ но при $d/R \to \infty$ $F(\beta, d/R) \sim F_1(\beta) \sim \int \frac{dt}{t} f(\beta t) J_1^2(t)$ и

правильный предел $\sim \int \frac{dt}{t} f(\beta t)[J_1^2(t) - J_2^2(t)]$ isolated не вклад

В $\vec{k}$ - представлении трудно выделить dip. вклад $\vec{M}(\vec{\rho}) \to \langle \vec{M}(\rho) \rangle_{Sd}$ не всегда проходит. Так можно делать во всех n' - доках кроме собственного n ($n' \neq n$).

Ст. 13/I оол.: $W_m = -\frac{1}{2S}\sum_{nn'}\int_{S_n} d^2\vec{\rho}\int_{S_{n'}} d^2\vec{\rho}'\, g_{\alpha\beta}(\vec{\rho} + \vec{R}_n, \vec{\rho}' + \vec{R}_{n'}) M_n^\alpha(\rho) M_{n'}^\beta(\rho')$

(на ед. объема пленки)

$$g_{\alpha\beta}(\vec{\rho} + \vec{R}_n, \vec{\rho}' + \vec{R}_{n'}) = -\frac{1}{\pi}\int d^2\vec{k}\, f(kL)\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} e^{i\vec{k}(\vec{\rho} - \vec{\rho}')} e^{i\vec{k}(\vec{R}_n - \vec{R}_{n'})}$$

$\vec{\rho}$ - внутри-доменная координата, $\vec{R}_n$ – центры доменов (решетка)

$$W_m = -\frac{1}{2S}N\int d^2\rho\, d^2\rho'\, g_{\alpha\beta}(\vec{\rho}, \vec{\rho}') M_n^\alpha(\rho) M_n^\beta(\rho') -$$

$$- \frac{1}{2S}\sum_{\substack{nn' \\ (n \neq n')}}\int d^2\rho \int d^2\rho'\, g_{\alpha\beta}(\rho + R_n, \rho' + R_{n'}) \langle M_n^\alpha \rangle \langle M_{n'}^\beta \rangle$$

– dip. приближение для

Escaneado con CamScanner

Escaneado con CamScanner

$$\sum_{n,n'} f(\vec{R}_{nn'}) = N \sum_{n} f(\vec{R}_{n})$$

Ур. ка 9/III оол. нарочно из намагниченных на n-ого в array:

$$H_d^{(n)}(r) = \int_{V_d^{(n)}} d^3r'\, G_{\alpha\beta}(r,r')\, M_\beta^{(n)}(r') + \sum_{n'\neq n} \frac{V_d}{R_{nn'}^3}\left[3\frac{\vec{R}_{nn'}^{\alpha}(\vec{R}_{nn'}\cdot\vec{M}^{(n')})}{R_{nn'}^2} - \langle M_\alpha^{(n')}\rangle\right]$$

где сосед учтены в дип. приближении.

$$W_m(\text{одного } n\text{-ого}) = -\frac{1}{2}\int_{V_d^{(n)}} d^3r\, \vec{M}^{(n)}(r)\cdot\vec{H}_d^{(n)}(r) = \left|\vec{H}_d^{(n)} = \vec{H}_d^{(self)} + \vec{H}_d^{(n')}\right.$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{V_d^{(n)}} d^3r \int_{V_d^{(n)}} d^3r'\, G_{\alpha\beta}(r,r')\, M_\alpha^{(n)}(r)\, M_\beta^{(n)}(r') -$$

$$-\frac{1}{2}\int d^3r\, \vec{M}^{(n)}(r)\cdot\sum_{n'\neq n}\frac{V_d}{R_{nn'}^3}\left[3\frac{\vec{R}_{nn'}(\vec{R}_{nn'}\langle\vec{M}^{(n')}\rangle)}{R_{nn'}^2} - \langle\vec{M}^{(n)}\rangle\right] =$$

$$= V_d\cdot W_m\left(\begin{matrix}\text{на. энергия}\\ \text{одного гоа - self}\end{matrix}\right) - \frac{1}{2}V_d\langle\vec{M}^{(n)}\rangle\cdot\sum_{n'\neq n}\frac{V_d}{R_{nn'}^3}\cdot$$

$$\cdot\left[3\frac{\vec{R}_{nn'}(\vec{R}_{nn'}\cdot\langle\vec{M}^{(n')}\rangle)}{R_{nn'}^2} - \langle\vec{M}^{(n')}\rangle\right]$$

$$W_m(\text{array}) = \sum_n W_m(n) = -\frac{1}{2}\sum_n\int_{V_d^{(n)}} d^3r\, \vec{M}^{(n)}(r)\, H_d^{(n)}(r) =$$

$$= V_d N\, W_m(\text{self}) - \frac{1}{2}V_d^2\sum_{\substack{nn'\\(n'\neq n)}}\frac{1}{R_{nn'}^3}\left[\frac{3}{R_{nn'}^2}(\vec{R}_{nn'}\cdot\langle\vec{M}^{(n)}\rangle)(\vec{R}_{nn'}\cdot\vec{M}^{(n')}) - \right.$$

$$\left. - \langle\vec{M}^{(n)}\rangle\langle\vec{M}^{(n')}\rangle\right]$$

$$\rightarrow W_m(\text{array}) = W_m(\overset{\text{dot}}{\text{self}}) + \frac{1}{2}\sum_{nn'}\frac{1}{R_{nn'}^3}\left[\vec{\mu}_n\vec{\mu}_{n'} - \frac{3}{R_{nn'}^2}(\vec{R}_{nn'}\vec{\mu}_n)(\vec{R}_{nn'}\vec{\mu}_{n'})\right]$$

- зав. вид энергии решетки конечных доов, взаимодействующих в дип. приближении, см. 6/II оол. $\vec{\mu}_n = V_d\langle\vec{M}\rangle_{V_d}$ = дип. момент гоа.

N - число доов в реш. $n = 1,\dots N$.

Мы сможем для расчета $H_n(d/R)$ все $\vec{\mu}_n \parallel \vec{\mu}_{n'} \parallel \vec{H}$.

$$\vec{\mu}_n = |\vec{\mu}_n|\frac{\vec{H}}{H} = \mu\frac{\vec{H}}{H}\cdot\quad \frac{\vec{H}}{H} = (\cos\varphi_H, \sin\varphi_H)\cdot\quad \frac{\vec{R}_{nn'}}{R_{nn'}} = \begin{pmatrix}\cos\varphi_{\vec{R}_{nn'}}\\ \sin\varphi_{\vec{R}_{nn'}}\end{pmatrix}$$

$$[\dots] = \mu^2\left[1 - \frac{3}{R_{nn'}^2}\left(\vec{R}_{nn'}\cdot\frac{\vec{H}}{H}\right)^2\right] = \mu^2\left[1 - 3\cos^2(\varphi_{\vec{R}_{nn'}} - \varphi_H)\right]$$

$$W_m(\text{array}) = V_d N\, W_m(\text{self}) + \frac{1}{2}N\mu^2\sum_n\frac{1}{R_n^3}\left[1 - 3\cos^2(\varphi_{\vec{R}_n} - \varphi_H)\right]$$

$$\rightarrow W_m\left(\begin{matrix}\text{на ед. } V_d \text{ в}\\ \text{dot arrays}\end{matrix}\right) = W_m(\text{self}) + \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{V_d}\sum_n\frac{1}{R_n^3}\left[1 - 3\cos^2(\varphi_{R_n} - \varphi_H)\right]$$

$\vec{\mu}_n \parallel \vec{H}$

H_n: $W_m^{self}(\varphi_0) = W_m^{self}(0) + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\varphi_0^2\int\frac{dt}{t}f(\beta t)\left[J_1^2(t) - J_2^2(t)\right]$

φ_0 сидит в μ. $\mu^2 = V_d^2\langle\vec{M}\rangle^2 = V_d^2 M_s^2\langle\vec{m}\rangle^2 = V_d^2 M_s^2\left(1 - \frac{1}{4}\varphi_0^2\right)$

$$W_m^{\text{сидит}}(\varphi_0) = W_m^{self}(0) - \frac{\pi}{2}\varphi_0^2\left[F_1(\beta) - F_2(\beta)\right] + \frac{1}{2}V_d\left(1 - \frac{1}{4}\varphi_0^2\right)\sum_n\Phi(R_n) =$$

$F(\beta)$

Plan Memo

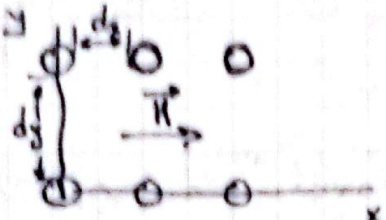
$$= W_m^{comp}(0) - \rho_0^2 \frac{\pi}{2}\left[F(\beta) + \frac{1}{4\pi} V_d \sum_n \Phi(R_n)\right] =$$

Dato.

$$= W_m^{comp}(0) - \frac{\pi}{2}\rho_0^2 \mathbb{F}(\beta, d/R) \quad \text{; para } H_n(d/R)$$

$$\rightarrow \mathbb{F}(\beta, d/R) = F(\beta) + \frac{1}{4\pi} V_d \sum_{n\neq 0} \frac{1}{R_n^3}\left[1 - 3\cos^2(\varphi_{R_n} - \varphi_H)\right]$$

$\vec{R}_n$ - vectores reticulares de la red, $\vec{R}'_n$ - vectores de la red recíproca.



- Cuadrada igual que y hexagonal.

$T_x = 2R + d_x$ - no importante ($T_x < T_y$)

$$\vec{R}'_n = (n_1 T_x, n_2 T_y) = T_y (n_1 \xi^{-1}, n_2)$$

$$\xi^{-1} = \frac{T_x}{T_y} = \frac{2 + (d_x/2R)}{1 + (d_y/2R)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{d_x}{R}\right)$$

$d_y = 2R$, $d_x = d$: $\varphi_H = 0$.

$$\rightarrow \mathbb{F}(\beta, d/R) = F(\beta) + \frac{1}{4\pi} V_d \sum_{n\neq 0} \frac{1}{R_n^3}\left[1 - 3\cos^2\varphi_{R_n}\right]$$ para H_n y dip-dip sup.

$$\frac{1}{4\pi} V_d \frac{1}{R_n^3} = \frac{1}{4\pi} \pi R^2 L_z \frac{1}{R_n^3} = \frac{1}{4}\beta\left(\frac{R}{R_n}\right)^3 = \frac{1}{4}\beta R^3 \frac{1}{T_y^3 (n_1^2 \xi^{-2} + n_2^2)^{3/2}} =$$

y rebocaga

$$= \left| T_y = 2R + d_y = 2R + 2R = 4R \right| = \frac{1}{4}\beta \frac{1}{4^3} \frac{1}{(n_1^2\xi^{-2} + n_2^2)^{3/2}} = \frac{1}{4^4}\beta \frac{1}{(n_1^2\xi^{-2} + n_2^2)^{3/2}}$$

$$\cos^2\varphi_{R_n} = \frac{(R_n^x)^2}{|R_n|^2} = \frac{n_1^2 T_x^2}{n_1^2 T_x^2 + n_2^2 T_y^2} = \frac{n_1^2}{n_1^2 + n_2^2 \left(\frac{T_y}{T_x}\right)^2} = \frac{n_1^2}{n_1^2 + n_2^2 \xi^2}$$

$$\rightarrow \mathbb{F}(\beta, d/R) = F(\beta) + \frac{\beta}{4^4} \sum_{\substack{n_1 n_2 \\ (n_i \neq 0)}} \frac{1}{(n_1^2\xi^{-2} + n_2^2)^{3/2}}\left[1 - 3\frac{n_1^2}{n_1^2 + n_2^2\xi^2}\right], \quad \xi = \frac{T_y}{T_x}$$

$$\frac{H_n}{M_s} = 4\pi\left[\mathbb{F}(\beta, d/R) - \frac{1}{3}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3\right]$$

$$(*) \quad \frac{H_n^{comp}(\beta, d/R)}{H_n^{isol}(\beta)} = \frac{\mathbb{F}(\beta, d/R) - \frac{1}{3}(R_0/R)^3}{F(\beta) - \frac{1}{3}\cdot(R_0/R)^3} \approx \frac{\mathbb{F}}{F(\beta)} = 1 + \frac{\beta}{4^4 F(\beta)} \sum_{n_1 n_2} (\dots)$$

$2R = 420$ nm, $d_y = 2R$.

d/R	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
$L=60$ nm H_n^{comp}/H_n^{isol}	-0.193	-0.044	0.081	0.188	278	356	423	481	532	577	617	652	683	711	735	758	778
$L=40$ nm H_n^{comp}/H_n^{isol}	-0.125	-0.072	0.057	0.166	259	338	408	467	520	566	606	642	674	703	728	751	772

Plan Memo

24.07.01

H_n, H_{an} rectan. dot array of vortex dots ("rigid" vs modal)

→ Влияние m. coupling ~ $\frac{\beta}{F(\beta)}$ для $H_n(d/R)$.

Note. Для $H_{an}(d/R)$ в дин. приближении для интегр. m. coupling получим аналогично к (*) - формулу, но вместо $\sum_{n_1 n_2}(*)$ будет ~ $\frac{\beta}{F_1(\beta)}$.

Т.к. $F_1(\beta)$ значительно больше $F(\beta) = F_1(\beta) - F_2(\beta)$ для $\forall\beta$ и, то влияние coupling на $H_{an}(d/R)$ будет значительно слабее, чем на $H_n(d/R)$.

Для H_{an} из общей dip-dip формулы 23.07. получим при $\mu = M_s s V_d$: $\frac{\mu^2}{V_d} = \frac{1}{V_d} M_s^2 s^2 V_d^2 = M_s^2 V_d s^2$

$$W_m^{coup}(s) = W_m^{self}(s) + \frac{1}{2} V_d s^2 \sum_n \Phi(R_n)$$

↑ isol. d.

$$W_m^{self}(s) = W_m^s(0) + 2\pi F_1(\beta) s^2$$

$$W_m^{coup}(s) = W_m^s(0) + 2\pi F_1(\beta) s^2 + \frac{1}{2} V_d s^2 \sum_n \Phi(R_n) =$$

$$= W_m^s(0) + 2\pi \left[F_1(\beta) + \frac{1}{4\pi} V_d \sum_n \Phi(R_n) \right] s^2 = (s=0) +$$

$$+ 2\pi \mathbb{F}_1(\beta, d) s^2$$

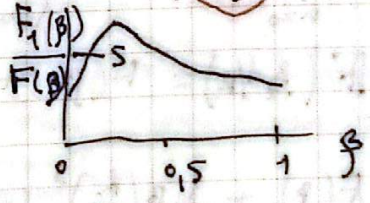
→ $\mathbb{F}_1(\beta, d/R) = F_1(\beta) + \frac{V_d}{4\pi} \sum_n \Phi(R_n)$ для H_{an}, $H_{an} = 4\pi \mathbb{F}_1 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2$:

$$\frac{H_{an}^{coup}(\beta, d/R)}{H_{an}^{isol}(\beta)} = \frac{4\pi \mathbb{F}_1(\beta, d/R) - (R_0/R)^2}{4\pi F_1(\beta) - (R_0/R)^2} \approx \frac{\mathbb{F}_1(\beta, d/R)}{F_1(\beta)} = 1 + \frac{1}{4} \frac{\beta}{F_1(\beta)} R^3 \sum_n \Phi(R_n)$$

Тогда как $\frac{H_n^{coup}(\beta, d/R)}{H_n^{isol}(\beta)} \approx \frac{\mathbb{F}(\beta, d/R)}{F(\beta)} = 1 + \frac{1}{4} \frac{\beta}{F(\beta)} R^3 \sum_n \Phi(R_n)$

$$\Phi(R_n) \approx \frac{1}{R_n^3} \left[1 - 3\cos^2(\varphi_{R_n} - \varphi_H) \right]$$

$$F_\mu(\beta) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} f(\beta t) J_\mu^2(t).$$



Подготовка доклада на семинаре Shina.

25/VII

Поездка в Тайон на семинар.

Shin предложил мне через 1 год подать к нему в CNRS на position, Assistant professor, at least.

Escaneado con CamScanner

Plan Memo

Exchange integral theorem

Date. 26. 07.

Обмен в $\vec{m}$-components в представлении $w_{ex} = \frac{C}{2}\left[(\nabla m_x)^2 + (\nabla m_y)^2 + (\nabla m_z)^2\right] = \frac{C}{2}\sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2$

$\nabla^2 = \nabla\nabla$: $(\vec{m}^2 = 1)$ $\quad m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1$

$\nabla^2 m_\alpha^2 = 2 m_\alpha \nabla^2 m_\alpha + 2(\nabla m_\alpha \cdot \nabla m_\alpha)$

$\nabla^2 \sum_\alpha m_\alpha^2 = 2 \sum_\alpha m_\alpha \cdot \nabla^2 m_\alpha + 2 \sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = 0$,

т.е. $\sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = -\sum_\alpha m_\alpha \nabla^2 m_\alpha = -\vec{m}\cdot\nabla^2\vec{m}$

$W_{ex} = \frac{C}{2}\int dV \sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = -\frac{C}{2}\int dV\, \vec{m}\cdot\nabla^2\vec{m}$

$\int dV\, m_\alpha \cdot \nabla^2 m_\alpha \rightarrow$ преобразовать в $\int_S dS$ как в $w(z,\bar{z})$ - метода у Мелкова.

Hn, Han dot array (цепочка)

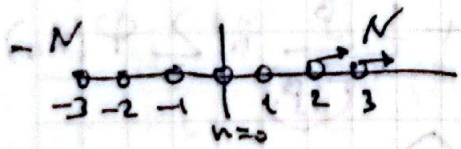
27/VII // При описании Hn, Han of coupled dot array в dip-dip приближении для interdot coupling, возникает $\sum_n \Phi(R_n) = \sum_n \frac{1}{R_n^3}\left[1 - 3\cos^2(\varphi_{\vec{R}_n} - \varphi_H)\right]$

Если array = 1D цепочка $\parallel Ox$ O O O O O → H

и φ_H, H вдоль цепочки, то $\vec{R}_n \parallel Ox$, $\varphi_{R_n} - \varphi_H = 0$

$\sum_n \Phi(R_n) = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{R_n^3}[1-3] = (-2)\sum_n R_n^{-3}$, $n=0$ - центр. dot

$R_n = n T_x$, $T_x = 2R + d \rightarrow \sum_n \Phi(R_n) = (-2)\frac{1}{T_x^3}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{|n|^3}$



Пусть в цепочке $(2N+1)$ dot, тогда для центрального dot

$\rightarrow \mathbb{F}(\beta, d/R) = F(\beta) + \frac{V_d}{4\pi}\sum_n \Phi(R_n) = F(\beta) + \frac{1}{4}\beta R^3 \frac{(-2)}{T_x^3}\sum_{\substack{n\neq 0 \\ n=-N}}^{N}\frac{1}{|n|^3} =$

$= F(\beta) + \frac{1}{4}\beta\left(\frac{R}{T_x}\right)^3(-2)\cdot 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^3} = F(\beta) - \frac{1}{8}\beta\frac{1}{\left(1+\frac{d}{2R}\right)^3}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^3}$

У нобоска $N=3$ (!) $2N+1 = 7$ dots in chain.

При $N\to\infty$ $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^3} = \xi(3) = 1{,}202$ Riemann Zeta-Function

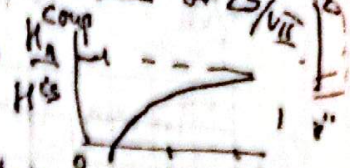
При $N=3$ $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^3} = 1{,}162$ уже очень близка к $N=\infty$.

→ Расчет $H_n(d/R)$ по ф. цепочки с $N_1 = 100$ (к) очень хорошо совпад

Memo

Считаем для 2D-array в dip-dip приближении от 23/VII

т.е. $\frac{H_n^{coupl}(\beta, d/R)}{H_n^{isol}(\beta)}$ идет снижение кривых $\frac{H_n^{coup}}{H_n^{isol}}$



уже для He в неправильном уже interdot coupling, а в синглах малый $H_n(\beta) \sim F_1(\beta)$ для 2R=420 nm которая зависимая внешнее coupling $\sim \frac{\beta}{F_1(\beta)}$ (!)

действительно, для такого 2R=420 nm $H_n \sim F_1(\beta)$ значительно меньше H_n - micromag. Calc. и H_n - exp.

Надо считать $H_n^{coup}(\beta, d/R) - H_n^{isol} = M_s 4\pi \left[\mathbb{F}(\beta, d/R) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \right] - 4\pi \left[F(\beta) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \right] M_s = 4\pi \left[\mathbb{F}(\beta, d/R) - F(\beta) \right] M_s$

в dip-dip приближении:

$$\rightarrow \frac{H_n^{coup}}{M_s}(\beta, d/R) - \frac{H_n^{isol}}{M_s}(\beta) = 4\pi \left(\frac{N_d}{4\pi}\right) \sum_n \Phi(R_n) = \pi\beta \sum_n \left(\frac{R}{R_n}\right)^3 \left[1 - 3\cos^2(\varphi_{R_n} - \varphi_H)\right]$$

$$\frac{R}{R_n} = \frac{R}{\sqrt{n_1^2 T_x^2 + n_2^2 T_y^2}} = \frac{R}{T_y \sqrt{n_1^2 \xi^{-2} + n_2^2}} = \frac{R}{(2R+2R)\sqrt{(\cdot)}} = \frac{1}{4\sqrt{n_1^2/\xi^2 + n_2^2}}$$

$$\frac{1}{M_s} H_n^{coup}(\beta, d/R) - \frac{1}{M_s} H_n^{isol}(\beta) = \pi\beta \frac{1}{4^3} \sum_{\vec{n}} \frac{1}{\left(n_1^2 \xi^{-2} + n_2^2\right)^{3/2}} \left[1 - 3\frac{n_1^2}{n_1^2 + n_2^2 \xi^2}\right],$$

где зависимость от d сидит в $\xi = \xi(d) = \frac{2}{1 + \frac{1}{2}(d/R)}$, $d_y = 2R$ is fixed.

Т.е. инсталлация происходит в поле $H + H_{dip}^{Coupl} = H^{eff}$

$\vec{H}_{dip}^{coup} \parallel \langle \vec{M} \rangle \rightarrow W_m^{coupl} < 0$. Но условие инсталлации $H^{eff} = H_n^{isol}(\beta)$

$$H_n^{coupl} + H_{dip}^{coupl} = H_n^{isol} \rightarrow M_s \Delta h_n(d/R) = H_n^{Coupl}(d/R) - H_n^{isol} = -H_{dip}^{coup}(d/R)$$

$\Delta h_n(d/R) = -\frac{1}{M_s} H_{dip}^{coup}(d/R)$ - сдвиг H_n в array относительно $H^{coup}(d/R)$ одного диска ($n=0$) со всем ост. array (решетки дисков).

Rect. array, $d_y = 2R$, L=40 и 60 nm, R=210 nm																		
d/R	0	0.1	.2	3	4	5	6	7	8	9	1.0	1.1	12	13	14	15	16	17	18	20
Δh_n (d/R)	0.558	0,466	405	354	312	276	245	219	196	176	159	143	130	118	108	098	090	082	075	063
Δh_n (d/R)	0.358	0,310	270	236	208	184	163	146	130	117	106	096	087	079	072	065	060	055	050	042
Δh_n (d/R)	1.887	1.63	1,42	1,24	1,09	.965	857	765	685	616	.555	502	455	414	377	344	314	287	263	.221

$\frac{1}{\beta}\Delta h_n(\beta, d/R) = f(d/R)$ - только - универс. кривая в dip-dip приближении

Escaneado con CamScanner

Plan Memo

27/VII Date. Exchange energy transformations.

Тождество Грина $\oint_S \Phi \nabla\Phi \cdot d\vec{S} = \oint_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = \int_V dV \left[\Phi \nabla^2 \Phi + (\nabla\Phi)^2 \right]$

где скалярная функция $\Phi(\vec{r})$. Пусть $\Phi(\vec{r}) = m_\alpha(\vec{r})$

$$\oint_S dS\, m_\alpha \frac{\partial m_\alpha}{\partial n} = \int_V dV \left[m_\alpha \nabla^2 m_\alpha + (\nabla m_\alpha)^2 \right]$$

$\sum_{\alpha=x,y,z} (\cdot) \to$ $\oint_S dS\, \vec{m} \cdot \frac{\partial \vec{m}}{\partial n} = \int_V dV \left[\vec{m} \cdot \nabla^2 \vec{m} + \sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 \right]$.

только если $\left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial n}\right)_S \cdot \vec{m}(S) = 0$ (это выполн. для $\vec{m}^2 = 1$)

$\int dV \sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = - \int dV\, \vec{m} \cdot \nabla^2 \vec{m}$ (см. 26/VII)

Для 2D-случая $\vec{m}(\rho)$ $W_{ex} = \frac{C}{2} \int dV \sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = \frac{1}{2} CL \int_{xy} dS \sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2$

$\int dS = \int d^2\rho = \int dx\, dy = \int dS_z$. Проекция $\sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2$ как z-компоненту $\mathrm{rot}\,\vec{A}$. Тогда $\int dS_z (\mathrm{rot}\vec{A})_z = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$,

C – контур (граница) цилиндра.

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{m} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{m}) - \nabla^2 \vec{m}$$

$\mathrm{div}\,\vec{m} = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y}$, $\nabla \cdot m_\alpha = \vec{i} \frac{\partial m_\alpha}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial m_\alpha}{\partial y} = \mathrm{grad}\, m_\alpha$

$\mathrm{rot}\,\vec{m} = \vec{i}\left(\frac{\partial m_z}{\partial y}\right) + \vec{j}\left(-\frac{\partial m_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial m_y}{\partial x} - \frac{\partial m_x}{\partial y}\right)$

В сферич. координатах (для $\vec{m}$) $W_{ex} = \frac{C}{2}\left[(\nabla\theta)^2 + \sin^2\theta (\nabla\varphi)^2\right]$

$m_x = \sin\theta\cos\varphi$, $m_y = \sin\theta\cos\varphi$, $m_z = \cos\theta$

$m_x + i m_y = \sin\theta\, e^{i\varphi}$, $\frac{m_x + i m_y}{1 - m_z} = \frac{\sin\theta\, e^{i\varphi}}{1 - \cos\theta} = \mathrm{ctg}\frac{\theta}{2} e^{i\varphi}$ =

$m^+ = m_x + i m_y = \frac{2w(z,\bar{z})}{1 + |w|^2}$, $m_z = \frac{1 - |w|^2}{1 + |w|^2}$. $w(z,\bar{z}) = \begin{cases} f(z), & |f|<1 \\ 1/f(z), & |f|>1 \end{cases}$

$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) w = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv) = \frac{1}{2}\mathrm{div}\,\vec{m} + \frac{i}{2}(\mathrm{rot}\,\vec{m})_z$

$W_{ex} = -\frac{C}{2} \int dV\, \vec{m} \cdot \nabla^2 \vec{m} = -\frac{1}{2} CL \int dS\, \vec{m} \cdot \nabla^2 \vec{m}$ · если $\vec{m} \neq f(z)$.

$\vec{m} \cdot \nabla^2 \vec{m} = m_x \nabla^2 m_x + \ldots = (\mathrm{rot}\,\vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$ (для $\mathbb{R}^2$ по S_z)

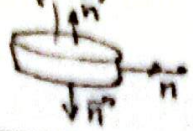
Вспом. $\mathrm{div}(\vec{m} \times \mathrm{rot}\,\vec{m} + \vec{m}\,\mathrm{div}\,\vec{m}) = \mathrm{div}(\vec{m} \times \mathrm{rot}\,\vec{m}) + \mathrm{div}(\vec{m}\,\mathrm{div}\,\vec{m}) =$

$= -\vec{m} \cdot \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{m} + \mathrm{rot}\,\vec{m} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{m} + (\mathrm{div}\,\vec{m}) \cdot \mathrm{div}\,\vec{m} + \vec{m} \cdot \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{m} =$

$= (\mathrm{rot}\,\vec{m})^2 + (\mathrm{div}\,\vec{m})^2 + \vec{m} \cdot \left[\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{m} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{m}\right] =$

$= (\mathrm{rot}\,\vec{m})^2 + (\mathrm{div}\,\vec{m})^2 + \vec{m} \cdot \nabla^2 \vec{m} = (\mathrm{rot}\,\vec{m})^2 + (\mathrm{div}\,\vec{m})^2 - \sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2$

Escaneado con CamScanner



Memo

$\sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = (\mathrm{rot}\,\vec m)^2 + (\mathrm{div}\,\vec m)^2 - \mathrm{div}\left[\vec m \times \mathrm{rot}\,\vec m + \vec m \cdot \mathrm{div}\,\vec m\right]$, $\vec m^2 = 1$.

$\int dV \sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = \int dV \left[(\mathrm{rot}\,\vec m)^2 + (\mathrm{div}\,\vec m)^2\right] - \oint_{S_\Omega} \left[\vec m \times \mathrm{rot}\,\vec m + \vec m\,\mathrm{div}\,\vec m\right] \cdot d\vec S$

$\int dV \,\mathrm{div}[\dots] = \int dV \left[(\mathrm{rot}\,\vec m)^2 + (\mathrm{div}\,\vec m)^2\right] - \oint_{S_\Omega} \left[\vec m \times \mathrm{rot}\,\vec m + \vec m\,\mathrm{div}\,\vec m\right] \cdot d\vec S$

$\int_{S_\Omega} \sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = L \int dS_z \left[(\nabla \times \vec m)^2 + (\nabla \cdot \vec m)^2\right] - \int_{S_{\text{бок}}} dS\, \vec n \cdot \left[\vec m \times \nabla \vec m + \vec m\, a \vec m\right]$

$\left\{ \int d^2\rho\, \hat z \cdot [\dots]_{+\frac{L}{2}} + \int d^2\rho\, (-\hat z)\,[\dots]_{-\frac{L}{2}} \right\} = \left| \begin{array}{l} \{\dots\} = 0, \text{ т.к.} \\ [\dots] \text{ от } z \text{ не зависит.} \\ dS_{\text{бок}} = dz\,dl \end{array} \right|$

$S_{\text{торц. верх}},\ \vec n = \hat z$; $S_{\text{торц. нижн}},\ \vec n = -\hat z$

$\int_{S_\Omega} \sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = L \int dS_z \left[(\mathrm{rot}\,\vec m)^2 + (\mathrm{div}\,\vec m)^2\right] - L \int_C dl \left[\vec n \cdot \vec m \times \mathrm{rot}\,\vec m + (\vec n \cdot \vec m)\,\mathrm{div}\,\vec m\right]$

C - контур бок. поверхности цилиндра ($dl = R\,d\varphi$ для круглого цил.)

$\int_{S_\Omega} \sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2 = \int dS_z \left[(\mathrm{rot}\,\vec m)^2 + (\mathrm{div}\,\vec m)^2\right] - \int_C dl \left[\vec n \cdot \vec m \times \mathrm{rot}\,\vec m + (\vec n \cdot \vec m)\,\mathrm{div}\,\vec m\right]$

Нет зависимости $\vec m(t)$ от z

$(\mathrm{rot}\,\vec m)^2 = |\text{в мезоне}| = \left(\frac{\partial m_y}{\partial x} - \frac{\partial m_x}{\partial y}\right)^2 = \left(2\,\mathrm{Im}\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$

$(\mathrm{div}\,\vec m)^2 = \left(2\,\mathrm{Re}\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$, $m^+ = m_x + i m_y$

$(\mathrm{rot}\,\vec m)^2 + (\mathrm{div}\,\vec m)^2 = \left(2\,\mathrm{Re}\frac{\partial m^+}{\partial z}\right)^2 + \left(2\,\mathrm{Im}\frac{\partial m^+}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial m_z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial m_z}{\partial x}\right)^2 =$

$= 4\left|\frac{\partial m^+}{\partial z}\right|^2 + \left(\frac{\partial m_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial m_z}{\partial y}\right)^2 = 4\left|\frac{\partial m^+}{\partial z}\right|^2 + 4\left|\frac{\partial m_z}{\partial z}\right|^2 =$

$= 4\left|\frac{\partial m^+}{\partial z}\right|^2 + 4\left|\frac{\partial m_z}{\partial z}\right|^2$

В мезоне, $m_z = 0$, $|w| = 1$, $m^+ = w$: $(\mathrm{rot}\,\vec m)^2 + (\mathrm{div}\,\vec m)^2 = 4\left|\frac{\partial w}{\partial z}\right|^2$

В солитоне, $w(z\bar z) = f(z)$: $(\mathrm{rot}\,\vec m)^2 + (\mathrm{div}\,\vec m)^2 = \dots$

$\frac{\partial m^+}{\partial z} = 2\frac{\partial}{\partial z}\frac{f(z)}{1 + f(z)\bar f(\bar z)} = 2\frac{f'}{1+|f|^2} + 2f(z)\frac{(-1)}{(1+|f|^2)^2}\bar f(\bar z) f'(z) =$

$= \frac{2f'(z)}{(1+|f|^2)^2}\left[1 + |f|^2 - |f|^2\right] = \frac{2f'(z)}{(1+|f|^2)^2}$

$\frac{\partial m_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1 - f\bar f}{1 + f\bar f}\right) = \frac{-\bar f \cdot f'(z)(1 + f\bar f) - (1 - f\bar f)\bar f f'(z)}{(1+|f|^2)^2} =$

$= \frac{-2\bar f f'(z)}{(1+|f|^2)^2} \Rightarrow (\mathrm{rot}\,\vec m)^2 + (\mathrm{div}\,\vec m)^2 = 4\frac{4|f'|^2}{(1+|f|^2)^4} + 4\frac{4|f|^2|f'|^2}{(1+|f|^2)^4} =$

$= 16\frac{|f'(z)|^2}{(1+|f|^2)^3}$ — в солитоне сложно. Солитон лучше учитывать через $\nabla^2 \vec m$.

Escaneado con CamScanner

Quadratic model — 1 + ...

Plan Memo

22/III $\nu^2 m^1 = \nu^2 \frac{2f(\theta)}{1+|\xi|^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar z}\frac{2f(\theta)}{1+f(\theta)f(\theta)} = 4f(\theta)\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}\frac{1}{1+f(\theta)f(\theta)}$

Dato. $= 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar z}\frac{1}{1+f\bar f} = 4\frac{\partial}{\partial z}\left[f\frac{(-1)}{(1+f\bar f)^2}\frac{\partial f(\bar\theta)}{\partial\bar z}\right] = -4f'(\theta)\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{(1+f\bar f)}$

$= -4f'(\theta)\frac{2f\bar f'(1+f\bar f)^2 - f^2\bar f'(1+f\bar f)}{(1+f\bar f)^4} = -4f'\bar f'\frac{1}{(1+f\bar f)^3}$

$= -16\frac{f(\theta)|f'|^2}{(1+f\bar f)^3}$ — на кривата.

Т. е. бивалентна в 2D сингулярна интегрална теорема (Cauchy-Pompeiu) за W_{ef} в областите непрекъснати на тази крива, дадена параметрично $w(t,\bar t) = f(t)$ и гладка функция $u(z,\bar z)$:

$$\iint_D \frac{\partial u(z,\bar z)}{\partial \bar z}\,dx\,dy = -\frac{i}{2}\oint_{\partial D} u(\zeta,\bar\zeta)\,d\zeta$$

$w(z,\bar z) = \ln\frac{z}{\bar z}$

Следствие: Вписване на квадратичен модел

$z \to z' = z + \frac{1}{a^2}(a - \bar a z^2)$, $f(z) = \frac{1}{c}\left(iz + \frac{1}{2}(a - \bar a z^2)\right)$ Ca, JAVA JEAC

Сл. чрез квадратичен модел от 22-23/III

$$E_{ef} = 2\pi\left[2 - \ln c - \ln\frac{2}{1+\sqrt{1-a^2}}\right],\quad c = R/R_0.$$

В общ. сл. нагр. $\times\left(\frac{1}{2}LC\right) = \frac{1}{2}L_0 R_0^2 M_s^2 \to W_{ef} = \frac{1}{2}LC\,2\pi[\dots] = \pi L R_0^2 M_s^2$

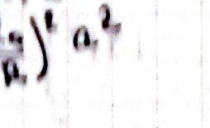
$\to W_{ef} = \frac{1}{(\pi R^2 L)M_s^2} W_{ef} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2\left[2 - \ln c - \ln\frac{2}{1+\sqrt{1-a^2}}\right]$, $a \le 1$

$$\ln\frac{2}{1+\sqrt{1-a^2}} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \ln\left[1 - a\sin\varphi\right] = +\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\left[-a\sin\varphi - \frac{1}{2}a^2\sin^2\varphi + O(a^4)\right] = +\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}a^2\pi = \frac{1}{4}a^2$$

$\ln(1+\gamma) = \gamma - \frac{1}{2}\gamma^2$

$\Rightarrow W_{ef}(a) = W_{ef}(0) - \frac{1}{4}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 a^2$

Нули $f(z) = \frac{i}{2}i$ (квадратен модел)



а-ва, z_1, z_2 — корени на характеристичното уравнение при $z' = z_1$ и $z = z_2$, $z_{1,2} = \frac{i}{a}\left[1 \pm \sqrt{1-a^2}\right]$

При $a \to 0$ $z_1 \approx i\frac{a}{2}$, $z_2 = i\frac{2}{a}$. Инверсия $z_1 z_2^* = 1$

→ Доп. Уд.: $z_1 z_1^* = \frac{1}{a^2}\left[1 - \sqrt{(\cdot)}\right]\left[1 + \sqrt{(\cdot)}\right] = 1$ — инверсия спрямо единична окръжност

Тогава чрез a_{ef} кв. конформ. модел $f(z)$ за инверсия единична окръжност = антиконформно

$f(z) = -\frac{a}{2c}(z - z_1)(z - z_2)$ за $\forall a \in \Omega$.

квадратен модел

Plan Memo

$\rightarrow W_m^{vol} = \frac{W_m^{vol}}{M_s^2 V} = 2\pi a^2 F_1^V(\beta)$, $F_1^V(\beta) = \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(\beta k)\left[\int_0^1 d\rho\rho J_1(k\rho)\right.$

note.

Надо только найти W_H (для χ - расчет).

$\langle m_x\rangle = \frac{1}{S_d}\int_{S_d} d^2\vec{\rho}\; m_x(\vec{\rho})$. Считаем, что "core" не дает вклада (или его вклад пренебрежимо мал) и "занимаем ... "soliton" на меron".

$W = W(z,\bar z) = \frac{f(z)}{|f(z)|} = \frac{iz + \frac{1}{2}a(1-z^2)}{\sqrt{\left[iz+\frac{a}{2}(1-z^2)\right]\left[-i\bar z + \frac{a}{2}(1-\bar z^2)\right]}} =$

$= \frac{iz + \frac{a}{2}(1-z^2)}{\sqrt{z\bar z - i\bar z\frac{a}{2}(1-z^2) + iz\frac{a}{2}(1-\bar z^2) + \frac{a^2}{4}(1-z^2)(1-\bar z^2)}} = |\text{с точн. до } a| =$

$= \frac{iz}{\sqrt{\rho^2 + a\rho(1+\rho^2)\sin\varphi}} + \frac{\frac{a}{2}(1-z^2)}{\rho} = \frac{iz}{\rho}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a}{\rho}(1+\rho^2)\sin\varphi}} + \frac{a}{2\rho}(1-z^2) =$

$= \frac{iz}{\rho}\left[1 + \frac{a}{2\rho}(1+\rho^2)\sin\varphi\right] + \frac{a}{2\rho}\left(1 - \rho^2 e^{i2\varphi}\right)$

$m_x(\vec\rho) = \mathrm{Re}\, W = \mathrm{Re}\,\frac{i\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{\rho}\left[1 + \frac{a}{2\rho}(1+\rho^2)\sin\varphi\right] +$

$+ \frac{a}{2\rho}(1 - \rho^2\cos 2\varphi) = -\sin\varphi - \frac{a}{2\rho}(1+\rho^2)\sin^2\varphi + \frac{a}{2\rho}(1-\rho^2\cos 2\varphi) =$

$= -\sin\varphi + \left(\frac{1}{4}\frac{a}{\rho}\right) - \frac{1}{4}a\rho + (\text{terms}\cdot\cos 2\varphi)$

сингулярность, но интегрируемая

$\langle m_x\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^1 d\rho\rho\int_0^{2\pi} d\varphi\left[-\sin\varphi + \frac{1}{4}\frac{a}{\rho} - \frac{1}{4}a\rho + (\text{terms}\cdot\cos 2\varphi) + O(a^2)\right] =$

$= \frac{1}{4}2a\int_0^1 d\rho\rho\left(\frac{1}{\rho} - \rho\right) = \frac{1}{2}a\int_0^1 d\rho(1-\rho^2) = \frac{1}{2}a\left[1 - \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3}a.$ члены в $\sin 2\varphi$

$\langle m_y\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2\vec\rho\left\{\mathrm{Im}\, i(\cos\varphi + i\sin\varphi)\left[1 + \frac{a}{2\rho}(1+\rho^2)\sin\varphi\right] + \frac{a}{2\rho}(-\rho^2)\sin 2\varphi\right\} =$

$= \frac{1}{\pi}\int d\rho\rho\int_0^{2\pi} d\varphi\left\{\cos\varphi + \frac{a}{2\rho}(1+\rho^2)\cos\varphi\sin\varphi - \frac{1}{2}a\rho\sin 2\varphi\right\} = 0.$

$\rightarrow W(a) = W_{ex}(a) + W_m^{vol}(a) + W_H(a) = W_{ex}(0) - \frac{1}{4}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 a^2 +$

$+ 2\pi a^2 F_1^V(\beta) - h_x\langle m_x\rangle = W(0) + \left[2\pi F_1^V - \frac{1}{4}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\right]a^2 - \frac{1}{3}ha$

$W(a) = W(0) + \frac{1}{2}Ba^2 - \frac{1}{3}ha$, $B = 4\pi F_1^V(\beta) - \frac{1}{2}(R_0/R)^2$

$\frac{\partial W}{\partial a} = Ba - \frac{1}{3}h = 0$, $a_0 = \frac{1}{3B}h$, $\langle m_x\rangle = \frac{1}{3}a_0 = \frac{1}{9B}h$

$\chi(0) = \frac{\partial\langle m_x\rangle}{\partial h} = \frac{1}{9B} = \frac{1}{9}\frac{1}{\left[4\pi F_1^V(\beta) - \frac{1}{2}(R_0/R)^2\right]}$ — вычисление в квадр. модели

Escaneado con CamScanner

2.9/VII

Plan Memo

Date.

χ - quadratic model of Voltage dipole

$\chi^{-1}_{qu} \approx 9.4\pi F_1^V(\beta)$ или при $\beta \ll 1$ $F_1^V(\beta) \approx \alpha\beta$, $\alpha = 0,088$

$\chi^{-1}_{qu} \approx 9.4\pi \cdot \alpha\beta$. Тогда как дает "дипольная" модель

Было $\chi^{-1}_{dip} \approx 2\beta\left[\ln\frac{2}{\beta} - 1/2\right]$, что хорошо верно при $\beta \ll 1$.

Оказалось $\chi^{-1}_{qu}(\beta) \approx \chi^{-1}_{mig}(\beta)$ при $\beta \le 0.1$



Но МСД плохо считает $\int_0^\infty dk(\dots)$ в χ^{-1}_{qu}.

Расчет $\chi_{qu}(\beta)$ надо проверить. Хотя бы при $\beta \ll 1$.

$$\to F_1^V(\beta) = \int_0^\infty \frac{dk}{k} f(\beta k) F_2^2(k), \quad F_2(k) = \int_0^1 d\beta\,\beta J_1(k\beta),$$

где $f(x) = 1 - \frac{1}{x}(1-e^{-x})$. $F_2(k) = \frac{1}{k^2}\int_0^k dx\, x J_1(x)$, $k\beta = x$.

Или $k\beta = z$, $k = \frac{z}{\beta}$ $F_1^V(\beta) = \int_0^\infty \frac{dz}{z} f(z) F_2^2\left(\frac{z}{\beta}\right)$ и $\int_0^1 dz(\dots) + \int_1^\infty dz(\dots)$

Здесь $F_2(k) = \int_0^1 d\beta\,\beta J_1(k\beta) = \left|\begin{matrix}6.561\\ \text{гр.р.}\end{matrix}\right| = \frac{1}{k}\pi^{1/2}\Gamma(3/2)\left[J_1(k)H_0(k) - H_1(k)J_0(k)\right]$

где $H_\nu(z)$ - функция Струве (Struve).

$$H_\nu(z) = \frac{2(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^{\pi/2} d\varphi\,\sin(z\cos\varphi)\sin^{2\nu}\varphi.$$

при $k \ll 1$: $H_0(k) \approx \left(\frac{k}{2}\right)\frac{1}{[\Gamma(3/2)]^2}$; $H_1(k) \approx \left(\frac{k}{2}\right)^2 \frac{1}{\Gamma(3/2)\Gamma(5/2)}$

при $k \gg 1$: $H_\nu(k) \approx N_\nu(k) + O\left(\frac{1}{k^{3-\nu}}\right)$

$$N_\nu(k) \approx \sqrt{\frac{2}{k\pi}}\sin\left(k - (\nu+\tfrac{1}{2})\tfrac{\pi}{2}\right), \quad k \gg 1.$$

$$\left[J_1(k)H_0(k) - H_1(k)J_0(k)\right] \underset{k\gg1}{\approx} \left[J_1\left\{N_0(k) + O\left(\tfrac{1}{k^2}\right)\right\} - J_0\left\{N_1(k) + \right.\right.$$

$$= J_1(k)N_0(k) - J_0(k)N_1(k) + O\left(\tfrac{1}{k^{5/2}}\right) = \left|\text{см. формулы}\right|$$

$$= \frac{2}{\pi k} + O\left(\frac{1}{k^{5/2}}\right)$$

$$F_1^V(\beta) = \int_0^{10} \frac{dk}{k} f(\beta k) F_2^2(k) + \int_{10}^\infty \frac{dk}{k} f(\beta k) F_2^2(k) =$$

$$= \int_0^{10} \frac{dk}{k} f(\beta k) F_2^2(k) + \int_{10\beta}^\infty \frac{dz}{z} f(z) F_2^2\left(\frac{z}{\beta}\right) = \int_0^{k_m} dk(\dots) + \int_{k_m\beta}^\infty \frac{dz}{z} f(z) F_2^2\left(\frac{z}{\beta}\right)$$

($k_m \ge 1$ - нерегул. п. определения)

Plan Memo

$k_m z \gg 1$ нужно разложить $J_2, N_2(k)$ во второй интегр.

$$F_1^V(\beta) = \int_0^{k_m} \frac{dk}{k}(\dots) + \int_{k_m}^{\infty} \frac{dk}{k} f(\beta k) F_2^2(k) \equiv \int_0^{k_m} dk(\dots) +$$

$$+ \int_{k_m}^{\infty} \frac{dk}{k} f(\beta k) \left[\frac{4}{\pi^2 k^2} + O(1/k^{7/2})\right] \frac{1}{k^2} \pi \left[\Gamma(3/2)\right]^2, \quad \Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$I(k_m) \int_{k_m}^{\infty} \frac{dk}{k} f(\beta k) \frac{1}{k^4} = \int_{k_m}^{\infty} \frac{dk}{k^5} \left\{1 - \frac{1}{\beta k}(1 - e^{-\beta k})\right\} =$$

$$= \int_{k_m}^{\infty} \frac{dk}{k^5} - \frac{1}{\beta} \int_{k_m}^{\infty} \frac{dk}{k^6} + \frac{1}{\beta} \int_{k_m}^{\infty} \frac{dk}{k^6} e^{-\beta k} = \frac{1}{4}\frac{1}{k_m^4} - \frac{1}{\beta}\frac{1}{5}\frac{1}{k_m^5} + \frac{1}{\beta}\int_{k_m}^{\infty} \frac{dk}{k^6} e^{-\beta k}$$

$$\int_{k_m}^{\infty} \frac{dk}{k^6} e^{-\beta k} = \left|\beta k = x\right| = \beta^5 \int_{k_m\beta}^{\infty} \frac{dx}{x^6} e^{-x} = \beta^5(\dots) = k_m^{-5}\Gamma(-5, \beta k_m)$$

$\Gamma(a, x)$ – неполная Γ-функция. Какое βk_m взять?

а) пусть $k_m\beta \gg 1$ – для реальных $\beta > 0{,}01$, $k_m \geq 100$.

б) Если $k_m\beta \ll 1$ – это строгий предел $\beta \to 0$.

$$\Gamma(-5, x) \underset{x \gg 1}{\approx} x^{-6} e^{-x}\left[\frac{\Gamma(6)}{\Gamma(6)} \cdot 1 - \frac{\Gamma(7)}{\Gamma(6)}\frac{1}{x} + O(1/x^2)\right] \approx$$

$$\approx \frac{1}{x^6} e^{-x}$$

$$а) I(k_m) = \frac{1}{4}\frac{1}{k_m^4} - \frac{1}{5}\frac{1}{\beta}\frac{1}{k_m^5} + \frac{1}{\beta} k_m^{-5} \frac{1}{\beta^6 k_m^6} e^{-\beta k_m} =$$

$$= \frac{1}{k_m^4}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\frac{1}{\beta k_m}\right) + \frac{1}{k_m^4}\frac{1}{(\beta k_m)^7} e^{-\beta k_m}, \quad \beta k_m \gg 1.$$

$$\to F_1^V(\beta) = \int_0^{k_m} \frac{dk}{k} f(\beta k) F_2^2(k) + 1 \cdot I(k_m) = \int_0^{k_m} dk(\dots) + \frac{1}{4k_m^4}\left(1 - \frac{4}{5}\frac{1}{k_m\beta}\right),$$

$k_m\beta \gg 1$.

Если стремить $\beta \to 0$ так, что $\beta k_m \ll 1$, то I_m – иначе

$$\Gamma(-5, x) \underset{(x \ll 1)}{=} -\frac{1}{5!}\left[-\mathrm{Ei}(-x) - e^{-x}\sum_{m=0}^{4}(-1)^m \frac{m!}{x^{m+1}}\right]$$

$$\mathrm{Ei}(-x) \underset{0 < x \ll 1}{=} \mathbb{C} + \ln x + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s x^s}{s \cdot s!} = \mathbb{C} + \ln x - x + \frac{x^2}{4} + O(x^3)$$

Надо $\int_{k_m}^{\infty} \frac{dk}{k^6} e^{-\beta k} = \left|k\beta = x\right| = \beta^5 \int_{k_m\beta}^{\infty} \frac{dx}{x^6} e^{-x} = \beta^5 (k_m\beta)^{-5}\Gamma(-5, \beta k_m) =$

$$= k_m^{-5}\Gamma(-5, \beta k_m)$$

$$\to I(k_m) = \int_{k_m}^{\infty} \frac{dk}{k^5} f(\beta k) = \beta^4 \int_{\beta k_m}^{\infty} \frac{dx}{x^5} f(x) = \beta^4 \int_{\beta k_m}^{\infty} \frac{dx}{x^5}\left[1 - \frac{1}{x}(1 - e^{-x})\right]$$

Чисто рассм. предел $k_m\beta \gg 1$, $I(k_m) \approx \frac{1}{4k_m^4}\left(1 - \frac{4}{5}\frac{1}{k_m\beta}\right)$.

Сложнее $\beta k_m \ll 1 \to 0$.

Escaneado con CamScanner

$I(k_m) = \frac{1}{4k_m^4} - \frac{1}{5}\frac{1}{k_m^4}(\beta k_m) + \beta^4 \Gamma(-5, \beta k_m)$

Plan Memo

Date

$I(k_m) = \beta^4 \int_{k_m\beta}^{\infty} \frac{dx}{x^5}\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \beta^4 \int_{\beta k_m}^{\infty} \frac{dx}{x^5} e^{-x} = \frac{1}{4k_m^4}\left(1 - \frac{4}{5}\frac{1}{k_m\beta}\right) +$

$+ \beta^4 \cdot \int_{\beta k_m}^{\infty} \frac{dx}{x^5} e^{-x} = (\dots) + \beta^4 \cdot (k_m\beta)^{-5}\,\Gamma(-5, \beta k_m)$

$\Gamma(a,x)$ – гамма-функция Лежандра

$\int_u^{\infty} x^{\lambda-1} e^{-\mu x}\, dx = |\mu x = z| = \int_{\mu u}^{\infty} \frac{dz}{\mu}\, \mu^{1-\lambda} z^{\lambda-1} e^{-z} = \mu^{-\lambda}\int_{\mu u}^{\infty} dz\, z^{\lambda-1} e^{-z} =$

$= \mu^{-\lambda}\Gamma(\lambda, \mu u)$ и в 3.238(3) у Гр.-Р. опечатка (надо u^{ν})

Вернемся к $I(k_m)$.

а) $\beta k_m \gg 1$: $\Gamma(-5, \beta k_m) \approx \frac{1}{(\beta k_m)^6} e^{-\beta k_m}$

$I(k_m) = \frac{1}{4k_m^4}\left(1 - \frac{4}{5}\frac{1}{\beta k_m}\right) + \beta^4 \frac{1}{(\beta k_m)^6} e^{-\beta k_m} =$

$= \frac{1}{4k_m^4}\left(1 - \frac{4}{5}\frac{1}{\beta k_m}\right) + \frac{1}{k_m^4}\frac{1}{(\beta k_m)^2} e^{-\beta k_m} \approx \frac{1}{4k_m^4}\left(1 - \frac{4}{5}\frac{1}{\beta k_m}\right)$

– не изменился, т.к. ошибка в $\Gamma(-5, \beta k_m)$ не сказалась

б) $\beta k_m \ll 1$: $x = \beta k_m$ $\quad \Gamma(-5, x) \equiv -\frac{1}{5!}\left[-C - \ln x + x - \dots - \right.$

$\left. - e^{-x}\sum_{m=0}^{4}(-1)^m \frac{m!}{x^{m+1}}\right]$

$I(k_m) = \frac{1}{4k_m^4} - \frac{1}{5k_m^4}\frac{1}{\beta k_m} + \beta^4 \frac{(-1)}{5!}\left[-C - \ln(k_m\beta) - \right.$

$\left. - \frac{e^{-\beta k_m}}{(k_m\beta)}\sum_{m=0}^{4}(-1)^m \frac{m!}{\beta^m (k_m)^m}\right] = \frac{1}{4k_m^4} - \frac{1}{5k_m^4}\frac{1}{(k_m\beta)} + \frac{1}{5!} e^{-\beta k_m}\frac{1}{(k_m\beta)^4} \times$

$\times \beta^4 \sum_{n=0}^{4}(-1)^n \frac{n!}{\beta^n k_m^n} = \frac{1}{4k_m^4} - \frac{1}{5k_m^4}\frac{1}{(k_m\beta)} + \frac{1}{5!} e^{-\beta k_m} \beta^4 \times$

$\times\left[1 - \frac{1}{\beta k_m} + \frac{2!}{\beta^2 k_m^2} - \frac{3!}{\beta^3 k_m^3} + \frac{4!}{\beta^4 k_m^4}\right]\frac{1}{(k_m\beta)} =$

$= \frac{1}{4k_m^4} - \frac{1}{5k_m^4}\frac{1}{(k_m\beta)} + \frac{1}{5!} e^{-\beta k_m}\frac{1}{(k_m\beta)}\frac{1}{k_m^2}\left[2\beta^2 - 6\beta\frac{1}{k_m} + \frac{4!}{k_m^2}\right] =$

$= \frac{1}{k_m^4}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\frac{1}{k_m\beta} + \frac{1}{5!} e^{-\beta k_m}\frac{1}{(k_m\beta)}\left\{4! - 6(\beta k_m) + 2\beta^2 k_m^2\right\}\right]$

$e^{-\beta k_m}(4! - 6x + 2x^2) = \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)(4! - 6x + 2x^2) = \quad |\beta x^2|$

$= 4! - 6x + 2x^2 - 4!x + 6x^2 + \frac{x^2}{2}4! = 4! - 30x + 20x^2$

Escaneado con CamScanner

$5! = 24 \cdot 5$

plan Memo

$$I(k_m) = \frac{1}{k_m^4}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\frac{1}{x} + \frac{1}{5!\,x}\left(4! - 30x + 20x^2\right)\right]_{x = k_m\beta \ll 1} \approx$$

$$\approx \frac{1}{k_m^4}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\frac{1}{x} - \frac{1}{4}x^0 + \frac{20}{5!}x + O(x^2)\right] = \frac{1}{k_m^4}\frac{1}{6}(k_m\beta)$$

$$F_1^V(\beta) = \int_0^{k_m} \frac{dk}{k} S(\beta k) F_2^2(k) + \underbrace{I(k_m)}_{\text{остаточ. член}}, \quad I(k_m) = \frac{1}{k_m^4} \cdot \begin{cases} \frac{1}{6}(k_m\beta), & k_m\beta \ll 1 \\ \frac{1}{4}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{1}{k_m\beta}\right), & k_m\beta \gg 1 \end{cases}$$

(ошибка $\sim 1/k_m^{1/2}$) по $k_m \gg 1$.

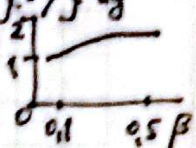
Если $k_m\beta \ll 1$, то $S(\beta k) \approx \frac{1}{2}\beta k$

$$\frac{1}{\beta}F_1^V(\beta) = \frac{1}{2}\int_0^{k_m} dk\, F_2^2(k) + \frac{1}{6}\frac{1}{k_m^3} \approx 0{,}0883 \text{ (НСВО)}$$ при $k_m = 100$.

$I(k_m, \beta)$ — остаточ. член обрезания $\int_0^\infty dk(\ldots) \to \int_0^{k_m} dk(\ldots)$, $k_m \gg 1$.

(обознач. с лекц.).

Вывод: $\frac{\gamma_{zig}(\beta)}{\gamma_{qu}(\beta)} = 1.2 \div 1.5$ для $\beta = 0{,}1 \div 0{,}5$



Для типичных $\beta = 0{,}1 \div 0{,}5$ γ_{zig} немного больше (~ 20–50%), чем $\gamma_{qu}(\beta)$. Различие растет с β.

При $\beta < 0{,}05$ можно считать γ_{zig} и γ_{qu} одинаковыми.

Здесь γ_{qu} — вспомним. quadratic model (sharp charges blur).

30/VII → Надо проверить Косши вывод W_m^{vol} в quadratic model (JMMM–JEMS'01, submitted).

→ Но $\gamma(0)$ определяет частоту круговых колебаний центра vortex'a и γ_{qu} дает немного большую частоту, ($\omega_0 \sim \frac{1}{\gamma}$) чем γ_{zig} "rigid" vortex модели → это не так. Частоту определяет не γ, а возвращающая сила $F = -\frac{\partial W}{\partial s}$.

Проверка вывода W_m^{vol} of quadr. model.

$$\operatorname{div}\vec{m} = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial m^+}{\partial z} = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2w}{1+|w|^2}\right) = \left|\text{вне "core", } |w|^2 = 1\right| =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial W}{\partial z} = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial}{\partial z}\frac{f(z)}{|f(z)|}, \quad W(z) = \frac{\frac{1}{c}\left[iz + \frac{q}{2}(1-z^2)\right]}{\sqrt{\frac{1}{c^2}\left[iz + \frac{q}{2}(1-z^2)\right]\left[-i\bar{z} + \frac{q}{2}(1-\bar{z}^2)\right]}} =$$

$$= \frac{iz + \frac{q}{2}(1-z^2)}{\sqrt{|z|^2 + \frac{q}{2}(1-z^2)(\ldots) - \ldots}}$$

Escaneado con CamScanner

$z - \bar{z} = \rho(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = 2i\rho\sin\varphi$

Plan Memo

$c^2|f(z)|^2 = \left[iz + \frac{a}{2}(1-z^2)\right]\left[-i\bar{z} + \frac{a}{2}(1-\bar{z}^2)\right] = |z|^2 +$

Date. $+ \frac{a}{2}(1-\bar{z}^2)iz - i\bar{z}\frac{a}{2}(1-z^2) + O(a^2) =$

$= \rho^2 + i\frac{a}{2}\left[z - |z|^2\bar{z} - \bar{z} + |z|^2 z\right] = \rho^2 + i\frac{a}{2}\left[z - \bar{z} + |z|^2(z-\bar{z})\right]$

$= \rho^2 + i\frac{a}{2}(\rho^2+1)(z-\bar{z}) = \rho^2 + i\frac{a}{2}(1+\rho^2)\,2i\rho\sin\varphi =$

$= \rho^2 + (-1)a\rho(1+\rho^2)\sin\varphi$

$\frac{1}{c|f(z)|} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - a\rho(1+\rho^2)\sin\varphi}} = \frac{1}{\rho}\frac{1}{\sqrt{1 - a(\rho+\frac{1}{\rho})\sin\varphi}} \approx$

$\approx \frac{1}{\rho}\left[1 + \frac{a}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi\right]$

$w(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|} = \frac{iz + \frac{a}{2}(1-z^2)}{c|f|} = \left[iz + \frac{a}{2}(1-z^2)\right]\frac{1}{\rho}\left[1 + \frac{a}{2}(\rho+\frac{1}{\rho})\sin\varphi\right]$

$= \frac{1}{\rho}\left[iz + \frac{a}{2}(1-z^2) + iz\frac{a}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi\right]$ — нужно так.

$w(z,\bar{z}) = \frac{f(z)}{\sqrt{f(z)\,f(\bar{z})}} = \sqrt{\frac{f(z)}{f(\bar{z})}}$. $f(z) = \frac{1}{c}\left[iz + \frac{a}{2}(1-z^2)\right]$

$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{f(\bar{z})}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{f(z)}}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{1}{|f(z)|}\frac{1}{c}\left[i - az\right]$

$\operatorname{div}\vec{m} = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial w}{\partial z} = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{2}\frac{1}{c|f(z)|}\left[i - az\right] = |a - \text{без.}|$

$= \frac{1}{c|f(z)|}(-a)\rho\cos\varphi \approx \frac{-a\rho\cos\varphi}{\rho} = -a\cos\varphi$

$\frac{\partial}{\partial z} \to \frac{1}{R}\left(\frac{\partial}{\partial \frac{z}{R}}\right)$ — безразмер. переменная $z = \frac{x+iy}{R}$ как у меня

В размерных переменных $\operatorname{div}\vec{m} = -\frac{a}{R}\cos\varphi$ $\int_0^L dz dz' e^{-k|z-z'|} = \frac{2L}{k}$ для

$W_m^{vol} = \frac{1}{2}M_s^2\int_{V_d} d^3r \int_{V_d} d^3r' \frac{\operatorname{div}\vec{m}(r)\cdot\operatorname{div}\vec{m}(r')}{|r-r'|} =$

$= \frac{1}{2}\frac{a^2}{R^2}M_s^2\int_0^L dz dz' \int d^2\rho \int d^2\rho' \int_0^\infty dk\, e^{-k|z-z'|} J_0(k|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|)\cos\varphi\cos\varphi' =$

$= \frac{1}{2}\frac{a^2}{R^2}M_s^2 2L \int d^2\rho\, d^2\rho' \int \frac{dk}{k} f(kL)\cos\varphi\cos\varphi' \sum_\mu e^{i\mu(\varphi-\varphi')} J_\mu(k\rho) J_\mu(k\rho')$

$\int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi\, e^{i\mu\varphi} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\,(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})e^{i\mu\varphi} = \pi(\delta_{\mu,1} + \delta_{\mu,-1})$.

Escaneado con CamScanner

$$W_m^{vol} = \frac{a^2}{R^2} L M_s^2 \int_0^R d\rho\,\rho \int_0^R d\rho'\,\rho' \int \frac{dk}{k} f(kL) \sum_\mu J_\mu J_\mu(\cdot)\, \pi^2 (\delta_{\mu,1}+\delta_{\mu,-1})(\delta_{\mu,1}+\delta_{\mu,-1}) =$$

$$= M_s^2 \frac{a^2}{R^2} \pi^2 L \int d\rho\,\rho \int d\rho'\,\rho' \int \frac{dk}{k} f(kL)\; 2 J_1(k\rho) J_1(k\rho') = \left| \begin{array}{l} c \to 0 \\ \text{корни преобраз.} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{a^2}{R^2} 2\pi^2 L M_s^2 \int \frac{dk}{k} f(kL) \int_0^R d\rho\,\rho\, J_1(k\rho) \cdot \int_0^R d\rho'\,\rho' J_1(k\rho') = \left| \begin{array}{l} kR = x \\ \rho/R \to \rho \end{array} \right| =$$

$$= M_s^2 \frac{a^2}{R^2} 2\pi^2 L R^4 \int_0^\infty \frac{dx}{x} f(\beta x) \underbrace{\left[\int_0^1 d\rho\,\rho\, J_1(x\rho) \right]^2}_{F^2(x)}$$

$$\frac{W_m^{vol}}{M_s^2 V_0} = W_m^{vol} = \frac{1}{\pi R^2 L} \frac{a^2}{R^2} 2\pi^2 L R^4 \int \frac{dx}{x} f(\beta x) F^2(x) =$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^\infty \frac{dx}{x} f(\beta x) F^2(x)$$, если здесь умн. на $\frac{1}{4\pi}$, то

это после сокращ. β, которое Коля ушипка ввел в F_1^V определение Sobnager с Eq. (6) JMMM – JEMS paper. Eq. (6) верно если преобразовать выражение „core".

$$W_m^{vol}(a) = 2\pi a^2 \int_0^\infty \frac{dx}{x} f(\beta x) \left[\int_0^1 d\rho\,\rho\, J_1(\rho x) \right]^2 = 2\pi a^2 F_1^V(\beta)$$

$$F_1^V(\beta) = \int_0^\infty \frac{dx}{x} f(\beta x) \left[\int_0^1 d\rho\,\rho\, J_1(\rho x) \right]^2$$ получено преобразование об. внутри „core", $c^2 \ll 1$.

Именно это выраж. для $W_m^{vol}(a)$ я использовал 28/VII для расчета χ_{init} и получил

$$\chi_{in} = \frac{1}{9} \frac{1}{\left[4\pi F_1^V(\beta) - \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \right]}$$ – quadratic model

с $f(z) = \frac{c}{c}\left[z + \frac{a}{2z}(1-z^2) \right]$

$\Rightarrow$ проверим расчет $\chi_{in} = \chi(0)$.

Вне области вне „core" $W(z,\bar{z}) = \frac{f(z)}{|f|} = \frac{1}{\rho}\left[iz + \frac{a}{2}(1-z^2) + iz\frac{a}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi \right] =$

$= ie^{i\varphi}\left[1 + \frac{a}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi \right] + \frac{a}{2\rho}(1-z^2) = (i\cos\varphi - \sin\varphi)\left[1 + \frac{a}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi \right] +$

$+ \frac{a}{2\rho}\left[1 - \rho^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) \right]$

$W_x(\vec{\rho}) = \operatorname{Re} W = -\sin\varphi - \frac{1}{2}a\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\sin^2\varphi + \frac{a}{2\rho}\left[1 - \rho^2\cos 2\varphi \right]$

(вне „core")

Escaneado con CamScanner

ADDRESS & TELEPHONE

$\chi(0)$ — factor translation mobility of vortex

Name/Company Phone Address

$$\langle m_x(s^2)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^1 ds\, s \int_0^{2\pi} d\varphi \left[-\frac{a}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)\sin^2\varphi + \frac{a}{2s}\right] =$$

(ось „отв" диаметр. на диск „отв" решение)

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1 ds\, s \left[-\frac{a}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)\pi + \frac{a}{s}\pi\right] = \frac{1}{2}\int_0^1 ds\, s \left[\frac{a}{s} - as\right] =$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^1 ds\,[1-s^2] = \frac{a}{2}\left[s - \frac{1}{3}s^3\right]_0^1 = \frac{a}{2}\left[1-\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3}a -$$

– Зав обнаружен с диаметром от 28/VIII. $\vec{a} = (a_x, 0)$ бин

$W(a) = W(0) + \frac{1}{2}Ba^2 - \frac{1}{3}ha$, $a = 2s$, s – один радиус вихря

$$\chi(0) = \frac{1}{9B}$$

В диффузионной схеме $W(s) = W(0) + \frac{1}{2}As^2 - \mu hs$, где $\langle m_x\rangle = \mu s$, μ – эфф. „маг." момент

$\frac{\partial W}{\partial s} = As - \mu h = 0$, $s_0 = \frac{\mu}{A}h$, $\langle m_x\rangle = \mu s_0 = \frac{\mu^2}{A}h$ или

$\chi(0) = \frac{\mu^2}{A}$; μ – из $\langle m_x\rangle = \mu s$, A – диффузионное при $h=0$, s – один радиус вихря.

В „жёсткой" вихревой модели: $\mu = 1$, $A = 2a(\beta, R) = 4\pi F_1(\beta) - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2$

жёсткая модель

а в „квадратной" модели:

$$W(s) = W(0) + \frac{1}{2}B(2s)^2 - \frac{1}{3}h\cdot 2s = W(0) + \frac{1}{2}(4B)s^2 - \frac{2}{3}hs,$$

$A = 4B$, $\mu = 2/3$ и $\chi(0) = \frac{\mu^2}{A} = \frac{(2/3)^2}{4B} = \frac{1}{9B}$.

$A = 4B = 4\left[4\pi F_1^{\nu}(\beta) - \frac{1}{2}(R_0/R)^2\right]$, $B = 4\pi F_1^{\nu}(\beta) - \frac{1}{2}(R_0/R)^2$

квадратная модель

$\mu = 2/3$, $\chi(0) = \frac{4}{9A}$. $A = \frac{\mu^2}{\chi(0)}$ и получим

$$W(s) = W(0) + \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\chi(0)}s^2 - \mu hs$$

$\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{\mu^2}{\chi}s - \mu h = 0$, $\frac{\mu}{\chi}s - h = 0$, $s_0 = \frac{\chi}{\mu}h = \frac{1}{\mu}\langle m_x\rangle$,

$\langle m_x\rangle = \mu s_0$ – аналогично.

Из сравнения $W(X) = W(0) + \frac{1}{2}\varkappa X^2$

и $W(s) = W(0) + \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\chi(0)}s^2$ получим ($s = \frac{X}{R}$); $w = \frac{W}{\pi M_s^2 R^4}$

$$W(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{\chi(0)}\right)s^2 = \frac{1}{2}\frac{\varkappa}{(\pi R^2 L)M_s^2}X^2 = \frac{1}{2}\frac{\varkappa}{\pi L M_s^2}s^2.$$

$\frac{\varkappa}{\pi L M_s^2} = \frac{\mu^2}{\chi(0)}$, $\varkappa = \frac{\mu^2}{\chi(0)}\pi L M_s^2$, $A = \frac{\mu^2}{\chi(0)}$.

Escaneado con CamScanner

$G = 2\pi g \frac{M_s}{J} l_s \Rightarrow \omega_0 = \frac{\mu^2}{J(0)^2} \gamma M_s$

ADDRESS & TELEPHONE

Name | Phone # | Address

$\omega_0 = \frac{G}{J(0)} \frac{\mu^2}{q^2} \gamma M_s^2 \frac{\gamma}{a^{3q} M_s V} = \frac{\mu^2 \gamma M_s}{2 J(0) q}$

Vacuum & translation modes of various constituent arrangements

Disc conformal modes ($s=0$): $w(s) = w(0) + \frac{1}{2} \gamma [4\pi F_1(\beta)]_2 s^2 - \frac{\gamma}{3} h s$

$\mu = 4/3$, $A = 16\pi F_1(\beta) \Rightarrow J(0) = \frac{A}{\pi} = \frac{4^2}{3^2} 16\pi F_1(\beta) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4\pi F_1(\beta)}\right)^{-1}$

$A = 4 \cdot 4\pi F_1(\beta) = 4 A_{rig.v.m.}$, $\frac{4}{3} J_{rig.v.}$

$\omega_0^{conf.m} = \left(\frac{\gamma M_s}{2q}\right) \frac{(4/3)^2}{(4/3) J(0)_{rig.v.}} = \left(\frac{\gamma M_s}{2q}\right) \frac{1}{J(0)_{rig.v.}} = \frac{4}{2} \omega_0^{rig.v.}$

Gives $q=2$ vibrations ν $\omega_0^{conf.m} = 2\omega_0^{rig.v.}$ — Economic mode (no rage $q=1$ $a \to 0$)

Torsion vac. Gives "quadr." modal:

$\omega_0^{quadr.m} = \frac{\gamma M_s}{2q} \frac{(2/3)^2}{J(0)_{q.m.}} = \left| \gamma_{q.m} = \gamma_{rig.v.} \text{ for } a \to 0 \right| =$

$\frac{1}{q} \frac{4}{3} \omega_0^{rig.v.} \approx \frac{4}{9} \omega_0^{rig.v.}$, t.k. $q=1$ gives $a \to 0$.

Budog: Torsion ω_0 conf. mode same ω_0 rig.v.m., a ω_0 quadr. mode $\sim$ to 2 para mesma ω_0 rig.v.m.

no interference like in charges

$\omega_0 = \frac{1}{2} \frac{\mu^2 \gamma M_s}{J(0)}$, t.v. $\sim J^{-1}(0) = 2\beta \left[\ln \frac{8}{\beta} - \frac{1}{2}\right] = 4\pi F_1(\beta)$

pole free $\sim J^{-1}(0) = 9 \cdot 4\pi F_1^V(\beta)$

$\frac{\omega_0^{t.v}}{\omega_0^{pf.}} = \frac{(1)^2}{J_{t.v}^{*}(0)} \frac{J_{pf.}^{*}(0)}{(2/3)^2} \sim \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{J(0)_{pf.}}{J_{t.v}(0)} = \frac{1}{4} \frac{F_1^{*}(\beta)}{F_1^{V}(\beta)} \overset{\beta \to 0}{\to} \left(\frac{1}{4}\right)$ ~~0.0 β~~

Escaneado con CamScanner